2010 年北京市中学生数学竞赛初赛(高一)

中图分类号: G424.79　文献标识码: A　文章编号: 1005-6416(2011)01-0031-03

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 函数 $y=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位,所得到的图像对应的函数为奇函数. 则 φ 的最小值是(　　).

(A) $\frac{\pi}{3}$　(B) $\frac{\pi}{4}$　(C) $\frac{\pi}{6}$　(D) $\frac{\pi}{8}$

2. 已知 $P(a,b)$ 是第一象限内的矩形 $ABCD$(含边界)中的一个动点, A、B、C、D 的坐标如图 1 所示. 则 $\frac{b}{a}$ 的最大值与最小值依次是(　　).

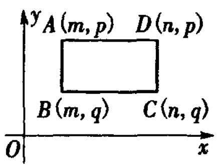

图1

(A) $\frac{q}{m},\frac{p}{n}$　(B) $\frac{p}{m},\frac{q}{n}$

(C) $\frac{q}{m},\frac{q}{n}$　(D) $\frac{p}{m},\frac{p}{n}$

3. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面上一点,满足 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}$. 若 $S_{\triangle ABC}=6$,则 $S_{\triangle PAB}=$(　　).

(A)4　(B)3　(C)2　(D)1

4. 若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=1$,且其图像过点 $(2,0)$,则 $\frac{f(-1)}{f(1)}$ 的值是(　　).

(A) -3　(B) -2　(C)2　(D)3

5. 在 $\triangle ABC$ 中,中线 AD 与 BE 垂直交于点 G. 则 $\sin C$ 的最大值是(　　).

(A) $\frac{2}{5}$　(B) $\frac{3}{5}$　(C) $\frac{2}{3}$　(D) $\frac{4}{5}$

6. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,且满足 $f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=4x$. 则 $f(2)f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 的值等于(　　).

(A)31.5　(B)30.5

(C) -30.5　(D) -31.5

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 已知函数 $f(x)=x^2-1$ 的定义域为 D,值域为 $\{-1,0,1,3\}$. 试确定这样的集合 D 最多有多少个.

2. 求 $\dfrac{\log_2\frac{2}{3}+\log_2\frac{3}{4}+\log_2\frac{4}{5}+\log_2\frac{5}{6}+\log_2\frac{6}{7}+\log_2\frac{7}{8}}{\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7}$ 的值.

3. 如图 2,在长方形 $ABCD$ 中, E 为边 AB 上一点, $AB=14$, $CE=13$, $DE=15$, $CF\perp DE$ 于点 F,联结 AF、BF. 求 $\triangle ABF$ 的面积.

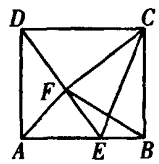

图2

4. 在同一个直角坐标系中,已知直线 $y=kx$ 与函数

$$y=\begin{cases}2x+4, & x<-3;\\ -2, & -3\leqslant x\leqslant 3;\\ 2x-8, & x>3\end{cases}$$

的图像恰有三个不同的交点. 试确定 k 的取值范围.

5. 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点,且满足

$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+6\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

试确定 $\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCA$ 的面积之比.

6. 在凸四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD+\angle ADC=240^\circ$, E、F 分别是边 AD、BC 的中点, $EF=\sqrt{7}$. 若以 AB、CD 为边分别画两个正方形 A_1、A_2,再画一个长度、宽度分别为 AB、CD 的长方形 A_3. 求所画的三个图形 A_1、A_2、A_3 的面积之和.

7. 求 $\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$

的值.

8. 在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=100°$,$\angle ACB=65°$,分别在边AB、AC上取点M、N,使得$\angle MCB=55°$,$\angle NBC=80°$.试确定$\angle NMC$的度数.

参考答案

一、**1.** C.

由题意知,题给函数的最小正根为$\frac{\pi}{6}$,而奇函数的必要条件是在原点的函数值为0,于是,φ的最小值是$\frac{\pi}{6}$.

2. B.

因为$k_{OP}=\frac{b}{a}$,且$k_{OC}\leqslant k_{OP}\leqslant k_{OA}$,所以,$\frac{b}{a}$的最大值为$\frac{p}{m}$,最小值为$\frac{q}{n}$.

3. C.

由$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AB}=2(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PA})$,得$3\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CB}$.

故$S_{\triangle PAB}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=2$.

4. A.

由题意知曲线过点(0,0),故$c=f(0)=0$.

于是,$f(x)=ax^2+bx$.

又图形的对称轴为$x=\frac{-b}{2a}=1$,即$b=-2a$,则$\frac{f(-1)}{f(1)}=\frac{a-b}{a+b}=-3$.

5. B.

如图3,在$\triangle ABC$中,设$BC=a$,$CA=b$,$AB=c$,$GD=x$,$GE=y$.则

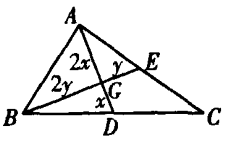

图3

$GA=2x$,

$GB=2y$.

在Rt$\triangle AGB$、Rt$\triangle AGE$和Rt$\triangle BGD$中,分别应用勾股定理得

$$4x^2+4y^2=c^2,4x^2+y^2=\frac{b^2}{4},x^2+4y^2=\frac{a^2}{4}.$$

由余弦定理得

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+b^2}=\frac{4}{5}.$$

又$\angle C$是锐角,则

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}\leqslant\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

6. D.

把$x=-2$,$x=\frac{1}{2}$分别代入题设等式得

$$\begin{cases}f\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f(2)=-8,\\ f(2)+2f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f(2)=9,\\ f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{2}.\end{cases}$$

故$f(2)f\left(-\frac{1}{2}\right)=-31.5$.

二、**1.** 27.

因为$f(0)=-1$,$f(\pm1)=0$,

$f(\pm\sqrt{2})=1$,$f(\pm2)=3$,

所以,$0\in D$;$\{-1,1\}$,$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$,$\{-2,2\}$各组中都至少一个属于D.

于是,这样的D共有$3\times3\times3=27$个.

2. -6.

$$原式=\frac{\log_2\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\right)}{\frac{\lg 2}{\lg 3}\cdot\frac{\lg 3}{\lg 4}\cdot\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 5}{\lg 6}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 7}\cdot\frac{\lg 7}{\lg 8}}$$

$$=\frac{\log_2\frac{2}{8}}{\frac{\lg 2}{\lg 8}}=\frac{\log_2 2^{-2}}{\frac{\lg 2}{3\lg 2}}=\frac{-2}{\frac{1}{3}}=-6.$$

3. 36.96.

设$BE=x$.则$AE=14-x$.

在Rt$\triangle ADE$和Rt$\triangle BCE$中分别应用勾股定理得

$$DE^2-AE^2=AD^2=BC^2=CE^2-BE^2,$$

即　$15^2-(14-x)^2=13^2-x^2$.

解得$x=5$.

则$AD=BC=13^2-x^2=12$.

所以,$S_{\triangle CDE}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=84$.

又Rt$\triangle CDF\backsim$Rt$\triangle DEA$,则

$$\frac{S_{\triangle CDF}}{S_{\triangle DEA}}=\frac{CD^2}{DE^2}.$$

因此，$S_{\triangle CDF}=\frac{14^2}{15^2}S_{\triangle DEA}=47.04$.

由 $S_{\triangle CDF}+S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}=84$，则

$S_{\triangle ABF}=84-S_{\triangle CDF}=36.96$.

4. $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

在坐标系中画出函数草图，即图 4 中的粗黑折线.

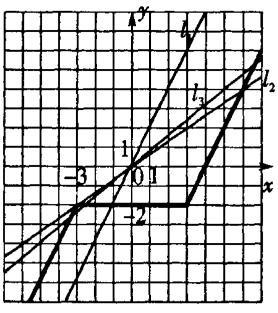

图 4

直线 l_1：$y=2x$ 与该折线只有一个公共点；

直线 l_2：$y=\frac{2}{3}x$ 与该折线只有两个公共点.

对于过原点的直线，当由 l_2 逆时针旋转到 l_1 时，即当且仅当斜率 k 满足 $\frac{2}{3}<k<2$ 时，直线 l_3：$y=kx$ 与该折线恰有三个交点.

5. 6∶2∶3.

如图 5，取点 A_1、B_1、C_1，使

$\overrightarrow{PA_1}=2\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{PB_1}=3\overrightarrow{PB}$，$\overrightarrow{PC_1}=6\overrightarrow{PC}$.

则 $\overrightarrow{PA_1}+\overrightarrow{PB_1}+\overrightarrow{PC_1}=\overrightarrow{0}$.

于是，P 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心.

故 $S_{\triangle PA_1B_1}=S_{\triangle PB_1C_1}=S_{\triangle PC_1A_1}$，

$S_{\triangle PAB}:S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PCA}$

$=\frac{1}{2\times3}:\frac{1}{3\times6}:\frac{1}{6\times2}=6:2:3$.

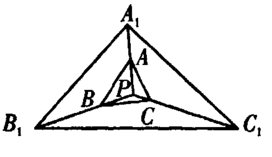

图 5

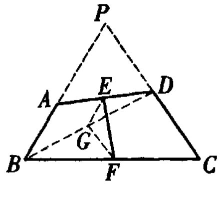

图 6

6. 28.

如图 6，延长 BA 与 CD 交于点 P.

由 $\angle BAD+\angle ADC=240°$，得

$\angle BPC=60°$.

联结 BD，取 BD 的中点 G，联结 EG、FG. 则由三角形中位线定理知

$EG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AB$，$FG \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD$，$\angle EGF=120°$.

在 $\triangle EGF$ 中，由余弦定理得

$7=EF^2=EG^2+FG^2+EG\cdot FG$

$=\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\left(\frac{CD}{2}\right)^2+\left(\frac{AB}{2}\right)\left(\frac{CD}{2}\right)$，

即 $AB^2+CD^2+AB\times CD=28$.

所以，三个图形 A_1、A_2 和 A_3 的面积之和为 28.

7. $\frac{3}{2}$.

$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}$

$=\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{\pi}{8}$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2\right]$

$=1+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$.

8. 25°.

易知 $\angle BAC=15°$.

如图 7，作 $\triangle MCB$ 的外接圆与 BN 的延长线交于点 M_1. 则在这个圆中弧 $\overset{\frown}{CM_1}$ 与 $\overset{\frown}{CM}$ 所对的圆周角互补. 所以，$CM_1=CM$.

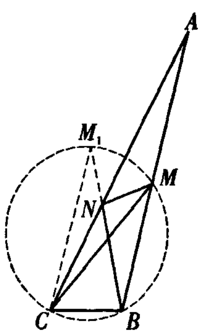

图 7

又 $\angle M_1CM$

$=\angle M_1BM$

$=100°-80°=20°$，

$\angle ACM$

$=65°-55°=10°$，

则 $\angle M_1CN=10°$.

又 $CN=CN$，则 $\triangle M_1CN\cong\triangle MCN$.

故 $\angle NMC=\angle NM_1C=\angle CMB$

$=\angle BAC+\angle ACM=15°+10°=25°$.

（李延林　提供）

2010年北京市中学生数学竞赛初赛(高一)

刊名：　中等数学
英文刊名：　HIGH-SCHOOL MATHEMATICS
年，卷(期)：　2011(1)