



2004年北京市中学生数学竞赛 高一年级初赛试题及参考答案

一、选择题(满分36分)

1. 满足条件 $f(x^2)=[f(x)]^2$ 的二次函数是().

(A) $f(x)=x^2$ (B) $f(x)=ax^2+5$

(C) $f(x)=x^2+x$

(D) $f(x)=-x^2+2004$

2. 在 R 上定义的函数 $y=\sin x, y=\sin 2004, y=\sin|x|, y=\sin(\frac{\pi}{2}-x)$ 中, 偶函数的个数是().

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

3. 方程 $||x|-1|=a$ 恰有 3 个实数解, 则 a 等于().

(A) 0 (B) 0.5 (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

4. 实数 a, b, c 满足 $a+b>0, b+c>0, c+a>0, f(x)$ 是 R 上的奇函数, 并且是个严格的减函数, 即若 $x_1<x_2$, 就有 $f(x_1)>f(x_2)$. 则().

(A) $2f(a)+f(b)+f(c)=0$

(B) $f(a)+f(b)+f(c)<0$

(C) $f(a)+f(b)+f(c)>0$

(D) $f(a)+2f(b)+f(c)=2004$

5. 已知 a, b, c, d 四个正整数中, a 被 9 除余 1, b 被 9 除余 3, c 被 9 除余 5, d 被 9 除余 7, 则一定不是完全平方数的两个数是().

(A) a, b (B) b, c (C) c, d (D) d, a

6. 正实数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 中, a_1, a_2, a_3 成等差数列, a_2, a_3, a_4 成等比数列, 且公比不等于 1, 又 a_3, a_4, a_5 的倒数成等差数列, 则().

(A) a_1, a_3, a_5 成等比数列

(B) a_1, a_3, a_5 成等差数列

(C) $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_3}, \frac{1}{a_5}$ 成等差数列

(D) $\frac{1}{6a_1}, \frac{1}{3a_3}, \frac{1}{2a_5}$ 成等比数列

二、填空题(满分64分)

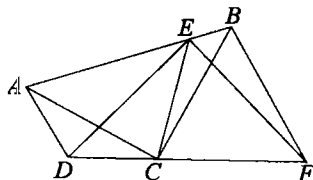
1. 已知 $f(x)=\begin{cases} 2^x & (x<0) \\ \sqrt{3} & (0\leq x\leq 1) \\ \log_{\frac{1}{3}}x & (x>1) \end{cases}$, 试

确定 $f\{f[f(-2004)]\}$ 的值.

2. 已知 $a=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+\dots+2001+2002+2003+2004$, 求 a 被 17 除的余数.

3. 已知 $f(x)=x^2+x-1$, 若 $ab^2\neq 1$, 且有 $f(a^{-1})=f(b^2)=0$, 试确定 $\frac{a}{1+ab^2}$ 的值.

4. 如图所示, 等腰直角三角形 ABC 的直角顶点 C 在等腰直角三角形 DEF 的斜边 DF



上, E 在 $\triangle ABC$ 的斜边 AB 上, 如果凸四边形 $ADCE$ 的面积等于 5 平方厘米, 那么凸四边形 $ABFD$ 的面积等于多少平方厘米?

5. 若 $a, b \in R$, 且 $a^2+b^2=10$, 试确定 $a-b$ 的取值范围.

6. a 和 b 是关于 x 的方程 $x^4+m=9x^2$ 的两个根, 且满足 $a+b=4$, 试确定 m 的值.

7. 求 $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$ 的值.

8. 将 2004 表为 n 个彼此不等的正整数的和, 求 n 的最大值.

参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6
答案	A	D	C	B	B	A

二、填空题

题号	1	2	3	4
答案	$-\frac{1}{2}$	1	-1	10
题号	5	6	7	8
答案	$[-2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}]$	$\frac{49}{4}$	$\frac{1}{16}$	62

即 $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c.$

例5 (1999年“希望杯”全国数学邀请赛高一培训题). 已知 $a, b, c > 0, ab=2, a^2+b^2+c^2=6$, 求 $bc+ca$ 的最大值.

解 考虑 $b^2+c^2 \geq 2bc, c^2+a^2 \geq 2ca, a^2+b^2 \geq 2ab,$
累加 $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(bc+ca+ab),$
即 $12 \geq 2(bc+ca+2),$
 $\therefore bc+ca \leq 4, (bc+ca)_{\max} = 4.$

例6 设 $a, b, c \in R^+, a+b+c=1$, 求证:
 $a^3b+b^3c+c^3a \geq abc.$

(1984年列宁格勒数学竞赛题)

证明 由 $a+b+c=1$, 只要证明 $a^3b+b^3c+c^3a \geq abc(a+b+c)$, 即 $a^3b+b^3c+c^3a \geq a^2bc+ab^2c+abc^2.$ 思考 $a^3b+(\quad) \geq 2a^2bc$ (右边系数凑为2).

可得 $a^3b+abc^2 \geq 2a^2bc$ ①

$b^3c+a^2bc \geq 2ab^2c$ ②

$c^3a+ab^2c \geq 2abc^2$ ③

由①+②+③得 $a^3b+b^3c+c^3a \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$, 原式成立.

例7 (1987年中国数学奥林匹克集训队试题) 若 $a, b, c \in R^+$, 求证: $a^5+b^5+c^5 \geq a^3bc+ab^3c+abc^3.$

证明 只要证 $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} \geq a^2+b^2+c^2.$

思考 $\frac{a^4}{bc}+(\quad) \geq 2a^2$, 可得

$\frac{a^4}{bc}+bc \geq 2a^2,$

$\frac{b^4}{ac}+ac \geq 2b^2,$

$\frac{c^4}{ab}+ab \geq 2c^2$, 累加

$\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} + ab + bc + ca$

$\geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$

又 $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,$

$\therefore \frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} + a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$

即 $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ac} + \frac{c^4}{ab} \geq a^2 + b^2 + c^2.$ 证毕.

例8 设 α, β, γ 均为锐角, 且 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$ 求证:

$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha} \geq 1.$

(《数学通报》1994(10)数学问题912号)

证明 只要证 $\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\alpha} \geq \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$, 思考 $\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta}+(\quad) \geq 2\sin^2\alpha$ 可得

$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \sin\alpha\sin\beta \geq 2\sin^2\alpha,$

$\frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \sin\beta\sin\gamma \geq 2\sin^2\beta,$

$\frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha} + \sin\gamma\sin\alpha \geq 2\sin^2\gamma,$

累加可得

$\frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha} + \sin\alpha\sin\beta$

$+ \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha$

$\geq 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma.$

又 $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$\geq \sin\alpha\sin\beta + \sin\beta\sin\gamma + \sin\gamma\sin\alpha.$

$\therefore \frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}$

$+ \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$\geq 2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma,$

$\therefore \frac{\sin^3\alpha}{\sin\beta} + \frac{\sin^3\beta}{\sin\gamma} + \frac{\sin^3\gamma}{\sin\alpha}$

$\geq \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$

$= 1.$

证毕.

(责审 周春荔)