2003 年北京市中学生数学竞赛(高一)

初 赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. a 为非零实数, x 为实数. 记命题 M: $x \in \{-a, a\}$,记命题 N: $\sqrt{x^2}=a$ 有解. 则 M 是 N 的( ).

(A)充分非必要条件 (B)必要非充分条件

(C)充分且必要条件

(D)既非充分又非必要条件

2. $[a]$表示不超过 a 的最大整数,则函数 $y=\frac{x}{\pi}-\left[\frac{x}{\pi}\right]-|\sin x|$ 的最大值是( ).

(A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

3. 已知 $f(x)$ 是定义在实数集上的函数,且 $f(x+5)=-f(x)$,当 $x\in(5,10)$ 时, $f(x)=\frac{1}{x}$. 则 $f(2\,003)$ 的值等于( ).

(A) $-\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

4. 满足不等式 $9^x-2\times3^x-3\geq0$ 的 x 的最小实数值是( ).

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

5. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AB=5$, $AC\leq3$, $BC\geq7$. 则 $\angle CAB$ 的最小值为( ).

(A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{3\pi}{4}$ (D) $\frac{5\pi}{6}$

6. 如果满足 $||x^2-4x-5|-6|=a$ 的实数 x 恰有 6 个值,则实数 a 的取值范围是( ).

(A) $-6\leq a\leq0$ (B) $0<a\leq3$

(C) $3<a<6$ (D) $6\leq a<9$

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 正方形 $ABCD$ 中, M 是边 BC 的中点, N 是边 CD 的中点. 则 $\sin\angle MAN$ 的值是______.

2. 记 $\min\{a,b,c\}$为 a、b、c 中的最小值. 若 x、y 是任意正实数,则 $M=\min\left\{x,\frac{1}{y},y+\frac{1}{x}\right\}$ 的最大值是______.

3. 已知函数 $f(x)=\frac{2+x}{1+x}$. 记

$f(1)+f(2)+\cdots+f(1\,000)=m$,

$f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{1\,000}\right)=n$.

则 $m+n$ 的值是______.

4. 如果 x_1 与 x_2 是方程 $\sqrt{x+4}+\sqrt{9-3x}=5$ 的两个不等的实根,那么, $x_1^2+x_2^2$ 的值为______.

5. $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=36°$, $\angle ACB=42°$,在边 BC 上取一点 D,使得 BD 恰等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径. 则 $\angle DAC=$______度.

6. 数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_{n+1}=4a_n+4\sqrt{a_n}+1$, $n=1,2,\cdots$. 则该数列的通项公式为______.

7. n 是正整数, $f(n)=\sin\frac{n\pi}{2}$. 则

$f(1\,991)+f(1\,992)+\cdots+f(2\,003)=$______.

8. 一个三角形的三条边成等比数列,那么,公比 q 的取值范围是______.

复 赛

一、填空题(每小题 8 分,共 40 分)

1. 已知 x、y 是正整数,且满足 $xy+x+y=71$, $x^2y+xy^2=880$. 则 $x^2+y^2=$______.

2. 如图 1,两圆交于 A、B 两点, S 为两圆外一点,直线 SA 交第一圆于点 C,交第二圆于点 D,直线 SB 交第一圆于点 E,交第二圆于点 F. 已知 $CE=a$, $DF=b$,四边形 $ABEC$ 的面积与四边形 $ABFD$ 的面积相等. 则 $AB=$______.

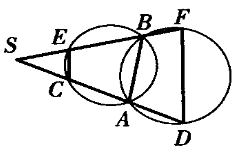

图 1

3. 定义在正整数集合上的函数

$$f(x)=\begin{cases}3x-1, & x\text{ 为奇数},\\ \frac{x}{2}, & x\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

令 $x_1=12$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $n\in\mathbf{N}$,则集合$\{x|\ x=x_n, n\in\mathbf{N}\}$中的元素共有______个.

4. 已知各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$和一个等差数列$\{a_n\}$,满足 $b_3-b_1=9$, $b_5-b_3=36$,且 $b_1=a_1$, $b_2=a_3$. 记该等比数列前 6 项的和等于 G_6,该等差数列前 12 项的和等于 A_{12},则 $G_6+A_{12}=$______.

5. $M=\{-2,0,1\}$, $N=\{1,2,3,4,5\}$. 映射 $f:M\to N$,使得对任意 $x\in M$,都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数. 则这样的不同映射共有______个.

二、(15 分)如果 a、b、c 是正数,求证:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

三、(15 分) 如图 2,动点 P 在以 $AB = 1$ 为弦,且含弓形角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的弓形弧(含端点)上.设 $AP = x$, $BP = y$,试确定 $k = 3x + 2y$ 的最大值和最小值.

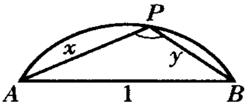

图 2

四、(15 分) 已知半径分别为 R、r 的两个圆外切于点 P,点 P 到这两圆的一条外公切线的距离等于 d.求证:$\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{2}{d}$.

五、(15 分) 设有两两不等的 n 个正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.则在形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ (其中 t_i 取 1 或 -1, $i = 1, 2, \cdots, n$) 的整数中,存在 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数,要么同时为奇数,要么同时为偶数.

参 考 答 案

初　赛

一、1.B.

设 a 为正数,当 $x = -a$ 时, $x \in \{-a, a\}$, M 真.但 $\sqrt{(-a)^2} = a \neq -a$, N 不真.所以, M 不是 N 的充分条件.

若 N 真, $\sqrt{x^2} = a$,显然应有 a 为非负数.但 a 不为 0,所以 a 为正数.于是, $x = a \in \{-a, a\}$,故 M 真.因此, M 是 N 的必要条件.

综上分析, M 是 N 的必要非充分条件.

2.D.

因为 $0 \leqslant \frac{x}{\pi} - \left[\frac{x}{\pi}\right] < 1$, $0 \leqslant |\sin x| \leqslant 1$,

$y = \frac{x}{\pi} - \left[\frac{x}{\pi}\right] - |\sin x| \leqslant 1 - 0 = 1$,

所以 $y = \frac{x}{\pi} - \left[\frac{x}{\pi}\right] - |\sin x|$ 的最大值可能是 1.

下面说明不能达到 1.

因 y 是以 π 为周期的周期函数,故只须考虑 $x \in (0, \pi]$ 时函数的变化.在 $x \in (0, \pi]$ 上,当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\left[\frac{x}{\pi}\right] = 0$, $\sin x > 0$,则 $y = \frac{x}{\pi} - \sin x < 1 - \sin x < 1$.

从图 3 可见,当 $x \leqslant x_1$ 时, $y \leqslant 0$,当 $x \in (x_1, \pi)$ 时, $\frac{x}{\pi} > \sin x$,且 $\frac{x}{\pi}$ 单调增, $\sin x$ 单调减,则 $y = \frac{x}{\pi} - \sin x$ 单调增;

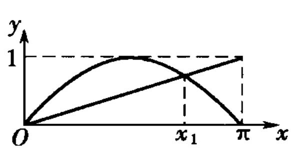

图 3

当 $x = \pi$ 时, $y = 0$.所以, y 无最大值.

3.A.

因为 $f(x + 10) = -f(x + 5) = f(x)$,所以,

$f(2\,003) = f(200 \times 10 + 3) = f(3) = -f(8) = -\frac{1}{8}$.

4.C.

设 $3^x = t$,原不等式变形为 $t^2 - 2t - 3 \geqslant 0$.

解得 $t \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

因为 t 是正数,所以, $3^x = t \geqslant 3$.故 $x \geqslant 1$.

因此,满足 $9^x - 2 \times 3^x - 3 \geqslant 0$ 的最小实数值是 1.

5.B.

由余弦定理得

$$\cos\angle CAB = \frac{AC^2 + 5^2 - BC^2}{2 \times 5 \times AC} \leqslant \frac{3^2 + 25 - 7^2}{10 \times AC}$$

$$= -\frac{15}{10 \times AC} \leqslant -\frac{15}{10 \times 3} = -\frac{1}{2}.$$

由于余弦函数在区间 $(0, \pi)$ 是减函数,所以,

$\angle CAB \geqslant \frac{2\pi}{3}$.

6.C.

作出函数 $y = ||x^2 - 4x - 5| - 6|$ 的草图,看直线 $y = a$ 与该图像的交点个数,确定实数 a 的取值范围是 $3 < a < 6$.

二、1. $\frac{3}{5}$.

如图 4,设正方形边长为 2,连结 MN,则 $S_{正方形ABCD} = 4$, $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ADN} = 1$, $S_{\triangle CMN} = 0.5$.所以, $S_{\triangle AMN} = 4 - 1 - 1 - 0.5 = 1.5$.又 $AM = AN = \sqrt{5}$, $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \sin\angle MAN$,

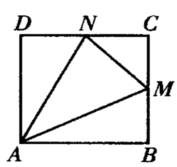

图 4

得 $\sin\angle MAN = \frac{2 \times 1.5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}$.

2. $\sqrt{2}$.

依题设 $\frac{1}{y} \geqslant M$, $x \geqslant M$, $y + \frac{1}{x} \geqslant M$,则

$y \leqslant \frac{1}{M}$, $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{M}$, $M \leqslant y + \frac{1}{x} \leqslant \frac{2}{M}$.

于是, $M^2 \leqslant 2$, $M \leqslant \sqrt{2}$.

当 $x = \sqrt{2}$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$, $y + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.所以, $M = \sqrt{2}$, M 的最大值是 $\sqrt{2}$.

3. 2 998.5

易知 $x \neq -1$.由于

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2 + x}{1 + x} + \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = 3, \quad f(1) = \frac{3}{2},$$

所以，$m+n=3\times999+\frac{3}{2}=2\,998.5$.

4. $14\frac{1}{16}$.

原方程两边平方并整理得

$\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{9-3x}=x+6$,

再两边平方得

$9x+36-3x^2-12x=x^2+12x+36$,

合并可得 $4x^2+15x=0$，即 $x(4x+15)=0$.

解得 $x_1=0$，$x_2=-\frac{15}{4}$.

检验知均为原方程的根. 所以，

$x_1^2+x_2^2=0+\frac{225}{16}=14\frac{1}{16}$.

5. $54°$.

设 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，易知 $\angle BAC=102°$ 是钝角. 所以，O 在 $\triangle ABC$ 的外部. 连结 OA 交边 BC 于 D_1. 下面证明 D_1 与 D 重合.

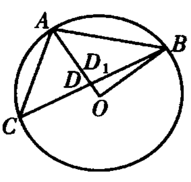

图 5

由图 5 可见，

$\angle AOB=84°$,

$\angle OAB=48°$,

$\angle BD_1O=36°+48°=84°$.

所以，$BD_1=BO$，即 D_1 与 D 重合. 因此，

$\angle DAC=102°-48°=54°$.

6. $2^{2n}-2^{n+1}+1$.

由已知条件得 $\sqrt{a_{n+1}}=2\sqrt{a_n}+1$，所以，

$\sqrt{a_{n+1}}+1=2(\sqrt{a_n}+1)$.

因此，$\{\sqrt{a_{n+1}}+1\}$是首项为 2、公比为 2 的等比数列. $\sqrt{a_n}+1=2^n$，即 $\sqrt{a_n}=2^n-1$. 从而，

$a_n=2^{2n}-2^{n+1}+1$.

7. -1.

易知 $f(1\,991)=-1$，$f(1\,992)=0$，$f(1\,993)=1$，$f(1\,994)=0$，…，$f(2\,003)=-1$. 所以，

$f(1\,991)+f(1\,992)+\cdots+f(2\,003)=-1$.

8. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

设三边按递增顺序排列为 a，aq，aq^2，其中 $a>0$，$q\geq1$. 则 $a+aq>aq^2$，即 $q^2-q-1<0$. 解得

$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

由 $q\geq1$ 知 q 的取值范围是 $1\leq q<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

设三边按递减顺序排列为 a，aq，aq^2，其中 $a>0$，$0<q<1$. 则 $aq^2+aq>a$，即 $q^2+q-1>0$. 解得

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<1$.

综上所述，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<q<\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

复 赛

一、1. 146.

设 $a=x+y$，$b=xy$，$xy+x+y=a+b=71$，$x^2y+xy^2=xy(x+y)=ab=880$.

所以，a、b 是 $t^2-71t+880=0$ 的两个根.

解得 $a=x+y$，$b=xy$ 分别等于 16 和 55.

若 $x+y=55$，$xy=16$，显然无正整数解. 所以，只有 $x+y=16$，$xy=55$.

因此，$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=146$.

2. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

易知 $\angle SCE=\angle SBA=\angle SDF$. 所以，

$\triangle SCE\backsim\triangle SBA\backsim\triangle SDF$.

设 $AB=x$，$S_{\triangle SCE}=S_0$，$S_{四边形ABEC}=S_{四边形ABFD}=S$，则

$$\frac{S_0+S}{S_0}=\frac{x^2}{a^2},\qquad ①$$

$$\frac{S_0+2S}{S_0}=\frac{b^2}{a^2}.\qquad ②$$

由①得 $\frac{S}{S_0}=\frac{x^2-a^2}{a^2}$，由②得 $\frac{2S}{S_0}=\frac{b^2-a^2}{a^2}$，故

$\frac{x^2-a^2}{a^2}=\frac{b^2-a^2}{2a^2}$.

解得 $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. 7.

由 $x_1=12$ 得 $x_2=6$，进而 $x_3=3$，$x_4=8$，$x_5=4$，$x_6=2$，$x_7=1$，$x_8=2$，$x_9=1$，…，以下均为 2，1，2，1，…的循环. 所以，x_n 共取 7 个不同的值，即集合$\{x|x=x_n,n\in\mathbf{N}\}$中共有 7 个元素.

4. 324.

设公比为 $q(q>0)$，则

$$\begin{cases}b_1q^2-b_1=9,\\ b_1q^4-b_1q^2=36,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}b_1q^2-b_1=9, & ①\\ q^2(b_1q^2-b_1)=36. & ②\end{cases}$$

将①代入②得 $q^2=4$. 故 $q=2$ 或 $q=-2$. 由于 $q>0$，则 $q=2$. 此时 $b_1=3$.

所以，$G_6=\frac{b_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{3(1-64)}{1-2}=189$.

设 d 是等差数列$\{a_n\}$的公差，则依题设条件有 $\begin{cases}a_1=3,\\ a_1+2d=6.\end{cases}$ 由此得 $d=\frac{3}{2}$. 所以，

$a_{12}=a_1+11d=\frac{39}{2}$.

因此，$A_{12}=\frac{(a_1+a_{12})\times12}{2}=\left(3+\frac{39}{2}\right)\times6=135$.

于是，$G_6 + A_{12} = 189 + 135 = 324$.

5. 45.

由于映射 $f: M \to N$ 的自变量取自 $M = \{-2, 0, 1\}$，$f(x)$ 的值取自 $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 问题是研究对任意 $x \in M$，都有 $x + f(x) + xf(x)$ 是奇数的不同映射的个数.

而 $x + f(x) + xf(x) = x + xf(x) + 1 + f(x) - 1$
$= (x+1)[1 + f(x)] - 1$.

当 $x = 1$ 时，$x + 1$ 是偶数，可知无论 $f(x)$ 取 N 中哪个值，都有 $x + f(x) + xf(x)$ 是奇数. 所以，$f(x)$ 有 5 种对应取值法.

当 $x = -2$ 时，由于 $x + 1$ 是奇数，要 $x + f(x) + xf(x)$ 为奇数，必须且只须 $1 + f(x)$ 为偶数，也就是 $f(x)$ 为奇数. 所以，$f(x)$ 有 3 种对应取值法.

同理，$x = 0$ 时，$f(x)$ 也有 3 种对应取值法.

因此，所求的不同映射共有 $3 \times 3 \times 5 = 45$ 个.

二、因为 $a^2 + ab + b^2 \geq 3ab$，所以，

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^3 + a^2b + ab^2 - (a^2b + ab^2)}{a^2+ab+b^2}$$

$$= a - \frac{ab(a+b)}{a^2+ab+b^2} \geq a - \frac{a+b}{3}. \qquad ①$$

同理，$\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq b - \dfrac{b+c}{3}$，　②

$$\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq c - \frac{c+a}{3}. \qquad ③$$

① + ② + ③，得

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2}$$

$$\geq (a+b+c) - \frac{2(a+b+c)}{3} = \frac{a+b+c}{3}.$$

三、在 $\triangle APB$ 中，由余弦定理得

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{3} = 1,$$

即 $\quad x^2 + y^2 + xy = 1$.　①

由 $k = 3x + 2y$ 知

$$y = \frac{k - 3x}{2}. \qquad ②$$

将 ② 代入 ① 得 $7x^2 - 4kx + k^2 - 4 = 0$.

因为 x 是正实数，故此方程必有实根.

所以，$\Delta = (4k)^2 - 4 \times 7(k^2 - 4) \geq 0$.

解得 $k^2 \leq \dfrac{28}{3}$. 故 $k \leq \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

又 $k = 3x + 2y = x + 2(x + y) \geq x + 2 \geq 2$，所以，

$2 \leq k \leq \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$.

当 $x = \dfrac{4\sqrt{21}}{21}$ 时，$k = \dfrac{2\sqrt{21}}{3}$；

当点 P 与点 A 重合时，$k = 2$.

因此，所求的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，最小值为 2.

四、如图 6，设半径为 R 的 $\odot O$ 与半径为 r 的 $\odot O_1$ 外切于点 P，AB 是两圆的一条外公切线，$PC \perp AB$ 于点 C. 连结 OP、O_1P，则 O、P、O_1 共线. 延长 BO_1 交 $\odot O_1$ 于点 D，则 BD 是 $\odot O_1$ 的直径. 连结 AP、PD. 因为 $OA \parallel BD$，所以，$\angle AOP = \angle PO_1D$. 因为 $\triangle AOP$、$\triangle PO_1D$ 都是等腰三角形，则有 $\angle OPA = \angle O_1PD$. 所以，$A$、$P$、$D$ 三点共线.

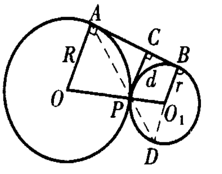

图 6

因为 $PC \parallel DB$，所以，$\dfrac{AP}{AD} = \dfrac{PC}{DB} = \dfrac{d}{2r}$.

又因 $\triangle AOP \backsim \triangle DO_1P$，则有

$$\frac{AP}{DP} = \frac{OP}{O_1P} = \frac{R}{r} \Rightarrow \frac{AP}{AP+DP} = \frac{R}{R+r} \Rightarrow \frac{AP}{AD} = \frac{R}{R+r}.$$

因此，$\dfrac{R}{R+r} = \dfrac{d}{2r} \Rightarrow \dfrac{R+r}{Rr} = \dfrac{2}{d}$.

故 $\dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{r} = \dfrac{2}{d}$.

五、不妨设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，则 $a = -a_1 - a_2 - \cdots - a_n$ 是形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ 的整数中的最小数，$a + 2a_1 = a_1 - a_2 - \cdots - a_n$ 也是形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ 的整数. 一般地，$a + 2a_1 + 2a_2$ 也是形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$ 的整数. 依此类推，则

$$\underbrace{a}_{1\text{个}} < \underbrace{a + 2a_1 < a + 2a_2 < \cdots < a + 2a_n}_{n\text{个}}$$

$$< \underbrace{a + 2a_n + 2a_1 < \cdots < a + 2a_n + 2a_{n-1}}_{n-1\text{个}}$$

$$< \underbrace{a + 2a_n + 2a_{n-1} + 2a_1 < \cdots < a + 2a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2}}_{n-2\text{个}}$$

$$< \cdots < \underbrace{a + 2a_n + \cdots + 2a_3 + 2a_1 < a + 2a_n + \cdots + 2a_3 + 2a_2}_{2\text{个}}$$

$$< \underbrace{a + 2a_n + 2a_{n-1} + \cdots + 2a_2 + 2a_1}_{1\text{个}}$$

$$= a + 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

$$= a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

上式中的每一个整数都是形如 $t_1a_1 + t_2a_2 + \cdots + t_na_n$（其中 t_i 取 1 或 -1，$i = 1, 2, \cdots, n$）的整数中的不同的数，它们共有

$$1 + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$$

$$= 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$$

个彼此不同的数.

易见，当 a 是偶数时，这 $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数都是偶数；当 a 是奇数时，这 $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数都是奇数.

（周春荔　整理）