

第 22 届全国中学生物理竞赛预赛题试卷

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	总分
得分										
阅卷人										

本卷共九题，满分 200 分

一、（10 分）在横线上填上恰当的内容

1. 在 2004 年 6 月 10 日联合国大会第 58 次会议上，鼓掌通过一项决议。决议摘录如下：

联合国大会，

承认物理学为了解自然界提供了重要基础，

注意到物理学及其应用是当今众多技术进步的基石，

确信物理教育提供了建设人类发展所必需的科学基础设施的工具，

意识到 2005 年是爱因斯坦科学发现一百周年，这些发现为现代物理学奠定了基础，

i. ....;

ii. ....;

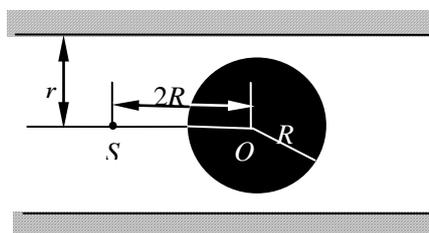
iii. 宣告 2005 年为 \_\_\_\_\_ 年。

2. 爱因斯坦在现代物理学领域作出了很多重要贡献，试举出其中两项：

\_\_\_\_\_ ; \_\_\_\_\_ .

二、（17 分）现有一个弹簧测力计（可随便找地方悬挂），一把匀质的长为  $l$  的有刻度、零点位于端点的直尺，一个木块及质量不计的细线。试用这些器件设计一实验装置（要求画出示意图），通过一次测量（弹簧测力计只准读一次数），求出木块的质量和尺的质量。（已知重力加速度为  $g$ ）

三、（18 分）内表面只反射而不吸收光的圆筒内有一半径为  $R$  的黑球，距球心为  $2R$  处有一点光源  $S$ ，球心  $O$  和光源  $S$  皆在圆筒轴线上，如图所示。若使点光源向右半边发出的光最后全被黑球吸收，则筒的内半径  $r$  最大为多少？



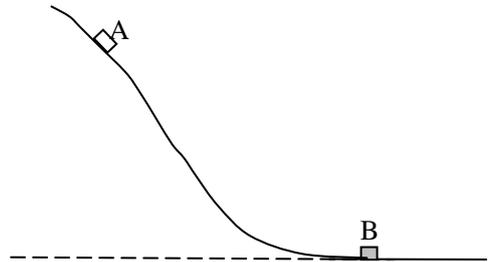
四、（20 分）处在激发态的氢原子向能量较低的状态跃迁时会发出一系列不同频率的光，称为氢光谱。氢光谱线的波长  $\lambda$  可以用下面的巴耳末—里德伯公式来表示

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

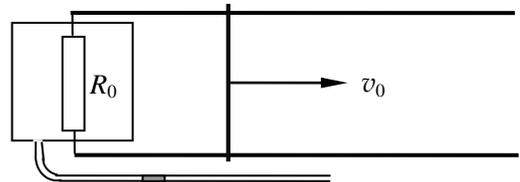
$n, k$  分别表示氢原子跃迁前后所处状态的量子数.  $k=1,2,3,\dots$ , 对于每一个  $k$ , 有  $n=k+1, k+2, k+3,\dots$ ,  $R$  称为里德伯常量, 是一个已知量. 对于  $k=1$  的一系列谱线其波长处在紫外线区, 称为赖曼系;  $k=2$  的一系列谱线其波长处在可见光区, 称为巴耳末系.

用氢原子发出的光照射某种金属进行光电效应实验, 当用赖曼系波长最长的光照射时, 遏止电压的大小为  $U_1$ , 当用巴耳末系波长最短的光照射时, 遏止电压的大小为  $U_2$ . 已知电子电量的大小为  $e$ , 真空中的光速为  $c$ , 试求: 普朗克常量和该种金属的逸出功.

五、(25分) 一质量为  $m$  的小滑块 A 沿斜坡由静止开始下滑, 与一质量为  $km$  的静止在水平地面上的小滑块 B 发生正碰撞, 如图所示. 设碰撞是弹性的, 且一切摩擦不计. 为使二者能且只能发生两次碰撞, 则  $k$  的值应满足什么条件?



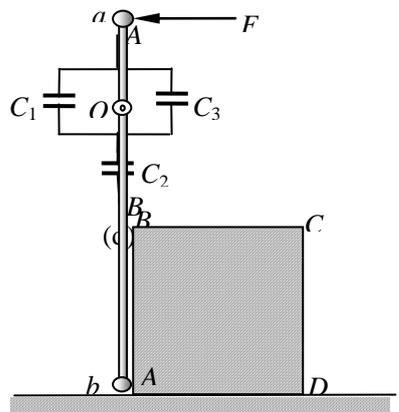
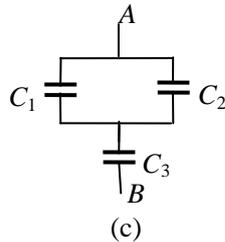
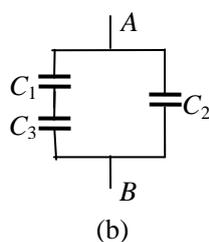
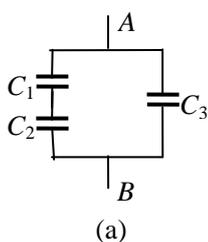
六、(25分) 如图所示, 两根位于同一水平面内的平行的直长金属导轨, 处于恒定磁场中, 磁场方向与导轨所在平面垂直. 一质量为  $m$  的均匀导体细杆, 放在导轨上, 并与导轨垂直, 可沿导轨无摩擦地滑动, 细杆与导轨的电阻均可忽略不计. 导轨的左端与一根阻值为  $R_0$  的电阻丝相连, 电阻丝置于一绝热容器中, 电阻丝的热容量不计. 容器与一水平放置的开口细管相通, 细管内有一截面积为  $S$  的小液柱 (质量



不计), 液柱将  $1\text{mol}$  气体 (可视为理想气体) 封闭在容器中. 已知温度升高  $1\text{K}$  时, 该气体的内能的增加量为  $5R/2$

( $R$  为普适气体常量), 大气压强为  $p_0$ , 现令细杆沿导轨方向以初速  $v_0$  向右运动, 试求达到平衡时细管中液柱的位移.

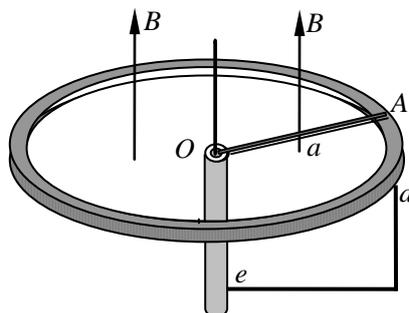
七、(25分) 三个电容器分别有不同的电容值  $C_1, C_2, C_3$ . 现把这三个电容器组成图示的(a)、(b)、(c)、(d)四种混联电路, 试论证: 是否可以通过适当选择  $C_1, C_2, C_3$  的数值, 使其中某两种混联电路 A、B 间的等效电容相等.



八、(30分)

如图所示，一根长为  $l$  的细刚性轻杆的两端分别连结小球  $a$  和  $b$ ，它们的质量分别为  $m_a$  和  $m_b$ 。杆可绕距  $a$  球为  $\frac{1}{4}l$  处的水平定轴  $O$  在竖直平面内转动。初始时杆处于竖直位置。小球  $b$  几乎接触桌面。在杆的右边水平桌面上，紧挨着细杆放着一个质量为  $m$  的立方体匀质物块，图中  $ABCD$  为过立方体中心且与细杆共面的截面。现用一水平恒力  $F$  作用于  $a$  球上，使之绕  $O$  轴逆时针转动，求当  $a$  转过  $\alpha$  角时小球  $b$  速度的大小。设在此过程中立方体物块没有发生转动，且小球  $b$  与立方体物块始终接触没有分离。不计一切摩擦。

九、(30 分) 如图所示，水平放置的金属细圆环半径为  $a$ ，竖直放置的金属细圆柱（其半径比  $a$  小得多）的端面与金属圆环的上表面在同一平面内，圆柱的细轴通过圆环的中心  $O$ 。一质量为  $m$ ，电阻为  $R$  的均匀导体细棒被圆环和细圆柱端面支撑，棒的一端有一小孔套在细轴  $O$  上，另一端  $A$  可绕轴线沿圆环作圆周运动，棒与圆环的摩擦系数为  $\mu$ 。圆环处于磁感应强度大小为  $B = Kr$ 、方向竖直向上的恒定磁场中，式中  $K$  为大于零的常量， $r$  为场点到轴线的距离。金属细圆柱与圆环用导线  $ed$  连接。不计棒与轴及与细圆柱端面的摩擦，也不计细圆柱、圆环及导线的电阻和感应电流产生的磁场。问沿垂直于棒的方向以多大的水平外力作用于棒的  $A$  端才能使棒以角速度  $\omega$  匀速转动。

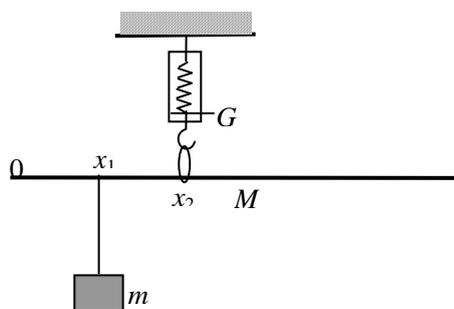


注： $(x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

第 22 届全国中学生物理竞赛预赛参考解答

一、  
 国际物理（或世界物理）。    相对论；光的量子性  
 评分标准：本题 10 分。第 1 小问 4 分。第 2 小问 6 分（填写任意两项爱因斯坦的成果只要正确都给 6 分）。

二、找个地方把弹簧测力计悬挂好，取一段细线做成一环，挂在弹簧测力计的挂钩上，让直尺穿在细环中，环与直尺的接触点就是直尺的悬挂点，它将尺分为长短不等的两段。用细线栓住木块挂在直尺较短的一段上，细心调节直尺悬挂点及木块悬挂点的位置，使直尺平衡在水平位置（为提高测量精度，尽量使二悬挂点相距远些），如图所示。设木块质量为  $m$ ，直尺质量为  $M$ 。记下二悬挂点在直尺上的读数  $x_1$ 、 $x_2$ ，弹簧测力计读数  $G$ 。由平衡条件和图中所设的直尺零刻度线的位置有



$$(m + M)g = G \quad (1)$$

$$mg(x_2 - x_1) = Mg\left(\frac{l}{2} - x_2\right) \quad (2)$$

(1)、(2)式联立可得

$$m = \frac{G(l - 2x_2)}{g(l - 2x_1)} \quad (3)$$

$$M = \frac{2G(x_2 - x_1)}{g(l - 2x_1)} \quad (4)$$

评分标准：本题 17 分。

正确画出装置示意图给 5 分。（1）式、（2）式各 4 分，（3）式、（4）式各 2 分。

三、

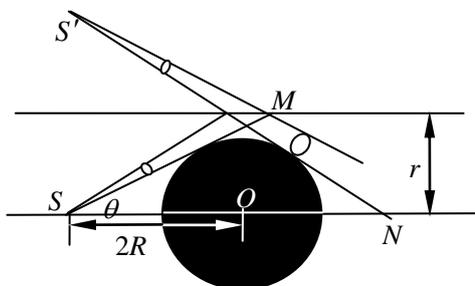


图 1

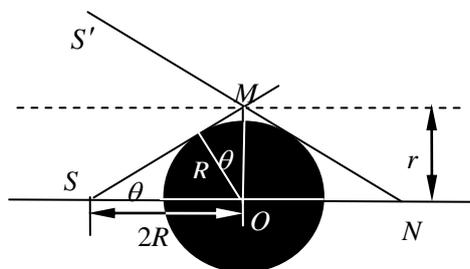


图 2

自  $S$  作球的切线  $SM$ ，并画出  $S$  经管壁反射形成的虚像点  $S'$ ，及由  $S'$  画出球面的切线  $S'N$ ，如图 1 所示，由图可看出，只要  $S'M$  和  $S'N$  之间有一夹角，则筒壁对从  $S$  向右的光线的反射光线就有一部分进入球的右方，不会完全落在球上被吸收。

由图可看出，如果  $r$  的大小恰能使  $S'N$  与  $S'M$  重合，如图 2，则  $r$  就是题所要求的筒的内半径的最大值。这时  $SM$  与  $MN$  的交点到球心的距离  $MO$  就是所要求的筒的半径  $r$ 。由图 2 可得

$$r = \frac{R}{\cos\theta} = \frac{R}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} \quad (1)$$

由几何关系可知

$$\sin \theta = (R/2R) \quad (2)$$

由 (1)、(2) 式得

$$r = \frac{2\sqrt{3}}{3} R \quad (3)$$

评分标准：本题 18 分。

给出必要的说明占 8 分，求出  $r$  占 10 分。

四、由巴耳末—里德伯公式

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

可知赖曼系波长最长的光是氢原子由  $n = 2 \rightarrow k = 1$  跃迁时发出的，其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3R}{4} \quad (1)$$

对应的光子能量为

$$E_{12} = hc \frac{1}{\lambda_{12}} = \frac{3Rhc}{4} \quad (2)$$

式中  $h$  为普朗克常量。巴耳末系波长最短的光是氢原子由  $n = \infty \rightarrow k = 2$  跃迁时发出的，其波长的倒数

$$\frac{1}{\lambda_{2\infty}} = \frac{R}{4} \quad (3)$$

对应的光子能量

$$E_{2\infty} = \frac{Rhc}{4} \quad (4)$$

用  $A$  表示该金属的逸出功，则  $eU_1$  和  $eU_2$  分别为光电子的最大初动能。由爱因斯坦光电效应方程得

$$\frac{3Rhc}{4} = eU_1 + A \quad (5)$$

$$\frac{Rhc}{4} = eU_2 + A \quad (6)$$

解得

$$A = \frac{e}{2}(U_1 - 3U_2) \quad (7)$$

$$h = \frac{2e(U_1 - U_2)}{Rc} \quad (8)$$

评分标准：本题 20 分。

(1)式 3 分，(2)式 2 分，(3)式 3 分，(4)式 2 分，(5)、(6)式各 3 分，(7)、(8)式各 2 分。

五、设 A 与 B 碰撞前 A 的速度为  $v_0$ ，碰后 A 与 B 的速度分别为  $v_1$  与  $V_1$ ，由动量守恒及机械能守恒定律有

$$mv_0 = mv_1 + kmV_1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kmV_1^2 \quad (2)$$

由此解得

$$v_1 = \frac{-(k-1)}{k+1}v_0 \quad (3)$$

$$V_1 = \frac{2}{k+1}v_0 \quad (4)$$

为使 A 能回到坡上, 要求  $v_1 < 0$ , 这导致  $k > 1$ ; 为使 A 从坡上滑下后再能追上 B, 应有  $-v_1 > V_1$ , 即  $(k-1) > 2$ , 这导致  $k > 3$ , 于是, 为使第二次碰撞能发生, 要求

$$k > 3 \quad (5)$$

对于第二次碰撞, 令  $v_2$  和  $V_2$  分别表示碰后 A 和 B 的速度, 同样由动量守恒及机械能守恒定律有:

$$m(-v_1) + kmV_1 = mv_2 + kmV_2$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kmV_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kmV_2^2$$

由此解得

$$v_2 = \frac{4k - (k-1)^2}{(k+1)^2}v_0 \quad (6)$$

$$V_2 = \frac{4(k-1)}{(k+1)^2}v_0 \quad (7)$$

若  $v_2 > 0$ , 则一定不会发生第三次碰撞, 若  $v_2 < 0$ , 且  $-v_2 > V_2$ , 则会发生第三次碰撞. 故为使第三次碰撞不会发生, 要求 A 第三次从坡上滑下后速度的大小  $(-v_2)$  不大于 B 速度的大小  $V_2$ , 即

$$-v_2 \leq V_2 \quad (8)$$

由(6)、(7)、(8)式得

$$k^2 - 10k + 5 \leq 0 \quad (9)$$

由

$$k^2 - 10k + 5 = 0$$

可求得

$$k = \frac{10 \pm \sqrt{80}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}$$

(9)式的解为

$$5 - 2\sqrt{5} \leq k \leq 5 + 2\sqrt{5} \quad (10)$$

(10)与(5)的交集即为所求:

$$3 < k \leq 5 + 2\sqrt{5} \quad (11)$$

评分标准: 本题 25 分.

求得(3)、(4)式各得 3 分, 求得(5)式得 4 分, 求得(6)、(7)、(8)、(10)和(11)式各得 3 分.

六、导体细杆运动时, 切割磁感应线, 在回路中产生感应电动势与感应电流, 细杆将受到安培力的作用, 安培

力的方向与细杆的运动方向相反，使细杆减速，随着速度的减小，感应电流和安培力也减小，最后杆将停止运动，感应电流消失。在运动过程中，电阻丝上产生的焦耳热，全部被容器中的气体吸收。

根据能量守恒定律可知，杆从  $v_0$  减速至停止运动的过程中，电阻丝上的焦耳热  $Q$  应等于杆的初动能，即

$$Q = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (1)$$

容器中的气体吸收此热量后，设其温度升高  $\Delta T$ ，则内能的增加量为

$$\Delta U = \frac{5}{2}R\Delta T \quad (2)$$

在温度升高  $\Delta T$  的同时，气体体积膨胀，推动液柱克服大气压力做功。设液柱的位移为  $\Delta l$ ，则气体对外做功

$$A = p_0S\Delta l \quad (3)$$

$S\Delta l$  就是气体体积的膨胀量

$$\Delta V = S\Delta l \quad (4)$$

由理想气体状态方程  $pV = RT$ ，注意到气体的压强始终等于大气压  $p_0$ ，故有

$$p_0\Delta V = R\Delta T \quad (5)$$

由热力学第一定律

$$Q = A + \Delta U \quad (6)$$

由以上各式可解得

$$\Delta l = \frac{mv_0^2}{7p_0S} \quad (7)$$

评分标准：本题 25 分。

(1) 式 6 分，(2) 式 4 分，(3)、(4)、(5) 式各 2 分，(6) 式 5 分，(7) 式 4 分。

七、由电容  $C'$ 、 $C''$  组成的串联电路的等效电容

$$C_{\text{串}} = \frac{C'C''}{C' + C''}$$

由电容  $C'$ 、 $C''$  组成的并联电路的等效电容

$$C_{\text{并}} = C' + C''$$

利用此二公式可求得图示的 4 个混联电路 A、B 间的等效电容  $C_a$ 、 $C_b$ 、 $C_c$ 、 $C_d$  分别为

$$C_a = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} + C_3 = \frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_1 + C_2} > C_3 \quad (1)$$

$$C_b = \frac{C_1C_3}{C_1 + C_3} + C_2 = \frac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_1 + C_3} > C_2 \quad (2)$$

$$C_c = \frac{(C_1 + C_2)C_3}{(C_1 + C_2) + C_3} = \frac{C_1C_3 + C_2C_3}{C_1 + C_2 + C_3} < C_3 \quad (3)$$

$$C_d = \frac{(C_1 + C_3)C_2}{(C_1 + C_3) + C_2} = \frac{C_1C_2 + C_2C_3}{C_1 + C_2 + C_3} < C_2 \quad (4)$$

由 (1)、(3) 式可知

$$C_a \neq C_c \quad (5)$$

由 (2)、(4) 式可知

$$C_b \neq C_d \quad (6)$$

由 (1)、(2) 式可知

$$C_a \neq C_b \quad (7)$$

由 (3)、(4) 式可知

$$C_c \neq C_d \quad (8)$$

若  $C_a = C_d$ ，由 (1)、(4) 式可得

$$C_1^2 + 2C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3 = 0$$

因为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  均大于 0，上式不可能成立，因此

$$C_a \neq C_d \quad (9)$$

若  $C_b = C_c$ ，由 (2)、(3) 式可得

$$C_1^2 + 2C_1C_3 + C_1C_2 + C_2C_3 = 0$$

因为  $C_1$ 、 $C_2$  和  $C_3$  均大于 0，上式不可能成立，因此

$$C_b \neq C_c \quad (10)$$

综合以上分析，可知这四个混联电路的等效电容没有一对是相等的。

评分标准：本题 25 分。

(1)、(2)、(3)、(4) 式各 4 分，得到 (5)、(6)、(7)、(8) 式各 1 分，得到 (9)、(10) 式共 5 分。

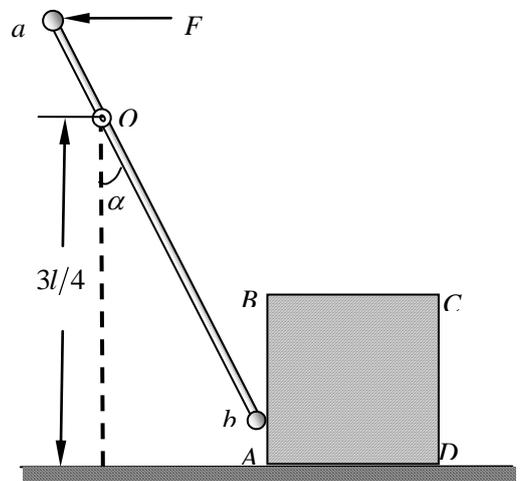
八、如图所示，用  $v_b$  表示  $a$  转过  $\alpha$  角时  $b$  球速度的大小， $v$  表示此时立方体速度的大小，则有

$$v_b \cos \alpha = v \quad (1)$$

由于  $b$  与正立方体的接触是光滑的，相互作用力总是沿水平方向，而且两者在水平方向的位移相同，因此相互作用的作用力和反作用力做功大小相同，符号相反，做功的总和为 0。因此在整个过程中推力  $F$  所做的功应等于球  $a$ 、 $b$  和正立方体机械能的增量。现用  $v_a$  表示此时  $a$  球速度的大小，因为  $a$ 、 $b$  角

速度相同， $Oa = \frac{1}{4}l$ ， $Ob = \frac{3}{4}l$ ，所以得

$$v_a = \frac{1}{3}v_b \quad (2)$$



根据功能原理可知

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_a v_a^2 - m_a g \left( \frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left( \frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m v^2 \quad (3)$$

将 (1)、(2) 式代入可得

$$F \cdot \frac{l}{4} \sin \alpha = \frac{1}{2} m_a \left( \frac{1}{3} v_b \right)^2 - m_a g \left( \frac{l}{4} - \frac{l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m_b v_b^2 + m_b g \left( \frac{3l}{4} - \frac{3l}{4} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} m (v_b \cos \alpha)^2$$

解得

$$v_b = \sqrt{\frac{9l[F \sin \alpha + (m_a - 3m_b)g(1 - \cos \alpha)]}{2m_a + 18m_b + 18m \cos^2 \alpha}} \quad (4)$$

评分标准：本题 30 分。

(1) 式 7 分，(2) 式 5 分，(3) 式 15 分，(4) 式 3 分。

九、将整个导体棒分割成  $n$  个小线元，小线元端到轴线的距离分别为  $r_0 (=0)$ ,  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\dots$ ,  $r_{i-1}$ ,  $r_i$ ,  $\dots$ ,  $r_{n-1}$ ,  $r_n (=a)$ ，第  $i$  个线元的长度为  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ，当  $\Delta r_i$  很小时，可以认为该线元上各点的速度都为  $v_i = \omega r_i$ ，该线元因切割磁感应线而产生的电动势为

$$\Delta E_i = B v_i \Delta r_i = K r_i \omega r_i \Delta r_i = K \omega r_i^2 \Delta r_i \quad (1)$$

整个棒上的电动势为

$$E = \sum_{i=1}^n \Delta E_i = K \omega \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i \quad (2)$$

由  $(r + \Delta r)^3 = r^3 + 3r^2 \Delta r + 3r(\Delta r)^2 + (\Delta r)^3$ ,

略去高阶小量  $(\Delta r)^2$  及  $(\Delta r)^3$ ，可得

$$r^2 \Delta r = \frac{1}{3} [(r + \Delta r)^3 - r^3]$$

代入(2)式，得

$$E = \frac{1}{3} K \omega \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3) = \frac{1}{3} K \omega [(r_n^3 - r_0^3) + (r_{n-1}^3 - r_{n-2}^3) + \dots + (r_2^3 - r_1^3)] = \frac{1}{3} K \omega a^3 \quad (3)$$

由全电路欧姆定律，导体棒通过的电流为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{K \omega a^3}{3R} \quad (4)$$

导体棒受到的安培力方向与棒的运动方向相反。

第  $i$  个线元  $\Delta r_i$  受到的安培力为

$$\Delta f_{Ai} = B I \Delta r_i = K r_i I \Delta r_i \quad (5)$$

作用于该线元的安培力对轴线的力矩

$$\Delta M_i = \Delta f_{Ai} \cdot r_i = K I r_i^2 \Delta r_i$$

作用于棒上各线元的安培力对轴线的总力矩为

$$M = \sum_{i=1}^n \Delta M_i = KI \sum_{i=1}^n r_i^2 \Delta r_i = \frac{1}{3} KI \sum_{i=1}^n (r_i^3 - r_{i-1}^3) = \frac{1}{3} KI a^3$$

即

$$M = \frac{K^2 \omega a^6}{9R} \quad (6)$$

因棒  $A$  端对导体圆环的正压力为  $\frac{1}{2}mg$ ，所以摩擦力为  $\frac{1}{2}\mu mg$ ，对轴的摩擦力矩为

$$M_\mu = \frac{1}{2}\mu m g a \quad (7)$$

其方向与安培力矩相同，均为阻力矩。为使棒在水平面内作匀角速转动，要求棒对于  $O$  轴所受的合力矩为零，即外力矩与阻力矩相等，设在  $A$  点施加垂直于棒的外力为  $f$ ，则有

$$fa = M + M_\mu \quad (8)$$

由(6)、(7)、(8)式得

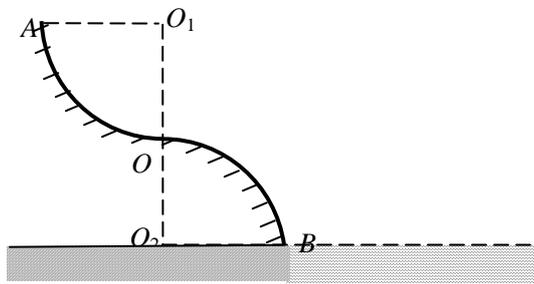
$$f = \frac{K^2 \omega a^5}{9R} + \frac{1}{2}\mu mg \quad (9)$$

评分标准：本题 30 分。

求得(3)式得 10 分，(4)式 2 分；求得(6)式得 8 分，(7)式 4 分，(8)式 4 分，(9)式 2 分。

### 第 22 届全国中学生物理竞赛复赛题

一、图中的  $AOB$  是游乐场中的滑道模型，它位于竖直平面内，由两个半径都是  $R$  的  $1/4$  圆周连接而成，它们的圆心  $O_1$ 、 $O_2$  与两圆弧的连接点  $O$  在同一竖直线上。 $O_2B$  沿水池的水面。一小滑块可由弧  $AO$  的任意点从静止开始下滑。

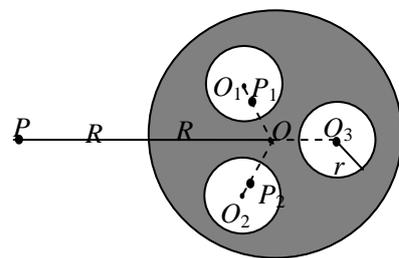


1. 若小滑块从开始下滑到脱离滑道过程中，在两个圆弧上滑过的弧长相等，则小滑块开始下滑时应在圆弧  $AO$  上的何处？（用该处到  $O_1$  的连线与竖直线的夹角表示）。

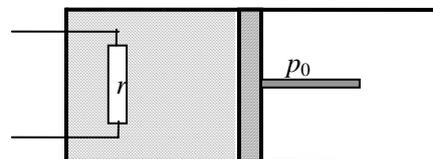
2. 凡能在  $O$  点脱离滑道的小滑块，其落水点到  $O_2$  的距离如何？

二、如图所示， $O$  为半径等于  $R$  的原来不带电的导体球的球心， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$  为位于球内的三个半径皆为  $r$  的球形空腔的球心，它们与  $O$  共面，已知  $\overline{OO_1} = \overline{OO_2} = \overline{OO_3} = \frac{R}{2}$ 。在  $OO_1$ 、 $OO_2$  的连线上距  $O_1$ 、 $O_2$  为  $\frac{r}{2}$  的  $P_1$ 、 $P_2$  点处分别放置带电量为  $q_1$  和  $q_2$  的线度很小的导体（视为点电荷），在  $O_3$  处放置一带电量为  $q_3$  的点电荷，设法使  $q_1$ 、 $q_2$  和  $q_3$  固定不动。在导体球外的  $P$  点放一个电量为  $Q$  的点电荷， $P$  点与  $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$  共面，位于  $\overline{O_3O}$  的延长线上，到  $O$  的距离  $\overline{OP} = 2R$ 。

1. 求  $q_3$  的电势能。
2. 将带有电量  $q_1$ 、 $q_2$  的小导体释放，当重新达到静电平衡时，各表面上的电荷分布有何变化？此时  $q_3$  的电势能为多少？



三、(22 分) 如图所示，水平放置的横截面积为  $S$  的带有活塞的圆筒形绝热容器中盛有  $1\text{mol}$  的理想气体。其内能  $U = CT$ ， $C$  为已知常量， $T$  为热力学温度。器壁和活塞之间不漏气且存在摩擦，最大静摩擦力与滑动摩擦力相等且皆为  $F$ 。图中  $r$  为电阻丝，通电时可对气

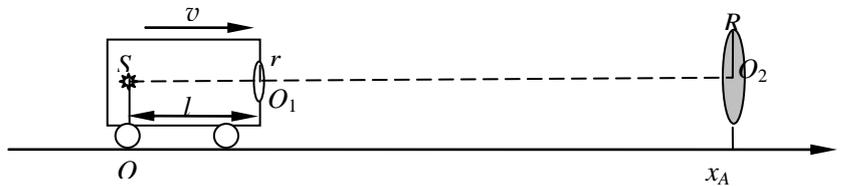


体缓慢加热。起始时，气体压强与外界大气压强  $p_0$  相等，气体的温度为  $T_0$ 。现开始对  $r$  通电，已知当活塞运动时克服摩擦力做功所产生热量的一半被容器中的气体吸收。若用  $Q$  表示气体从电阻丝吸收的热量， $T$  表示气体的温度，试以  $T$  为纵坐标， $Q$  为横坐标，画出在  $Q$  不断增加的过程中  $T$  和  $Q$  的关系图线。并在图中用题给的已知量及普适气体常量  $R$  标出反映图线特征的各量（不要求写出推导过程）。

四、(23 分) 封闭的车厢中有一点光源  $S$ ，在距光源  $l$  处有一半径为  $r$  的圆孔，其圆心为  $O_1$ ，光源一直在发光，并通过圆孔射出。车厢以高速  $v$  沿固定在水平地面上的  $x$  轴正方向匀速运动，如图所示。某一时刻，点光源  $S$  恰位于  $x$  轴的原点  $O$  的正上方，取此时刻作为车厢参考系与地面参考系的时间零点。在地面参考系中坐标为  $x_A$  处放一半径为  $R$  ( $R > r$ ) 的不透光的圆形挡板，板面与圆孔所在的平面都与  $x$  轴垂直。板的圆心  $O_2$ 、 $S$ 、 $O_1$  都等高，起始时刻经圆孔射出的光束会有部分从挡板周围射到挡板后面的大屏幕（图中未画出）上。由于车

厢在运动，将会出现挡板将光束完全遮住，即没有光射到屏上的情况。不考虑光的衍射。试求：

1. 车厢参考系中（所测出的）刚出现这种情况的时刻。
2. 地面参考系中（所测出的）刚出现这种情况的时刻。

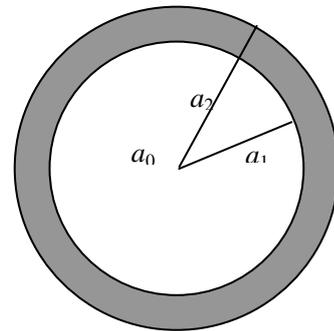


五、（25分）一个用绝缘材料制成的扁平薄圆环，其内、外半径分别为  $a_1$ 、 $a_2$ ，厚度可以忽略。两个表面都带有电荷，电荷面密度  $\sigma$  随离开环心距离  $r$  变化的规律均为  $\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2}$ ， $\sigma_0$  为已知常量。薄圆环绕通过环心垂直环面的轴以大小不变的角加速度  $\beta$  减速转动， $t = 0$  时刻的角速度为  $\omega_0$ 。将一半径为  $a_0$  ( $a_0 \ll a_1$ )、电阻为  $R$  并与薄圆环共面的导线圆环与薄圆环同心放置。

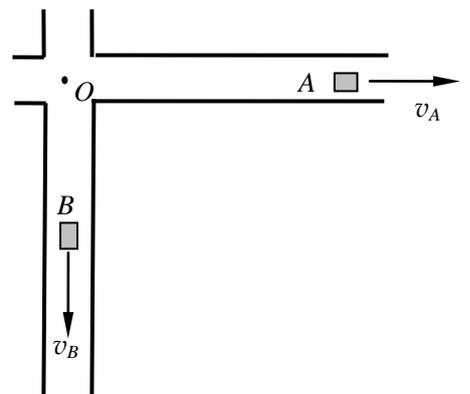
试求在薄圆环减速运动过程中导线圆环中的张力  $F$  与时间  $t$  的关系。

提示：半径为  $r$ 、通有电流  $I$  的圆线圈（环形电流），在圆心处应强度为  $B = k \frac{I}{r}$ （ $k$  为已知常量）

产生的磁感

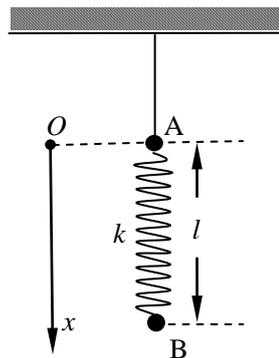


六、（25分）两辆汽车 A 与 B，在  $t = 0$  时从十字路口  $O$  处分别以速度  $v_A$  和  $v_B$  沿水平的、相互正交的公路匀速前进，如图所示。汽车 A 持续地以固定的频率  $\nu_0$  鸣笛，求在任意时刻  $t$  汽车 B 的司机所检测到的笛声频率。已知声速为  $u$ ，且当然有  $u > v_A$ 、 $v_B$ 。



七、（25分）如图所示，在一个劲度系数为  $k$  的轻质弹簧两端分别拴着一个质量为  $m$  的小球 A 和质量

为  $2m$  的小球 B. A 用细线拴住悬挂起来, 系统处于静止状态, 此时弹簧长度为  $l$ . 现将细线烧断, 并以此时为计时零点, 取一相对地面静止的、竖直向下为正方向的坐标轴  $Ox$ , 原点  $O$  与此时 A 球的位置重合如图. 试求任意时刻两球的坐标.



第 22 届全国中学生物理竞赛复赛题参考解答

一、1. 如图所示, 设滑块出发点为  $P_1$ , 离开点为  $P_2$ , 按题意要求  $O_1P_1$ 、 $O_2P_2$  与竖直方向的夹角相等, 设其为  $\theta$ , 若离开滑道时的速度为  $v$ , 则滑块在  $P_2$  处脱离滑道的条件是

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \theta \quad (1)$$

由机械能守恒

$$2mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

(1)、(2) 联立解得

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

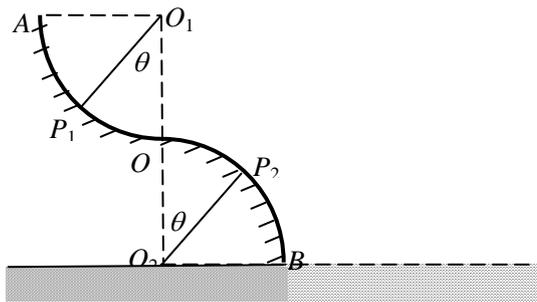
或  $\theta = \arccos \frac{4}{5} = 36^\circ 52'$  (3)

2. 设滑块刚能在  $O$  点离开滑道的条件是

$$\frac{mv_0^2}{R} = mg \quad (4)$$

$v_0$  为滑块到达  $O$  点的速度, 由此得

$$v_0 = \sqrt{Rg} \quad (5)$$



设到达  $O$  点的速度为  $v_0$  的滑块在滑道  $OA$  上的出发点到  $O_1$  的连线与竖直的夹角为  $\theta_0$ ，由机械能守恒，有

$$mgR(1 - \cos\theta_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (6)$$

由 (5)、(6) 两式解得

$$\theta_0 = \frac{\pi}{3} \quad (7)$$

若滑块到达  $O$  点时的速度  $v > v_0$ ，则对  $OB$  滑道来说，因  $O$  点可能提供的最大向心力为  $mg$ ，故滑块将沿半径比  $R$  大的圆周的切线方向离开  $O$  点。对于  $v > v_0$  的滑块，其在  $OA$  上出发点的位置对应的  $\theta$  角必大于  $\theta_0$ ，即  $\theta > \theta_0$ ，由于  $\theta_{max} = \pi/2$ ，根据机械能守恒，到达  $O$  点的最大速度

$$v_{max} = \sqrt{2Rg} \quad (8)$$

由此可知，能从  $O$  点离开滑道的滑块速度是  $v_0$  到  $v_{max}$  之间所有可能的值，也就是说， $\theta$  从  $\pi/3$  至  $\pi/2$  下滑的滑块都将在  $O$  点离开滑道。以速度  $v_0$  从  $O$  点沿水平方向滑出滑道的滑块，其落水点至  $O_2$  的距离

$$x_0 = v_0 t \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{2}gt^2 \quad (10)$$

由 (5)、(9)、(10) 式得

$$x_0 = \sqrt{2}R \quad (11)$$

当滑块以  $v_{max}$  从  $O$  点沿水平方向滑出滑道时，其落水点到  $O_2$  的距离

$$x_{max} = v_{max} t \quad (12)$$

由 (8)、(10)、(12) 式得

$$x_{max} = 2R \quad (13)$$

因此，凡能从  $O$  点脱离滑道的滑块，其落水点到  $O_2$  的距离在  $\sqrt{2}R$  到  $2R$  之间的所有可能值。即

$$\sqrt{2}R \leq x \leq 2R \quad (14)$$

二、1. 由静电感应知空腔 1、2 及 3 的表面分别出现电量为  $-q_1$ 、 $-q_2$  和  $-q_3$  的面电荷，由电荷守恒定律可知，在导体球的外表面呈现出电量  $q_1 + q_2 + q_3$ 。由静电屏蔽可知，点电荷  $q_1$  及感应电荷  $(-q_1)$  在空腔外产生的电场为零；点电荷  $q_2$  及感应电荷  $(-q_2)$  在空腔外产生的电场为零；点电荷  $q_3$  及感应电荷  $(-q_3)$  在空腔外产生的电场为零。因此，在导体球外没有电荷时，球表面的电量  $q_1 + q_2 + q_3$  作球对称分布。

当球外  $P$  点处放置电荷  $Q$  后，由于静电感应，球面上的总电量仍为  $(q_1 + q_2 + q_3)$ ，但这些电荷在球面上不再均匀分布，由球外的  $Q$  和重新分布在球面上的电荷在导体球内各点产生的合场强为零。

$O_3$  处的电势由位于  $P$  点处的  $Q$ 、导体球表面的电荷  $(q_1 + q_2 + q_3)$  及空腔 3 表面的感应电荷  $(-q_3)$  共同产生。无论  $(q_1 + q_2 + q_3)$  在球面上如何分布，球面上的面电荷到  $O$  点的距离都是  $R$ ，因而在  $O$  点产生的电势为  $k \frac{q_1 + q_2 + q_3}{R}$ ， $Q$  在  $O$  点产生的电势为  $k \frac{Q}{2R}$ ，这两部分电荷在  $O_3$  点产生的电势  $U'$  与它们在  $O$  点产生的电势相等，即有

$$U' = k \left( \frac{q_1 + q_2 + q_3}{R} + \frac{Q}{2R} \right) = k \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} \right) \quad (1)$$

因  $q_3$  放在空腔 3 的中心处，其感应电荷  $-q_3$  在空腔 3 壁上均匀分布。这些电荷在  $O_3$  点产生的电势为

$$U'' = k \frac{-q_3}{r} \quad (2)$$

根据电势叠加定理， $O_3$  点的电势为

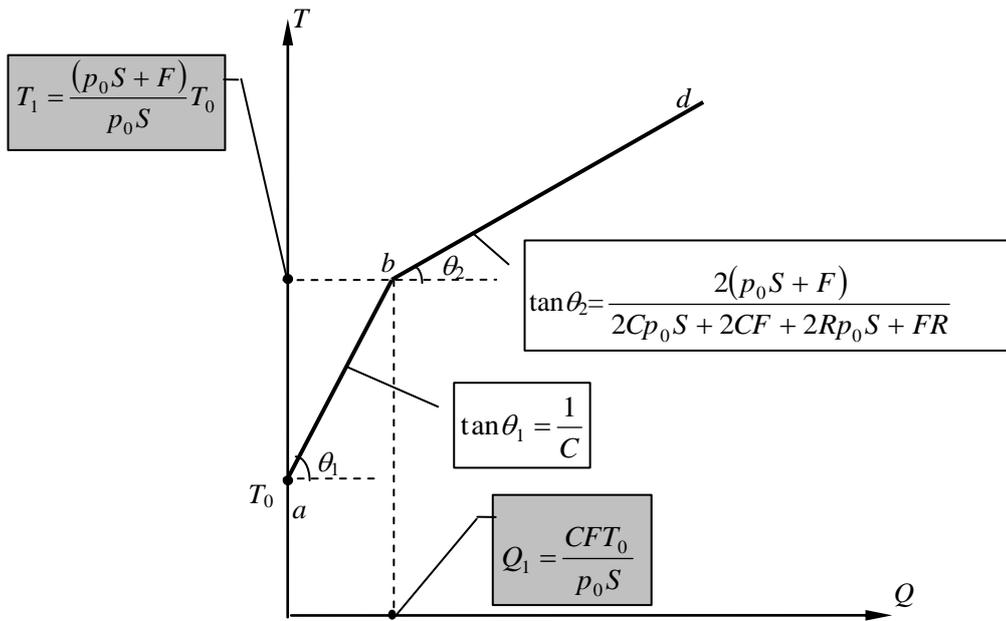
$$U = U' + U'' = k \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r} \right) \quad (3)$$

故  $q_3$  的电势能

$$W = q_3 U = k q_3 \left( \frac{Q + 2q_1 + 2q_2 + 2q_3}{2R} - \frac{q_3}{r} \right) \quad (4)$$

2. 由于静电屏蔽，空腔 1 外所有电荷在空腔 1 内产生的合电场为零，空腔 1 内的电荷  $q_1$  仅受到腔内壁感应电荷  $-q_1$  的静电力作用，因  $q_1$  不在空腔 1 的中心  $O_1$  点，所以感应电荷  $-q_1$  在空腔表面分布不均匀，与  $q_1$  相距较近的区域电荷面密度较大，对  $q_1$  的吸力较大，在空腔表面感应电荷的静电力作用下， $q_1$  最后到达空腔 1 表面，与感应电荷  $-q_1$  中和。同理，空腔 2 中  $q_2$  也将在空腔表面感应电荷  $-q_2$  的静电力作用下到达空腔 2 的表面与感应电荷  $-q_2$  中和。达到平衡后，腔 1、2 表面上无电荷分布，腔 3 表面和导体球外表面的电荷分布没有变化。 $O_3$  的电势仍由球外的电荷  $Q$  和导体球外表面的电量  $(q_1 + q_2 + q_3)$  及空腔 3 内壁的电荷  $-q_3$  共同产生，故  $O_3$  处的电势  $U$  与  $q_3$  的电势能  $W$  仍如(3)式与(4)式所示。

三、答案如图所示。



附计算过程：

电阻通电后对气体缓慢加热，气体的温度升高，压强增大，活塞开始有向外运动的趋势，但在气体对活塞的作用力尚未达到外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和以前，活塞不动，即该过程为等容过程。因气体对外不做功，根据热力学第一定律可知，在气体温度从  $T_0$  升高到  $T$  的过程中，气体从电阻丝吸收的热量，

$$Q = C(T - T_0) \quad (1)$$

此过程将持续到气体对活塞的作用力等于外界大气对活塞的作用力和器壁对活塞的最大静摩擦之和。若用  $T_1$  表示此过程达到末态的温度， $p$  表示末态的压强， $Q_1$  表示此过程中气体从电阻丝吸收的热量，由等容过程方程有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{T_1}{T_0} \quad (2)$$

由力的平衡可知

$$pS = p_0 S + F \quad (3)$$

由 (2)、(3) 两式可得

$$T_1 = \frac{(p_0 S + F)T_0}{p_0 S} \quad (4)$$

代入(1)式得

$$Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S} \quad (5)$$

由以上讨论可知, 当  $Q \leq Q_1$  时,  $T$  与  $Q$  的关系为

$$T = \frac{Q}{C} + T_0 \quad (6)$$

在  $T \sim Q$  图中为一直线如图中  $ab$  所示, 其斜率

$$K_{ab} = \frac{1}{C} \quad (7)$$

直线在  $T$  轴上的截距等于  $T_0$ , 直线  $ab$  的终点  $b$  的坐标为  $(T_1, Q_1)$  .

当电阻丝继续加热, 活塞开始向外运动以后, 因为过程是缓慢的, 外界大气压及摩擦力皆不变, 所以气体的压强不变, 仍是  $p$ , 气体经历的过程为等压过程. 在气体的体积从初始体积  $V_0$  增大到  $V$ , 温度由  $T_1$  升高到  $T$  的过程中, 设气体从电阻丝吸收的热量为  $Q'$ , 活塞运动过程中与器壁摩擦生热的一半热量为  $q$ , 由热力学第一定律可知

$$Q' + q = C(T - T_1) + p(V - V_0) \quad (8)$$

$q$  可由摩擦力做功求得, 即

$$q = \frac{1}{2} F \left( \frac{V - V_0}{S} \right) \quad (9)$$

代入 (8) 式得

$$Q' + \frac{F(V - V_0)}{2S} = C(T - T_1) + p(V - V_0) \quad (10)$$

由状态方程式可知

$$p(V - V_0) = R(T - T_1) \quad (11)$$

将 (11) 式和 (4) 式代入 (10) 式, 得

$$Q' = \left( C + R - \frac{FR}{2(p_0S + F)} \right) (T - T_1)$$

即

$$T = \frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} Q' + T_1 \quad (12)$$

从开始对气体加热到气体温度升高到  $T (> T_1)$  的过程中，气体从电阻丝吸收的总热量

$$Q = Q_1 + Q' \quad (13)$$

把 (13) 式代入到 (12) 式，并注意到 (4) 式和 (5)，得

$$T = \frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} \left( Q - \frac{CFT_0}{p_0S} \right) + \frac{(p_0S + F)T_0}{p_0S} \quad \left( Q \geq Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S} \right) \quad (14)$$

由此可知，当  $Q \geq Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S}$  时， $T$  与  $Q$  的关系仍为一直线，此直线起点的坐标为  $Q = Q_1 = \frac{CFT_0}{p_0S}$ ， $T = T_1$ ；斜

率为

$$\frac{2(p_0S + F)}{2Cp_0S + 2CF + 2Rp_0S + FR} \quad (15)$$

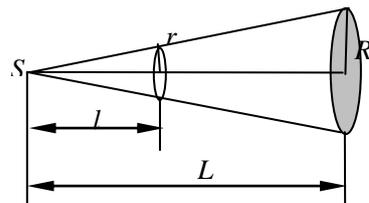
在  $T \sim Q$  图中，就是直线  $bd$ ，当热量  $Q$  从零开始逐渐增大，气体温度  $T$  将从起始温度  $T_0$  沿着斜率为  $K_{ab}$  的直线  $ab$  上升到温度为  $T_1$  的  $b$  点，然后沿着斜率为  $K_{bd}$  的直线  $bd$  上升，如图所示。

四、1. 相对于车厢参考系，地面连同挡板以速度  $v$  趋向光源  $S$  运动。由  $S$  发出的光经小孔射出后成锥形光束，随离开光源距离的增大，其横截面积逐渐扩大。若距  $S$  的距离为  $L$  处光束的横截面正好是半径为  $R$  的圆面，如图所示，

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{L}$$

可得

$$L = \frac{Rl}{r} \quad (1)$$



设想车厢足够长，并设想在车厢前端距  $S$  为  $L$  处放置一个半径为  $R$  的环，相对车厢静止，则光束恰好从环内射出。当挡板运动到与此环相遇时，挡板就会将光束完全遮住。此时，在车厢参考系中挡板离光源  $S$  的距离

就是  $L$ 。在车厢参考系中，初始时，根据相对论，挡板离光源的距离为

$$x_A \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (2)$$

故出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - (v/c)^2} - L}{v} \quad (3)$$

由 (1)、(3) 式得

$$t = \frac{x_A \sqrt{1 - (v/c)^2}}{v} - \frac{Rl}{rv} \quad (4)$$

2. 相对于地面参考系，光源与车厢以速度  $v$  向挡板运动。光源与孔之间的距离缩短为

$$l' = l \sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (5)$$

而孔半径  $r$  不变，所以锥形光束的顶角变大，环到  $S$  的距离即挡板完全遮光时距离应为

$$L' = \frac{Rl'}{r} = \frac{Rl}{r} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (6)$$

初始时，挡板离  $S$  的距离为  $x_A$ ，出现挡板完全遮住光束的时刻为

$$t' = \frac{x_A - L'}{v} = \frac{x_A}{v} - \frac{Rl}{rv} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (7)$$

五、用半径分别为  $r_1 (>a_1)$ ,  $r_2, \dots, r_i, \dots, r_{n-1} (<a_2)$  的  $n-1$  个同心圆把塑料薄圆环分割成  $n$  个细圆环。第

$i$  个细圆环的宽度为  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ，其环带面积

$$\Delta S_i = \pi r_i^2 - \pi (r_i - \Delta r_i)^2 = 2\pi r_i \Delta r_i$$

式中已略去高阶小量  $(\Delta r_i)^2$ 。该细圆环带上、下表面所带电荷量之和为

$$\Delta q_i = 2\sigma \Delta S_i = \frac{2\sigma_0}{r_i^2} 2\pi r_i \Delta r_i = \frac{4\pi \sigma_0 \Delta r_i}{r_i}$$

设时刻  $t$ ，细圆环转动的角速度为  $\omega$ ，

$$\omega = \omega_0 - \beta t$$

单位时间内，通过它的“横截面”的电荷量，即为电流

$$\Delta I_i = \Delta q_i \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\omega \sigma_0 \Delta r_i}{r_i}$$

由环形电流产生磁场的规律，该细圆环的电流在环心产生的磁感应强度为

$$\Delta B_i = k \frac{\Delta I_i}{r_i} = k \frac{2\omega\sigma_0\Delta r_i}{r_i^2} \quad (1)$$

式中  $\Delta r_i$  是一个微小量，注意到  $r_i r_{i-1} = r_i(r_i - \Delta r_i) \approx r_i^2$ ，有

$$\frac{\Delta r_i}{r_i^2} = \frac{r_i - r_{i-1}}{r_i r_{i-1}} = \frac{1}{r_{i-1}} - \frac{1}{r_i} \quad (2)$$

将各细圆环产生的磁场叠加，由 (1)、(2) 式得出环心  $O$  点处的磁感应强度：

$$B = \frac{2k\omega\sigma_0(a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \quad (3)$$

由于  $a_0 \ll a_1$ ，可以认为在导线圆环所在小区域的磁场是匀强磁场，可由  $O$  点的场表示。磁场对导线环的磁通量

$$\Phi = BS = \frac{2k\omega\sigma_0(a_2 - a_1)}{a_1 a_2} \pi a_0^2 \quad (4)$$

由于  $\omega$  是变化的，所以上述磁通量是随时间变化的，产生的感应电动势的大小为

$$E = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2}{a_1 a_2} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right| = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2} \quad (5)$$

由全电路欧姆定律可知，导线环内感应电流的大小为

$$I = \frac{E}{R} = \frac{2k\sigma_0(a_2 - a_1)\pi a_0^2 \beta}{a_1 a_2 R} \quad (6)$$

设题图中薄圆环带正电作逆时针旋转，穿过导线圆环的磁场方向垂直纸面向外，由于薄圆环作减角速转动，穿过导线圆环的磁场逐渐减小，根据楞次定律，导线圆环中的感应电流亦为逆时针方向，导线圆环各元段  $\Delta l$  所受的安培力都沿环半径向外。现取对于  $y$  轴两对称点  $U$ 、 $V$ ，对应的二段电流元  $I\Delta l$  所受的安培力的大小为

$$\Delta f = BI\Delta l \quad (7)$$

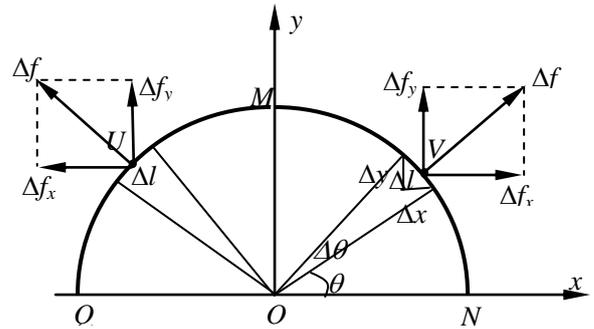
方向如图所示，它沿  $x$  及  $y$  方向分量分别

$$\Delta f_x = BI\Delta l \cdot \cos\theta = BI\Delta y \quad (8)$$

$$\Delta f_y = BI\Delta l \cdot \sin\theta = BI\Delta x \quad (9)$$

根据对称性，作用于沿半个导线圆环  $QMN$  上的各电流元的安培力的  $x$  分量之和相互抵消，即

$$f_x = \sum BI\Delta y = BI \sum \Delta y = 0 \quad (10)$$



(式中  $\Delta y = \Delta l \cos \theta$ , 当  $\theta < \frac{\pi}{2}$  时,  $\Delta y$  是正的, 当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时,  $\Delta y$  是负的, 故  $\sum \Delta y = 0$ ),

而作用于沿半个导线圆环  $QMN$  上的各电流元的安培力的  $y$  分量之和为

$$f_y = \sum BI \Delta x = BI \sum \Delta x = BI 2a_0 \quad (11)$$

(式中  $\Delta x = \Delta l \sin \theta$ , 由于  $\theta$  在  $0 \sim \pi$  之间  $\Delta x$  都是正的, 故  $\sum \Delta x = 2a_0$ ),

即半个导线圆环上受的总安培力的大小为  $BI 2a_0$ , 方向沿  $y$  正方向, 由于半个圆环处于平衡状态, 所以在导线截面  $Q$ 、 $N$  处所受 (来自另外半个圆环) 的拉力 (即张力)  $F$  应满足  $2F = BI 2a_0$ . 由 (3)、(6) 两式得

$$F = BI a_0 = \frac{4k^2 \sigma_0^2 \pi a_0^3 (a_2 - a_1)^2 \beta}{a_1^2 a_2^2 R} (\omega_0 - \beta t) \quad (12)$$

由 (12) 式可见, 张力  $F$  随时间  $t$  线性减小.

六、如图所示,  $t$  时刻汽车  $B$  位于  $B(t)$  处, 距  $O$  点的距离为  $v_B t$ . 此时传播到汽车  $B$  的笛声不是  $t$  时刻而是较早时刻  $t_1$  由  $A$  车发出的. 汽车  $A$  发出此笛声时位于  $A(t_1)$  处, 距  $O$  点的距离为  $v_A t_1$ . 此笛声由发出点到接收点 ( $t$  时刻  $B$  车所在点) 所传播的路程为  $u(t - t_1)$ , 由几何关系可知

$$(v_B t)^2 + (v_A t_1)^2 = [u(t - t_1)]^2 \quad (1)$$

$$\text{即 } (u^2 - v_A^2)t_1^2 - 2u^2 t t_1 + (u^2 - v_B^2)t^2 = 0$$

这是以  $t_1$  为变量的一元二次方程, 其解为

$$t_1 = \left( \frac{u^2 \pm \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} \right) t \quad \text{由于 } u^2 > u^2 - v_A^2, \text{ 但 } t_1 < t, \text{ 所以上式中只能取减号}$$

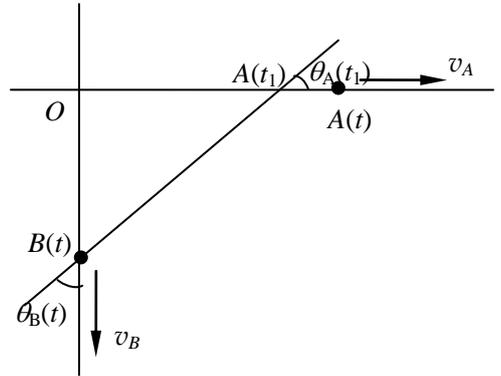
$$t_1 = \frac{u^2 - \sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2}}{u^2 - v_A^2} t \quad (2)$$

$$t - t_1 = \frac{\sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2} - v_A^2}{u^2 - v_A^2} t \quad (3)$$

令

$$\sqrt{u^2(v_A^2 + v_B^2) - v_A^2 v_B^2} = k \quad (4)$$

有



$$t_1 = \frac{u^2 - k}{u^2 - v_A^2} t, \quad t - t_1 = \frac{k - v_A^2}{u^2 - v_A^2} t \quad (5)$$

在  $t_1$  时刻, 位于  $A(t_1)$  处的汽车 A 发出的笛声沿直线 (即波线)  $\overline{A(t_1)B(t)}$  在  $t$  时刻传到  $B(t)$  处, 以  $\theta_{A(t_1)}$ 、 $\theta_{B(t)}$  分别表示车速与笛声传播方向的夹角, 有

$$\cos \theta_{A(t_1)} = \frac{v_A t_1}{u(t - t_1)} = \frac{v_A (u^2 - k)}{u(k - v_A^2)} \quad (6)$$

$$\cos \theta_{B(t)} = \frac{v_B t}{u(t - t_1)} = \frac{v_B (u^2 - v_A^2)}{u(k - v_A^2)} \quad (7)$$

令  $\nu$  表示 B 车司机接收到的笛声的频率, 由多普勒效应可知

$$\nu = \frac{u - v_B \cos \theta_{B(t)}}{u + v_A \cos \theta_{A(t_1)}} \nu_0 \quad (8)$$

由 (6)、(7)、(8) 式, 得

$$\nu = \frac{u^2 \left( \sqrt{u^2 (v_A^2 + v_B^2)} - v_A^2 v_B^2 - v_A^2 \right) - v_B^2 (u^2 - v_A^2)}{(u^2 - v_A^2) \left( \sqrt{u^2 (v_A^2 + v_B^2)} - v_A^2 v_B^2 \right)} \nu_0 \quad (9)$$

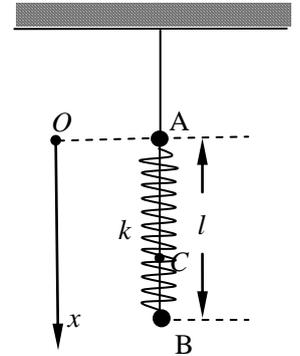
### 七、解法一:

对于由小球 A、B 和弹簧构成的系统, 当 A、B 之间的距离为  $l$  时, 已知  $m_A = m$ ,  $m_B = 2m$ , 由质心的定义, 可知系统的质心 C 离 A 的距离

$$l_C = \frac{2}{3} l \quad (1)$$

故 A、B 到质心 C 的距离分别为

$$l_A = \frac{2}{3} l \quad l_B = \frac{1}{3} l \quad (2)$$



若以质心 C 为参考系 (质心系), 则质心 C 是固定不动的, 连接 A、B 的弹簧

可以分成两个弹簧 CA 和 CB. 设弹簧 CA 的自然长度为  $l_{A0}$ , 劲度系数为  $k_A$ , 一端与小球 A 相连, 另一端固定在 C 点; 弹簧 CB 的自然长度为  $l_{B0}$ , 劲度系数为  $k_B$ , 一端与小球 B 相连, 另一端亦固定在 C 点. 若连接 A、B 的自然长度为  $l_0$ , 根据题意有

$$k(l - l_0) = 2mg \quad (3)$$

由 (2) 式可知弹簧 CA 和 CB 的自然长度分别为

$$l_{A0} = \frac{2}{3} l_0 \quad l_{B0} = \frac{1}{3} l_0 \quad (4)$$

当 A 被悬挂, 系统处于静止时, 已知连接 A、B 的弹簧长度为  $l$ , 由 (2) 式可知, 此时弹簧 CA 和 CB 的长

度分别为

$$l_A = \frac{2}{3}l \quad l_B = \frac{1}{3}l \quad (5)$$

弹簧 CA、CB 作用于 A、B 的弹簧力分别为

$$f_A = k_A(l_A - l_{A0}) = \frac{2}{3}k_A(l - l_0)$$

$$f_B = k_B(l_B - l_{B0}) = \frac{1}{3}k_B(l - l_0)$$

但  $f_A$ 、 $f_B$  就是连接 A、B 的弹簧因拉伸而产生的弹力  $f$ ，即有

$$f_A = f_B = f = k(l - l_0)$$

由此得

$$k_A = \frac{3}{2}k \quad k_B = 3k \quad (6)$$

相对地面，质心 C 是运动的，在  $t=0$  时刻，即细线刚烧断时刻，A 位于  $Ox$  轴的原点  $O$  处，即  $x_A(0)=0$ ；B 的

坐标  $x_B(0)=l$ 。由 (1) 式，可知此时质心 C 的坐标为

$$x_C(0) = \frac{2}{3}l \quad (7)$$

在细线烧断以后，作用于系统的外力是重力  $(m+2m)g$ 。故质心以  $g$  为加速度做匀加速直线运动，任意时刻  $t$ ，

质心的坐标

$$x_C(t) = x_C(0) + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}gt^2 \quad (8)$$

由于质心作加速运动，质心系是非惯性系。在非惯性参考系中，应用牛顿第二定律研究物体的运动时，物体除受真实力作用外，还受惯性力作用。若在质心系中取一坐标轴  $O'x'$ ，原点  $O'$  与质心 C 固连，取竖直向下为  $O'x'$  轴的正方向，当小球 B 在这参考系中的坐标为  $x'_B$  时，弹簧 CB 作用于 B 的弹性力

$$f_B = -k_B(x'_B - l_{B0})$$

当  $x'_B > l_{B0}$  时，方向竖直向上。此外，B 还受到重力  $mg$ ，方向竖直向下；惯性力大小为  $mg$ ，方向竖直向上。作

用于 B 的合力

$$F_B = -k_B(x'_B - l_{B0}) - mg + mg$$

由 (3)、(4) 式得

$$F_B = -k_B \left( x'_B - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \right) \quad (9)$$

令

$$X_B = x'_B - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \quad (10)$$

有

$$F_B = -k_B X_B \quad (11)$$

当  $X_B = 0$ , 作用于 **B** 的合力  $F_B = 0$ , **B** 处于平衡状态, 由 (10) 式, 可知在质心系中, **B** 的平衡位置的坐标

$$x'_{B0} = \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) \quad (12)$$

$X_B$  为 **B** 离开其平衡位置的位移, (11) 式表明, 作用于 **B** 的合力具有弹性力的性质, 故在  $F_B$  作用下, **B** 将在平衡位置附近作简谐振动, 振动圆频率

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_B}{m_B}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad (13)$$

离开平衡位置的位移

$$X_B = A_B \cos(\omega_B t + \varphi_B) \quad (14)$$

$A_B$  为振幅,  $\varphi_B$  为初相位. 在  $t = 0$  时刻, 即细线刚烧断时刻, **B** 是静止的, 故此时 **B** 离开其平衡位置  $x'_{B0}$  的距离就是简谐振动的振幅  $A_B$ , 而在  $t = 0$  时刻, **B** 离开质心的距离即 (5) 式给出的  $l_B$ , 故 **B** 离开平衡位置的距离即振幅

$$A_B = l_B - x'_{B0}$$

由 (5) 式、(12) 式得

$$A_B = \frac{1}{3}l - \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) = \frac{2mg}{3k} \quad (15)$$

因  $t = 0$ ,  $X_B = A_B$ , 且  $X_B$  是正的, 故

$$\varphi_B = 0$$

由此得

$$X_B = \frac{2mg}{3k} \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right) \quad (16)$$

由 (10) 式,  $t$  时刻 **B** 在质心系中的坐标

$$x'_B(t) = \frac{1}{3} \left( l - \frac{2mg}{k} \right) + \frac{2mg}{3k} \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right) \quad (17)$$

在地面参考系的坐标

$$x_B(t) = x_C(t) + x'_B(t) \quad (18)$$

得

$$x_B(t) = l + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{2mg}{3k} \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right) \right] \quad (19)$$

同理，当小球 A 在质心系中的坐标为  $x'_A$  时，注意到  $x'_A$  是负的，这时，弹簧 CA 的伸长量为

$$x'_A + l_{A0} = x'_A + \frac{2}{3}l_0 = x_A + \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right),$$

当  $x'_A + l_{A0}$  为负时，弹力向下，为正，当  $x'_A + l_{A0}$  为正时，弹力向上，为负，故有

$$f_A = -k_A \left( x_A + \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) \right)$$

作用于 A 的合力为

$$F_A = -k_A \left( x_A + \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) \right)$$

令

$$X_A = x_A + \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right)$$

有

$$F_A = -k_A X_A$$

当  $X_A=0$ ，作用于 A 的合力  $F_B=0$ ，A 处于平衡状态，A 的平衡位置的坐标

$$x_{A0} = -\frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) \quad (20)$$

$X_A$  为 A 离开其平衡位置的位移，故在合力  $F_A$  作用下，A 将在平衡位置附近作简谐振动，振动圆频率

$$\omega_A = \sqrt{\frac{k_A}{m}} = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad (21)$$

离开平衡位置的位置

$$X_A = A_A \cos(\omega_A t + \varphi_A)$$

$A_A$  为振幅， $\varphi_A$  为初相位。在  $t=0$  时刻，即细线刚烧断时刻，A 是静止的，A 离开质心 C 的距离为  $l_A$ ，A 的平

衡位置离开质心的距离为  $|x_{A0}|$  故此时 A 离开平衡位置的距离即为振幅  $A_A$ ，

$$A_A = l_A - |x_{A0}| = \frac{2}{3}l - \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) = \frac{4}{3}\frac{mg}{k}$$

而此时  $X_A = -A_A$ ，故

$$\varphi_A = \pi$$

由此得

$$X_A = -\frac{4mg}{3k} \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right) \quad (22)$$

在时刻  $t$ , A 在地面参考系中的坐标

$$\begin{aligned} x_A(t) &= x_C(t) + x_{A0} + X_A = \frac{2}{3}l + \frac{1}{2}gt^2 - \frac{2}{3}\left(l - \frac{2mg}{k}\right) - \frac{4}{3}\frac{mg}{k} \cos\sqrt{\frac{3k}{m}}t \\ &= \frac{1}{2}gt^2 + \frac{4mg}{3k} \left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t\right)\right] \end{aligned} \quad (23)$$

解法二:

当 A 球相对于地面参考系的坐标为  $x$  时, 弹簧 CA 的伸长量为  $x_C - \frac{2}{3}l_0 - x$ , A 所受的合力为

$$F_A = mg + \frac{3}{2}k\left(x_C - \frac{2}{3}l_0 - x\right)$$

其加速度为

$$a_A = g + \frac{3}{2m}k\left(x_C - \frac{2}{3}l_0 - x\right) \quad (1')$$

其相对于质心的加速度为

$$a'_A = a_A - g = \frac{3}{2m}k\left(x_C - \frac{2}{3}l_0 - x\right) = -\frac{3}{2m}k\left[x - \left(x_C - \frac{2}{3}l_0\right)\right]$$

其中  $x - \left(x_C - \frac{2}{3}l_0\right)$  表示 A 球相对于其平衡位置的位移, 在相互平动的两个参考系中, 相对位移与参考系无关.

上式表明, 相对质心, A 球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向. 也就是说, A 球相对质心作简谐振动.

同理可证,

$$\begin{aligned} F_B &= 2mg - 3k\left(x - x_C - \frac{l_0}{3}\right) \\ a_B &= g - \frac{3k}{2m}\left[x - \left(x_C + \frac{l_0}{3}\right)\right] \end{aligned} \quad (2')$$

其相对于质心的加速度为

$$a'_B = -\frac{3}{2m}k\left[x - \left(x_C - \frac{2}{3}l_0\right)\right] \quad (3')$$

其中  $x - \left(x_C + \frac{l_0}{3}\right)$  表示 B 球相对于其平衡位置的位移，相对质心，B 球的加速度与其相对于平衡位置的位移成正比且反向，即 B 球相对质心也作简谐振动。且有 A 与 B 振动的圆频率相等，

$$\omega_A = \omega_B = \sqrt{\frac{3k}{2m}} \quad (4')$$

解法三：

在地面参考系中，列 A、B 的牛顿定律方程

$$ma_1 = mg + k(x_2 - x_1 - l_0) \quad (1'')$$

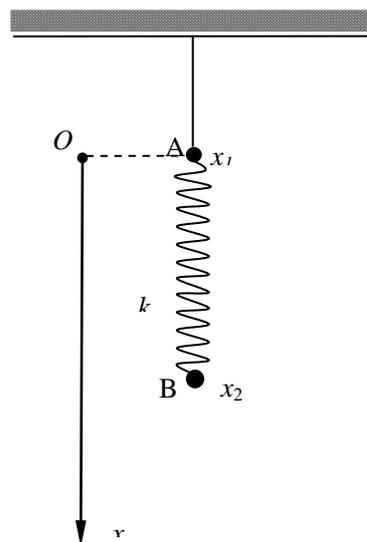
$$2ma_2 = 2mg - k(x_2 - x_1 - l_0) \quad (2'')$$

$x_1$ 、 $x_2$  是 A、B 的坐标， $l_0$  是弹簧的自然长。

$t=0$  时，有

$$x_1 = 0, \quad v_1 = 0$$

$$x_2 = l, \quad v_2 = 0$$



$l$  为初始时即细线刚烧断时刻，弹簧的长度，有关系

$$k(l - l_0) = 2mg$$

所以

$$l_0 = l - \frac{2mg}{k}$$

由  $(1'') + (2'')$ ，

$$a_1 + 2a_2 = 3g$$

令  $a = a_1 + 2a_2 = 3g$ ， $a$  是一个恒定的加速度，结合初始条件， $a$  对应的坐标和运动方程是，

$$x_1 + 2x_2 = 2l + \frac{3}{2}gt^2 \quad (3'')$$

再由  $(2'') - 2 \times (1'')$ ，

$$2m(a_2 - a_1) = -3k(x_2 - x_1 - l_0) \quad (4'')$$

这是一个以 A 为参考系描写 B 物体运动的动力学方程，且是简谐的，所以直接写出解答，

$$x_2 - x_1 - l_0 = A \cos\left(\sqrt{\frac{3k}{2m}}t + \alpha\right)$$

结合初条件，

$$l - l_0 = A \cos \alpha$$

$$A \sqrt{\frac{3k}{2m}} \sin \alpha = 0$$

得到

$$\alpha = 0$$

$$A = l - l_0 = \frac{2mg}{k}$$

所以

$$x_2 - x_1 = l_0 + \frac{2mg}{k} \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right)$$

即

$$x_2 - x_1 = l - \frac{2mg}{k} + \frac{2mg}{k} \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right) \quad (5'')$$

由(3'') - 2 × (5''), 得

$$x_1 = \frac{1}{2} g t^2 + \frac{4mg}{3k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right) \right) \quad (6'')$$

由(3'') + (5''), 得

$$x_2 = l + \frac{1}{2} g t^2 - \frac{2mg}{3k} \left( 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{3k}{2m}} t \right) \right) \quad (7'')$$