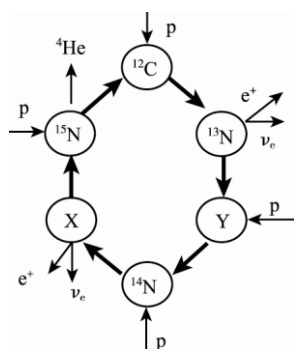


## 第 32 届全国中学生物理竞赛复赛理论考试试题解答

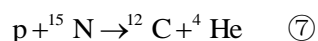
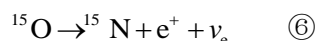
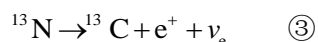
2015 年 9 月 19 日

一、(15 分)

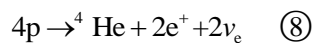
(1) 图中 X 和 Y 代表的核素分别为  $^{15}\text{O}$  和  $^{13}\text{C}$  ①



(2) 一个循环所有的核反应方程式依循换次序为



(3) 整个循环的核反应，相当于



完成一个碳循环过程释放的核能为

$$\Delta E = (4m_p - M_{{}^4\text{He}} - 2m_e)c^2$$

$$= [(4 \times 1.0078 - 4.0026) \times 931.494 - 2 \times 0.511] \text{MeV}$$

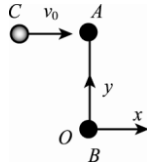
$$\approx 25.619 \text{MeV} \quad \text{⑨}$$

评分参考：第 (1) 问 4 分，X 和 Y 正确，各 2 分；第 (2) 问 6 分，②③④⑤⑥⑦式各 1 分；第 (3) 问 5 分，⑧式 2 分，⑨式 3 分。

二、(15 分)

(1) (解法一)

取碰前 B 球所在位置 O 为原点，建立坐标系 (如图)。



碰撞前后系统的动量及其对细杆中心的角动量都守恒，有

$$mv_0 = mv_x + MV_{Ax} + MV_{Bx} \quad (1)$$

$$0 = mv_y + MV_{Ay} + MV_{By} \quad (2)$$

$$m\frac{L}{2}v_0 = m\frac{L}{2}v_x + M\frac{L}{2}V_{Ax} - M\frac{L}{2}V_{Bx} \quad (3)$$

式中， $v_x$  和  $v_y$  表示球 C 碰后的沿 x 方向利 y 方向的速度分量。由于轻杆长度为  $L$ ，按照图中建立的坐标系有

$$[x_A(t) - x_B(t)]^2 + [y_A(t) - y_B(t)]^2 = L^2 \quad (4)$$

由上式对时间求导得

$$[x_A(t) - x_B(t)][V_{Ax}(t) - V_{Bx}(t)] + [y_A(t) - y_B(t)][V_{Ay}(t) - V_{By}(t)] = 0 \quad (5)$$

在碰撞后的瞬间有

$$x_A(t=0) = x_B(t=0),$$

$$y_A(t=0) - y_B(t=0) = L \quad (6)$$

利用⑥式，⑤式在碰撞后的瞬间成为

$$V_{Ay} \equiv V_{Ay}(t=0) = V_{By}(t=0) \equiv V_{By} \quad (7)$$

由①②⑦式得

$$V_{Ay} = V_{By} = -\frac{m}{2M}v_y \quad (8)$$

由①②③式得

$$V_{Ax} = \frac{m}{M}(v_0 - v_x) \quad (9)$$

$$V_{Bx} = 0 \quad (10)$$

利用⑧⑨⑩式，碰撞后系统的动能为

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}M(V_{Ax}^2 + V_{Ay}^2) + \frac{1}{2}M(V_{Bx}^2 + V_{By}^2) \\ &= \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}M(V_{Ax}^2 + 2V_{Ay}^2) \\ &= \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0 - v_x)^2 + \frac{2M + m}{4M}mv_y^2 \end{aligned} \quad (11)$$

(解法二)

取碰前 B 球所在位置 O 为原氧，建立坐标系（如图）。设碰撞后，小球 C 的运动速率为  $v$ ，细杆中心的运动速度为  $V_C$ ，细杆绕中心转动的角速度为  $\omega$ 。碰撞前后系统的动量及其对细杆中心的角动量都守恒，有

$$mv_0 = mv_x + 2MV_{Cx} \quad ①$$

$$0 = mv_y + 2MV_{Cy} \quad ②$$

$$m\frac{L}{2}v_0 = m\frac{L}{2}v_x + 2M\left(\frac{L}{2}\omega\right)\frac{L}{2} \quad ③$$

式中， $v_x$  和  $v_y$  表示球 C 碰后的沿  $x$  方向和  $y$  方向的速度分量。由①②③式得

$$V_{Cx} = \frac{m}{2M}(v_0 - v_x) \quad ④$$

$$V_{Cy} = -\frac{m}{2M}v_y \quad ⑤$$

$$\omega = \frac{m}{ML}(v_0 - v_x) \quad ⑥$$

碰撞后系统的动能为

$$E = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}(2M)(V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2) + 2 \times \frac{1}{2}M\left(\omega\frac{L}{2}\right)^2 \quad ⑦$$

利用④⑤⑥式，系统动能⑦式可表示成

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M}(v_0 - v_x)^2 + \frac{2M + m}{4M}mv_y^2 \quad ⑧$$

(2) 解法（一）的⑩式或者解法（二）的⑧式即为

$$E = \frac{1}{2}\frac{(M + m)m}{M}\left(v_x - \frac{m}{M + m}v_0\right)^2 + \frac{2M + m}{M}mv_y^2 + \frac{1}{2}\frac{m^2}{M + m}v_0^2 \quad ⑩$$

可见，在条件

$$v_x = \frac{m}{M + m}v_0,$$

$$v_y = 0 \quad ⑪$$

下，碰后系统动能达到其最小值

$$E = \frac{1}{2}\frac{m^2}{M + m}v_0^2 \quad ⑫$$

它是小球仅与球 A 做完全非弹性碰撞后系统所具有的动能。

评分参考：第（1）问 10 分，（解法一）①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪式各 1 分；（解法二）①②式各 1 分，③式 2 分，④⑤⑥各 1 分，⑦式 2 分，⑧式 1 分；第（2）问 5 分，⑩⑪式各 2 分，⑫式 1 分。

三、（20 分）

(1) 设圆环的质量为  $m$ ，它在碰撞过程中受到的地面对它的水平冲量为  $I_t$ ；碰撞后圆环质心的速度大

小为  $v$ ， $v$  与竖直向上方向的夹角（按如图所示的顺时针方向计算）为  $\beta$ ，圆环的角速度为  $\omega$ 。规定水平向右方向和顺时针方向分别为水平动量和角速度的正方向。在水平方向，由动量定理有

$$mv \sin \beta - mv_0 \sin \theta = I_t \quad (1)$$

由对质心的动量矩定理有

$$rm(r\omega) - rm(r\omega_0) = -rI_t \quad (2)$$

按题意，圆环在弹起前刚好与地面无相对滑动，因而此时圆环上与地面的接触点的水平速度为零，即

$$v \sin \beta - r\omega = 0 \quad (3)$$

由题意知

$$\frac{0 - v \cos \beta}{v_0 \cos \theta - 0} = k \quad (4)$$

联立①②③④式得

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{4k^2 v_0^2 \cos^2 \theta + (r\omega_0 + v_0 \sin \theta)^2} \quad (5)$$

$$\tan \beta = -\frac{1}{2k} \left( \tan \theta + \frac{r\omega_0}{v_0 \cos \theta} \right) \quad (6)$$

$$\omega = \frac{1}{2r} (r\omega_0 + v_0 \sin \theta) \quad (7)$$

(2) 若圆环与地而碰后能竖直弹起，则其速度与竖直方向的夹角

$$\beta = 0$$

将上式代入⑥式得，使圆环在与地面碰后能竖直弹起的条件为

$$\sin \theta = -\frac{r\omega_0}{v_0} \quad (8)$$

在此条件下，在与地面刚刚碰后的瞬间有

$$\omega = 0, \quad v = -v_0 k \cos \theta \quad (9)$$

即圆环做竖直上抛运动。圆环上升的最大高度为

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{v_0^2 k^2 \cos^2 \theta}{2g} = \frac{k^2 (v_0^2 - r^2 \omega_0^2)}{2g} \quad (10)$$

(3) 由于忽略空气阻力，圆环再次弹起后，角速度保持为  $\omega$  不变，质心做以初速度为  $v$  的斜抛运动。圆环第二次落地点到首次落地点之间的水平距离  $s$  随  $\theta$  变化的函数关系式为

$$s = \frac{v^2 \sin 2\beta}{g} = -\frac{kv_0 \cos \theta}{g} (v_0 \sin \theta + r\omega_0) \quad (11)$$

$s$  取最大值时， $\theta$  的取值  $\bar{\theta}$  满足

$$\left. \frac{ds}{d\theta} \right|_{\bar{\theta}} = -\frac{kv_0}{g} (v_0 \cos 2\bar{\theta} - r\omega_0 \sin \bar{\theta}) = 0 \quad (12)$$

由得⑫式得

$$\sin \bar{\theta} = \frac{-r\omega_0 \pm \sqrt{r^2 \omega_0^2 + 8v_0^2}}{4v_0} \quad (13)$$



式中  $R_0 = \sqrt{h^2 + a^2}$ 。现设在时刻  $t'_1$ ，飞机所在位置 A 点的坐标为  $(x'_1, h, 0)$ ，机载雷达此时发出另一光信号；该信号到达 P 点，经反射后，于时刻  $t'_2$  返回至飞机的机载雷达被接受，此时飞机的机载雷达的位置为  $(x'_2, h, 0)$ 。同理有

$$x'_2 - x'_1 = v(t'_2 - t'_1) \quad (3)$$

$$x'_1 - x_1 = v(t'_1 - t_1) \quad (4)$$

$$x'_2 - x_2 = v(t'_2 - t_2) \quad (5)$$

由①②式和  $v \ll c$  得

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p + x_2 - x_1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2 + 2v(t_2 - t_1)(x_1 - x_p) + (x_2 - x_1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2 + 2v(t_2 - t_1)(x_1 - x_p) + v^2(t_2 - t_1)^2} \right] \quad (6) \\ &\approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{x_1 - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}} \frac{v}{c} (t_2 - t_1) \end{aligned}$$

上式右端已略去了  $(v/c^2)$  级的高阶项。由⑥式解得

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &\approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \frac{x_1 - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}} \\ &\approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} \left( 1 + \frac{v}{c} \frac{x_1 - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}} \right) \quad (7) \\ &= \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{2v}{c^2} (x_1 - x_p) \end{aligned}$$

同理，由③④式和  $v \ll c$  得

$$t'_2 - t'_1 \approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x'_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{2v}{c^2} (x'_1 - x_p) \quad (8)$$

由⑦⑧式得

$$(t'_2 - t_2) - (t'_1 - t_1) \approx \frac{2}{c} \left( \sqrt{R_0^2 + (x'_1 - x_p)^2} - \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} \right) + \frac{2v}{c^2} (x'_1 - x_1) \quad (9)$$

利用⑤式，⑨式成为

$$\begin{aligned}
& (t'_2 - t_2) - (t'_1 - t_1) \\
& \approx \frac{2}{c} \left( \sqrt{R_0^2 + [x_1 - x_p + v(t'_1 - t_1)]^2} - \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} \right) + \frac{2v^2}{c^2} (t'_1 - t_1) \quad \textcircled{10} \\
& \approx \frac{2(x_1 - x_p)}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}} \frac{v}{c} (t'_1 - t_1)
\end{aligned}$$

上式右端已略去了  $(v/c)^2$  级的高阶项。令

$$t'_1 - t_1 = T_0 \quad \textcircled{11}$$

式中,  $T_0$  为机载雷达在发射的光信号的周期, 则

$$t'_2 - t_2 = T \quad \textcircled{12}$$

是机载雷达接受到相应的光信号的周期。⑪式可写成

$$T - T_0 = \frac{2(x_A - x_p)}{\sqrt{R_0^2 + (x_A - x_p)^2}} \frac{v}{c} T_0 \quad \textcircled{13}$$

或

$$f_D \equiv f - f_0 = -\frac{2(x_A - x_p)}{\sqrt{R_0^2 + (x_A - x_p)^2}} \frac{v}{c} f_0 \quad \textcircled{14}$$

式中  $x_1$  已用  $x_A$  替代, 而

$$f = \frac{1}{T}, \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

是相应的光信号的频率,  $f_D$  是接收到的回波信号的频率与发出信号的频率之差 (频移)。⑭式也可写为

$$f_D \equiv f - f_0 = -2 \frac{v}{c} f_0 \cos \alpha \quad \textcircled{15}$$

式中

$$\cos \alpha \equiv \frac{x_A - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_A - x_p)^2}}$$

即  $\alpha$  为从机载雷达射出的光线与飞机航线之间的夹角。

解法 (二)

取航线 **KA** 和直线 **BC** 所构成的平面为新的坐标平面。K 为坐标原点, 航线 **KA** 为  $x$  轴, 从 K 指向 **BC** 与  $Z$  轴交点的直线为  $y$  轴; 在时刻  $t_1$ , 飞机所在位置 A 点的坐标为  $(x_1 = x_A, 0)$ ; 目标点 P 的位置  $(x_p, R_0)$

在这个坐标系里是固定的。

设机载雷达于时刻  $t$  发出的发射信号的相位为

$$\Phi = (t) = \omega_0 t + \varphi$$

式中  $\omega_0$  和  $\varphi$  分别是相应的角频率和初相位。机载雷达于时刻  $t_1$  在 A' 点  $(x_2 = x_A(t_1), 0)$  接收到的经 P 反射的信号是机载雷达于时刻  $t_1 - \tau$  在 A 点  $(x_1 = x_A(t_1 - \tau), 0)$  发出的，其相位为

$$\Phi'(t_1) = \omega_0(t_1 - \tau) + \varphi \quad (1)$$

式中  $\tau$  为信号往返过程所需的时间，它满足

$$\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_2 - x_p)^2} = c\tau \quad (2)$$

$$x_2 - x_1 = v\tau \quad (3)$$

经过时间间隔  $\Delta t$ ，同理有

$$\Phi'(t_1 + \Delta t) = \omega_0(t_1 + \Delta t - \tau') + \varphi \quad (4)$$

$$\sqrt{R_0^2 + (x'_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x'_2 - x_p)^2} = c\tau' \quad (5)$$

$$x'_2 - x'_1 = v\tau' \quad (6)$$

另外，由于同样的原因（飞机作匀速直线运动），还有

$$x'_1 - x_1 = v\Delta t \quad (7)$$

$$x'_2 - x_2 = v\Delta t$$

设机载雷达收到的信号的圆频率为  $\omega$ ，则应有

$$\Phi'(t_1 + \Delta t) - \Phi'(t_1) = \omega\Delta t \quad (8)$$

由②③式和  $v \ll c$  得

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p + x_2 - x_1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2 + 2(x_2 - x_1)(x_1 - x_p) + (x_2 - x_1)^2} \right] \\ &= \frac{1}{c} \left[ \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2} + \sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2 + 2v\tau(x_1 - x_p) + v^2\tau^2} \right] \\ &\approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{x_1 - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}} \frac{v}{c} \tau \end{aligned} \quad (9)$$

上式右端已略去了  $(v/c)^2$  级的高阶项。由⑨式解得

$$\tau \approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} \frac{1}{1 - \frac{v}{c} \frac{x_1}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}}$$



$$\begin{aligned} &\approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} \left( 1 + \frac{v}{c} \frac{x_1 - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{2v}{c^2} (x_1 - x_p) \end{aligned} \quad (10)$$

同理，由⑤⑥式和  $v \ll c$  得

$$\tau' \approx \frac{2\sqrt{R_0^2 + (x'_1 - x_p)^2}}{c} + \frac{2v}{c^2} (x'_1 - x_p) \quad (11)$$

由①④⑧式得

$$\omega \Delta t = \omega_0 (\Delta t - \tau') - \omega_0 (-\tau) \quad (12)$$

将

$$\omega = 2\pi f \quad (13)$$

代入⑫式，利用⑦⑩⑪式，在  $\Delta t$  很小的情形下，略去  $\Delta t$  的高阶项，得

$$f_D \equiv f - f_0 = -\frac{2(x_A - x_p)}{\sqrt{R_0^2 + (x_A - x_p)^2}} \frac{v}{c} f_0 \quad (14)$$

或

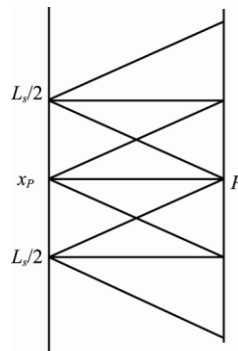
$$f_D = f - f_0 = -2 \frac{v}{c} f_0 \cos a \quad (14)$$

式中

$$\cos a = \frac{x_A - x_p}{\sqrt{R_0^2 + (x_A - x_p)^2}}$$

即  $a$  为从机载雷达射出的光线与飞机航线之间的夹角。

(2) 由于机载雷达天线发射的无线电波束面的张角的限制（见图 (b)），



图(b)

有

$$\frac{\pi}{2} - \frac{L_s / 2}{\sqrt{R_0^2 + (L_s / 2)^2}} \leq a \leq \frac{\pi}{2} + \frac{L_s / 2}{\sqrt{R_0^2 + (L_s / 2)^2}} \quad (15)$$

频移  $f_D$  分别为正、零或负的条件是：

当  $a < \pi/2$  ( $x_A < x_P$ ) 时, 频移  $f_D > 0$ ;

当  $\theta = \pi/2$  ( $x_A = x_P$ ) 时, 即机载雷达发射信号时正好位于 P 点到航线的垂足处, 频移

$$f_D = 0 \quad (16)$$

当  $\theta > \pi/2$  ( $x_A > x_P$ ) 时, 频移  $f_D < 0$ 。

当  $a = \pi/2 - L_s/2\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}$  ( $x_A - x_P = -L_s/2$ ) 时, 即机载雷达发射信号时正好位于

( $x_A = x_P - L_s/2, h, 0$ ) 处, 正的频移最大

$$f_{D1} = \frac{L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0 \quad (17)$$

当  $a = \pi/2 + L_s/2\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}$  ( $x_A - x_P = L_s/2$ ) 时, 即机载雷达发射信号时正好位于

( $x_A = x_P + L_s/2, h, 0$ ) 处, 负的频移的绝对值最大  $f_{D2} = -\frac{L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0$  (18)

(3) 在飞机持续发射的无线电波束前沿 BC 全部通过目标 P 点过程中, 多普勒频移的带宽为

$$\Delta f_D \equiv f_{D1} - f_{D2} = \frac{2L_s}{\sqrt{R_0^2 + (L_s/2)^2}} \frac{v}{c} f_0 = 4 \frac{v}{c} f_0 \sin \frac{\theta}{2} \quad (19)$$

由于  $R_0 \gg L_s$ , 有  $\theta \ll 1$ , 故  $\sin \frac{\theta}{2} \approx \frac{\theta}{2}$

将上式代入⑱式得  $\Delta f_D = f_0 \frac{2v}{c} \theta$  (20)

评分参考: 第(1)问 16分,

(解法一) ①式 2分, ②式 1分, ③式 2分, ④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭式各 1分;

(解法二) ①式 1分, ②式 2分, ③④式各 1分, ⑤式 2分, ⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫⑬⑭式各 1分;

第(2)问 6分, ⑮式 2分, 频移  $f_D$  分别为正、零或负的条件正确(包括⑯式)给 2分, ⑰⑱式各 1分;

第(3)问 3分, ⑲式 2分, ⑳式 1分

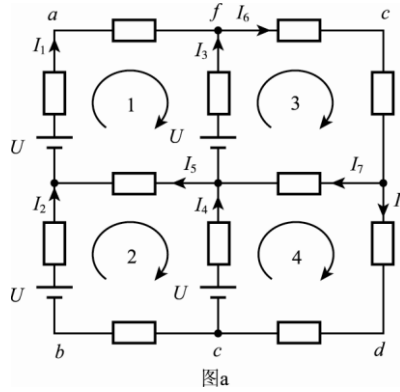
五、(20分)

在 de 边未出磁场的过程中, ab、cf 和 de 三边切割磁力线运动, 每条边产生的感应电动势相等, 但感应电流为零, 故不需要外力做功

$$W_1 = 0 \quad (1)$$

在 de 边出磁场但 cf 边未出磁场过程中, ab 和 cf 两条边做切割磁力线运动, 导线框的等效电路如图 a 所示。等效电路中每个电阻的阻值  $R = 1.0\Omega$ 。按如图所示电流方向, 根据基尔霍夫第一定律可得

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_6, \\ I_2 + I_5 = I_1, \\ I_6 = I_7 + I_8, \\ I_4 + I_7 = I_3 + I_5. \end{cases} \quad (2)$$



由基尔霍夫第二定律，对4个回路可列出4个独立方程

$$\begin{cases} U - 2I_1R + I_3R - U - I_5R = 0, \\ U - 2I_2R + I_5R - U + I_4R = 0, \\ U - I_3R - 2I_6R - I_7R = 0, \\ U - I_4R + I_7R - 2I_8R = 0. \end{cases} \quad (3)$$

式中，感应电动势  $U$  为

$$U = blv = 0.20\text{V} \quad (4)$$

联立②③④式得：

$$I_1 = I_2 = 0.025\text{A} \quad (5)$$

$$I_3 = I_4 = 0.050\text{A} \quad (6)$$

此时，ab边和ed边所受的安培力大小分别为

$$F_{ab} = BI_1l_{ab} = 0.0050\text{N} \quad (7)$$

$$F_{cf} = BI_3l_{cf} = 0.010\text{N} \quad (8)$$

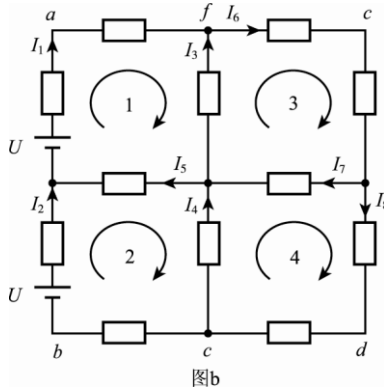
式中  $l_{ab}$  和  $l_{ed}$  分别为ab边和ed边的长度。外力所做的功为

$$W_2 = F_{ab}l_{ef} + F_{cf}l_{ef} = 0.0015\text{J} \quad (9)$$

式是  $l_{ef}$  表示ef边的长度。

在cf边移出磁场后，只有边ab切割磁力线运动产生感应电动势。此时，等效电路如图b所示，电路中电动势的大小和电阻阻值不变。根据基尔霍夫定律可得

$$\begin{cases} I_1 + I_3 = I_6, \\ I_2 + I_5 = I_1, \\ I_6 = I_7 + I_8, \\ I_4 + I_7 = I_3 + I_5. \end{cases} \quad (10)$$



和

$$\begin{cases} U - 2I_1R + I_3R - I_5R = 0, \\ U - 2I_2R + I_5R + I_4R = 0, \\ -I_3R - 2I_6R - I_7R = 0, \\ -I_4R + I_7R - 2I_8R = 0. \end{cases} \quad (11)$$

联立⑩⑪式得

$$I_1 = I_2 = 0.075A \quad (12)$$

此时，ab 边受到的安培力为

$$F_{ab} = BI_1l_{ab} = 0.015N \quad (13)$$

外力所做的功为

$$W_3 = F_{ab}l_{af} = 0.0015J \quad (14)$$

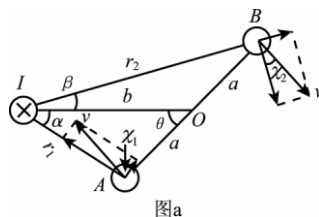
整个过程中外力做的功为

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 0.0030J \quad (15)$$

评分参考：①式 1 分，②③④式各 2 分，⑤⑥⑦⑧⑨式各 1 分，⑩⑪式各 2 分，⑫⑬⑭⑮式各 1 分。

### 六、(23 分)

(1) 设  $t$  时刻导线框平面与长直导线和转轴组成平面之间的夹角为  $\theta$  的值为  $\theta = \omega t$ ，如图 a 所示（俯视图），导线框旋转过程中只有左、右两边（图中分别用 A、B 表示）切割磁力线产生感应电动势。A、B 两条边的速度大小相等，



$$v = \omega a \quad (1)$$

A、B 处对应的磁感应强度大小分别为

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} \quad (2)$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} \quad (3)$$

其中,  $\mu_0$  为真空磁导率,  $r_1$ 、 $r_2$  分别为 A 和 B 到长直导线的垂直距离。A、B 两边对应的感应电动势分别为

$$E_1 = B_1 2av \sin \chi_1 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I}{\pi r_1} \sin \chi_1 \quad (4)$$

$$E_2 = B_2 2av \sin \chi_2 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I}{\pi r_2} \sin \chi_2$$

其中  $\frac{\pi}{2} - \chi_1$ 、 $\frac{\pi}{2} - \chi_2$  分别为 A、B 的速度方向与  $r_1$ 、 $r_2$  的夹角。根据几何关系得

$$\chi_1 = \theta + \alpha \quad (5)$$

$$\chi_2 = \theta - \beta$$

其中  $\alpha$ 、 $\beta$  分别为  $r_1$ 、 $r_2$  与  $x$  方向的夹角。⑤式代入④式得导线框中的感应电动势为

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\omega a^2 \mu_0 I}{\pi} \left[ \frac{\sin(\theta + \alpha)}{r_1} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{r_2} \right] \quad (6)$$

根据几何关系及三角形余弦定理得  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $r_1$ 、 $r_2$  与  $a$ 、 $b$ 、 $\theta$  之间的关系为

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{b - a \cos \theta}{r_1} \\ \sin \alpha = \frac{a \sin \theta}{r_1} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \cos \beta = \frac{b + a \cos \theta}{r_2} \\ \sin \beta = \frac{a \sin \theta}{r_2} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} r_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \\ r_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta \end{cases} \quad (9)$$

将⑦⑧⑨式代入⑥式得导线框的感应电动势为

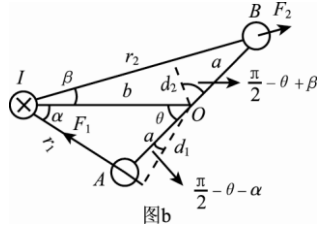
$$E = \frac{\omega a^2 \mu_0 I b \sin \theta}{\pi} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta} \right)$$

$$= \frac{a^2 b \mu_0 I \omega \sin \omega t}{\pi} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right) \quad (10)$$

(2) (解法一)

导线框在电流  $I$  的磁场中旋转, 受到安培力相对于轴的合力矩  $M_0$  的作用, 要使导线框保持角速度为  $\omega$  的匀速旋转, 所加的外力矩  $M$  必须满足

$$M + M_0 = 0 \quad (11)$$



正方形导线框上、下两边所受安培力的方向与转轴平行, 力矩为零, 只有导线框左、右两边 (分别用 A、B 表示) 受到的安培力  $F_1$  和  $F_2$  对合力矩有贡献, 如图 b 所示 (俯视图)。由②③式和安培力公式得  $F_1$  和

$F_2$  的大小为

$$F_1 = 2aiB_1 = \frac{\mu_0 a I i}{\pi r_1} \quad (12)$$

$$F_2 = 2aiB_2 = \frac{\mu_0 a I i}{\pi r_2} \quad (13)$$

式中  $i$  为导线框中的感应电流。由欧姆定律有

$$i = \frac{E}{R} = \frac{\omega a^2 \mu_0 I b \sin \omega t}{\pi R} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right) \quad (14)$$

安培力的合力矩为

$$\begin{aligned} M_0 &= F_1 d_1 + F_2 d_2 \\ &= F_1 a \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta - \alpha \right) + F_2 a \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta + \beta \right) \\ &= F_1 a \sin(\theta + \alpha) + F_2 a \sin(\theta - \beta) \\ &= \frac{\mu_0 a^2 I i}{\pi} \left[ \frac{\sin(\theta + \alpha)}{r_1} + \frac{\sin(\theta - \beta)}{r_2} \right] \end{aligned} \quad (15)$$

其中,  $d_1$  和  $d_2$  分别为  $F_1$  和  $F_2$  与转轴之间的垂直距离,  $\frac{\pi}{2} - \theta - \alpha$  和  $\frac{\pi}{2} - \theta + \beta$  分别为  $d_1$  和  $d_2$  与 A、B 连线之间的夹角。

将⑦⑧⑨⑭式代入⑮式得需要加的外力矩为

$$\begin{aligned} M &= -M_0 = -\frac{\mu_0 a^2 I b \sin \omega t}{\pi} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right) \\ &= \frac{\mu_0^2 a^4 b^2 I^2 \omega \sin^2 \omega t}{\pi^2 R} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right)^2 \\ &= -\frac{4\mu_0^2 a^4 b^2 I^2 \omega}{\pi^2 R} \left( \frac{(a^2 + b^2) \sin \omega t}{(a^2 + b^2) - 4a^2 b^2 \cos^2 \omega t} \right)^2 \end{aligned} \quad (16)$$

(2) (解法二)

导线框在电流  $I$  的磁场中旋转, 受到安培力相对于轴的合力矩  $M_0$  的作用, 要使导线框保持角速度为  $\omega$  的匀速旋转, 所加的外力矩  $M$  必须满足

$$M + M_0 = 0 \quad (11)$$

此时, 安培力的合力矩的功率  $P_0$  应与导线框中感应电流的功率  $P_i$  相等, 即

$$P_0 = P_i \quad (12)$$

式中

$$P_i = \frac{E^2}{R} = \frac{\omega^2 a^4 \mu_0^2 I^2 b^2 \sin^2 \omega t}{\pi^2 R} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right)^2 \quad (13)$$

安培力的合力矩为

$$M_0 = \frac{P_0}{\omega} = \frac{P_i}{\omega} = \frac{\omega a^4 \mu_0^2 I^2 b^2 \sin^2 \omega t}{\pi^2 R} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right)^2 \quad (14)$$

由⑪式可得, 外力矩  $M$  为

$$\begin{aligned} M = -M_0 &= -\frac{\omega a^4 \mu_0^2 I^2 b^2 \sin^2 \omega t}{\pi^2 R} \left( \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} \right)^2 \\ &= -\frac{4\mu_0^2 a^4 b^2 I^2 \omega}{\pi^2 R} \left( \frac{(a^2 + b^2) \sin \omega t}{(a^2 + b^2) - 4a^2 b^2 \cos^2 \omega t} \right)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

评分参考: 第(1)问 13分, ①②③式各 1分, ④式 2分, ⑤式 1分, ⑥式 2分, ⑦⑧⑨式各 1分, ⑩式 2分; 第(2)问 10分, (解法一)⑪⑫式各 2分, ⑬⑭式各 1分, ⑮⑯式各 2分; (解法二)⑪⑫⑬⑭⑮式各 2分。

七、(22分)

(1) 根据热力学第一定律, 有

$$dU = \delta Q + \delta W \quad (1)$$

这里, 对于 1mol 理想气体经历的任一缓慢变化过程中,  $\delta Q$ ,  $\delta W$  和  $dU$  可分别表示为

$$\delta Q = C_p dT, \quad \delta W = -pdV, \quad dU = C_v dT \quad (2)$$

将理想气体状态方程

$$pV = RT$$

两边对  $T$  求导, 可得

$$p \frac{dV}{dT} + V \frac{dp}{dT} = R \quad (3)$$

式中利用了

$$\frac{dp}{dT} = \frac{dp}{dV} \frac{dV}{dT}$$

根据③式有

$$\frac{dV}{dT} = \frac{R}{p + V \frac{dp}{dV}} \quad (4)$$

联立①②④式得

$$C_{\pi} = C_v + \frac{pR}{p + V \frac{dp}{dV}} \quad (5)$$

(2) 设  $bc'$  过程方程为

$$p = \alpha - \beta V \quad (6)$$

根据

$$C_{\pi} = C_v + \frac{pR}{p + V \frac{dp}{dV}}$$

可得该直线过程的摩尔热容为

$$C_{\pi} = C_v + \frac{\alpha - \beta V}{\alpha - 2\beta V} R \quad (7)$$

式中,  $C_v$  是单原子理想气体的定容摩尔热容,  $C_v = \frac{3}{2}R$ 。对  $bc'$  过程的初态  $(3p_1, V_1)$  和终态  $(p_1, 5V_1)$ , 有

$$3p_1 = \alpha - \beta V_1$$

$$p_1 = \alpha - 5\beta V_1 \quad (8)$$

由⑧式得

$$\alpha = \frac{7}{2}p_1, \quad \beta = \frac{p_1}{2V_1} \quad (9)$$

由⑥⑦⑧⑨式得

$$C_{\pi} = \frac{8V - 35V_1}{4V - 14V_1} R \quad (10)$$

(3) 根据过程热容的定义有

$$C_{\pi} = \frac{\Delta Q}{\Delta T} \quad (11)$$

式中,  $\Delta Q$  是气体在此直线过程中, 温度升高  $\Delta T$  时从外界吸收的热量。由⑩⑪式得

$$\Delta T = \frac{4V - 14V_1}{8V - 35V_1} R \Delta Q \quad (12)$$

$$\Delta Q = \frac{8V - 35V_1}{4V - 14V_1} \frac{\Delta T}{R} \quad (13)$$

由⑫式可知,  $bc'$  过程中的升降温的转折点  $A$  在  $p-V$  图上的坐标为

$$A\left(\frac{7}{2}V_1, \frac{7}{4}p_1\right) \quad (14)$$

由⑬式可知,  $bc'$  过程中的吸放热的转折点  $B$  在  $p-V$  图上的坐标为

$$B\left(\frac{35V_1}{8}, \frac{21p_1}{16}\right) \quad (15)$$



(4) 对于  $abcda$  循环过程,  $ab$  和  $bc$  过程吸热,  $cd$  和  $da$  过程放热

$$\begin{aligned} Q_{ab} &= nC_V(T_b - T_a) = 1.5(RT_b - RT_a) = 3p_1V_1 \\ Q_{bc} &= nC_P(T_b - T_a) = 2.5(RT_c - RT_b) = 15p_1V_1 \end{aligned} \quad (16)$$

式中, 已利用已知条件  $n = 1\text{mol}$ , 单原子理想气体定容摩尔热容  $C_V = \frac{3}{2}R$ , 定压摩尔热容  $C_P = \frac{5}{2}R$ 。气体在  $abcda$  循环过程的效率可表示为循环过程中对外做的功除以总吸热, 即

$$\eta_{abcda} = \frac{W_{abcda}}{Q_{ab} + Q_{bc}} = \frac{4p_1V_1}{18p_1V_1} = 0.22 \quad (17)$$

对于  $abc'a$  循环过程,  $ab$  和  $bB$  过程吸热,  $Bc'$  和  $c'a$  过程放热。由热力学第一定律可得,  $bB$  过程吸热为

$$Q_{bc'} = \Delta U_{bB} - W_{bB} = nC_V(T_B - T_b) + \frac{1}{2}(p_B + 3p_1)(V_B - V_1) = 11.39p_1V_1 \quad (18)$$

所以, 循环过程  $abc'a$  的效率为

$$\eta_{abc'a} = \frac{W_{abc'a}}{Q_{ab} + Q_{bc'}} = \frac{4p_1V_1}{14.39p_1V_1} = 0.278 \quad (19)$$

由⑰⑱式可知

$$\eta_{abc'a} > \eta_{abcda} \quad (20)$$

评分参考: 第(1)问5分, ①②③④⑤式各1分, 第(2)问5分, ⑥⑦⑧⑨⑩式各1分; 第(3)问7分, ⑪式2分, ⑫⑬式各2分, ⑭⑮式各1分; 第(4)问5分, ⑯⑰⑱⑲⑳式各1分。

八、(20分)

(1) 对于光线在波导层和衬底层的折射情况, 根据折射定律有

$$n_1 \sin \theta_{i1} = n_0 \sin \theta_{t0} \quad (1)$$

若要求光线不会折射到衬底中, 即发生全反射, 应有

$$\theta_{i1} \geq \theta_{10c} \quad (2)$$

式中,  $\theta_{10c}$  为光线在波导层和衬底层的交界面上发生全反射的临界角

$$\theta_{10c} = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right) \quad (3)$$

同理应有

$$\theta_{i2} \geq \theta_{12c} \quad (4)$$

式中,  $\theta_{12c}$  为光线在波导层和衬底层的交界面上发生全反射的临界角

$$\theta_{12c} = \arcsin\left(\frac{n_{12}}{n_1}\right) \quad (5)$$

由题设  $n_1 > n_0 \geq n_2$ , 可知

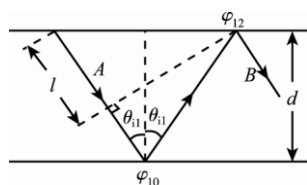
$$\theta_{10c} \geq \theta_{12c} \quad (6)$$

所以，当入射角  $\theta_{i1} \geq \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$  时，光被完全限制在波导薄膜里。

(2) 考虑光波在波导薄膜中传播时处于临界的全反射状态。此时光波的波长可由光的入射角

$$\theta_{i1} = \arcsin\left(\frac{n_0}{n_1}\right)$$

决定。此时光在介质  $n_1$  与  $n_0$  交界面的反射处于全反射的临界状态，光在介质  $n_1$  与  $n_2$  交界面的反射也为全反射。如右图所示， $\varphi_{10}$  和  $\varphi_{12}$  分别为1何0界面以及1和2界面上的反射引入的相位 ( $r_{10} = e^{-i\varphi_{10}}$  和  $r_{12} = e^{-i\varphi_{12}}$ )。过1和2界面上的反射点做直线（虚线）垂直于光线A，设光线A到虚线之前的路程长为  $l$ 。此后，光线A与再经过两次反射的光线B之间的相应差应该为  $2\pi$  的整数倍，以致光可在波导薄膜中传输。故



$$\begin{aligned} 2m\pi &= \frac{2d \sec \theta_{i1} - l}{\lambda} 2\pi - \varphi_{10} - \varphi_{12} \\ &= \frac{2d \sec \theta_{i1} - 2d \tan \theta_{i1} \sin \theta_{i1}}{\lambda} 2\pi - \varphi_{10} - \varphi_{12} \\ &= \frac{4d\pi \cos \theta_{i1}}{\lambda} - \varphi_{10} - \varphi_{12} \quad (7) \\ &= \frac{4d\pi}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}} - \varphi_{10} - \varphi_{12} \end{aligned}$$

式中， $m=0, 1, 2, 3, \dots$ ， $\lambda$  为所传输光波在波导薄膜介质中的波长。

考虑介质  $n_1$  与  $n_0$  交界面的反射，由①式得

$$\sin \theta_{t0} = \frac{n_1 \sin \theta_{i1}}{n_0} = 1 \quad (8)$$

考虑到③式，在介质  $n_1$  与  $n_0$  交界面的反射系数为

$$r_{10} = \frac{n_1 \cos \theta_{i1} - n_0 \cos \theta_{t0}}{n_1 \cos \theta_{i1} + n_0 \cos \theta_{t0}} = \frac{n_1 \cos \theta_{i1}}{n_1 \cos \theta_{i1}} = 1 \quad (9)$$

由上式可以得到介质  $n_1$  与  $n_0$  交界面的反射相位

$$\varphi_{10} = 0 \quad (10)$$

再考虑介质  $n_1$  与  $n_2$  交界面的反射，由①式得

$$\sin \theta_{t2} = \frac{n_1 \sin \theta_{i1}}{n_2} = \frac{n_0}{n_2} \quad (11)$$

按照题给的推广的定义，上式右边大于或等于1也并不奇怪。当  $n_0 > n_2$  时，按照题给的推广的正弦和余弦的定义可知， $\cos \theta_{t2}$  是一个纯虚数，可以写为

$$\cos \theta_{t2} = i \sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2} - 1} \quad (12)$$

考虑到⑫式，则在介质  $n_1$  与  $n_2$  交界面的反射系数为

$$r_{12} = \frac{n_1 \cos \theta_{i1} - n_2 \cos \theta_{t2}}{n_1 \cos \theta_{i1} + n_2 \cos \theta_{t2}} = \frac{n_1 \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}} - n_2 i \sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2} - 1}}{n_1 \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}} + n_2 i \sqrt{\frac{n_0^2}{n_2^2} - 1}} = \exp \left( -2i \arctan \sqrt{\frac{n_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_0^2}} \right) \quad (13)$$

由上式可以得到介质  $n_1$  与  $n_2$  交界面的反射相位为

$$\varphi_{12} = 2 \arctan \sqrt{\frac{n_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_0^2}} \quad (14)$$

将⑩和⑭式代入到⑦式中得，在给定  $m$  的情况下能在薄膜波导中传输的光波在该介质中的最长波长（截止波长）为

$$\lambda = \frac{2\pi d \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}}}{m\pi + \arctan \sqrt{\frac{n_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_0^2}}} \quad (15)$$

式中， $m=0, 1, 2, 3, \dots$ 。当  $m=0$  时可得，能在薄膜波导中传输的光波在该介质中的最长波长为

$$\lambda_{\max} = \frac{2\pi d \sqrt{1 - \frac{n_0^2}{n_1^2}}}{\arctan \sqrt{\frac{n_0^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_0^2}}} \quad (16)$$

评分参考：第（1）问 10 分，①②式各 2 分，③④式各 1 分，给出“入射角  $\theta_{i1} \geq \arcsin \left( \frac{n_0}{n_1} \right)$  时，光被完全限制在波导薄膜里”的结论给 2 分，⑤⑥式各 1 分；第（2）问 10 分，⑦式 2 分，⑨⑩⑪⑫⑬⑭⑮⑯式各 1 分。