2012年北京市中学生数学竞赛 高一年级初赛试题及参考解答

2012年4月15日

试 题

一、选择题（满分36分）

1. 函数 $f(x)=\begin{cases}2+x, & x>0,\\ 5, & x=0,\\ 2^x, & x<0.\end{cases}$ 则 $f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)$ 的值为（　　）.

(A)8　(B)11　(C)$13\frac{1}{4}$　(D)$15\frac{1}{2}$

2. 一个锐角的正弦和余弦恰是二次三项式 ax^2+bx+c 的不同的根，则 a、b、c 之间的关系是（　　）.

(A)$b^2=a^2-4ac$　(B)$b^2=a^2+4ac$

(C)$b^2=a^2-2ac$　(D)$b^2=a^2+2ac$

3. 定义域为 R 的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=3f(x)$，当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=x^2-2x$，则 $f(x)$ 在 $x\in[-4,-2]$ 上的最小值为（　　）.

(A)$-\frac{1}{9}$　(B)$-\frac{1}{3}$　(C)$\frac{1}{3}$　(D)$\frac{1}{9}$

4. 定义在正整数集 Z^+ 上的函数 f，对于每一个 $n\in Z^+$ 和无理数 $\pi=3.14159265358\cdots\cdots$ 满足

$$f(n)=\begin{cases}k^2\text{ 的末位数字，（}\pi\text{ 的小数点后第 }n\text{ 位数字 }k\neq0\text{ 时）；}\\ 3.\quad\text{（}\pi\text{ 的小数点后第 }n\text{ 位数字 }k=0\text{ 时）.}\end{cases}$$

若函数 $f(f(n))$ 的值域记为 M，则（　　）.

(A)$1\notin M$　(B)$5\notin M$

(C)$6\notin M$　(D)$9\notin M$

5. 如图1，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle C=90^\circ$，以 C 为圆心，CB 为半径作圆交 AB 边于 M，交 AC 边于 N，CM 与 BN 交于点 P. 若 $AN=1$，则 $S_{\triangle CPN}-S_{\triangle BPM}$ 等于（　　）.

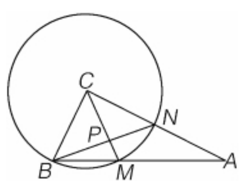

图1

(A)$\frac{1}{8}$　(B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$　(C)$\frac{1}{4}$　(D)$\frac{\sqrt{3}}{4}$

6. 定义在 $(-1,1)$ 上的函数 $f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f(x)>0$，若 $P=f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{5})$，$Q=f(\frac{1}{6})$，$R=f(0)$；则 P,Q,R 的大小关系为（　　）.

(A)$R>P>Q$　(B)$R>Q>P$

(C)$P>R>Q$　(D)$Q>P>R$

二、填空题（满分64分）

1. 求 $\log_2\sin\frac{\pi}{3}+\log_2\tan\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{\pi}{4}$ 的值.

2. 已知 $f(x)$ 是四次多项式，且满足 $f(i)=\frac{1}{i}$，$i=1,2,3,4,5$，求 $f(6)$ 的值.

3. 若 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，求满足方程 $[n\lg2]+[n\lg5]=2012$ 的自然数 n 的值.

4. 如图2，半径为1的两个等圆相交，在两圆的公共部分作一内接正方形 $ABCD$，如果圆心距 O_1O 等于1，试求正方形 $ABCD$ 的面积.

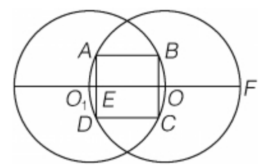

图2

5. 求 $\frac{1^2}{1^2-1\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{3^2}{3^2-3\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{5^2}{5^2-5\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{7^2}{7^2-7\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\cdots+\frac{2011^2}{2011^2-2011\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}$ 的值.

6. 在单位正方形 $ABCD$ 中，分别以 A,B,C,D 四点为圆心，以1为半径画弧，如图3所示. 交点为 M,N,L,K，求阴影部分的面积.

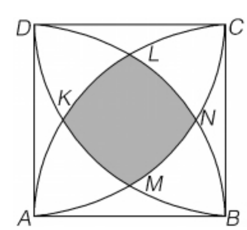

图3

7. 已知二次函数

$f(x)$满足 $f(-10)=9$，$f(-6)=7$，$f(2)=-9$，求 $f(100)$的值.

8. 上底 $BC=2$，下底 $AD=3$ 的梯形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，彼此外切于点 O 的两个圆分别切直线 AD 于点 A 和 D，交 BC 分别于点 K 和 L（如图4），求 AK^2+DL^2 的值.

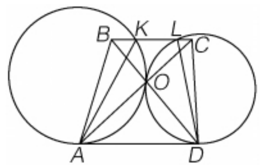

图4

参考答案

一、选择题

1. 解 $f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)=2^{-2}+5+3+5=13\frac{1}{4}$. 答：(C).

2. 解 因为 $a\neq 0$，由韦达定理得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{c}{a}$ 和 $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{b}{a}$，

因为 $\left(\frac{b}{a}\right)^2(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\frac{c}{a}$，

所以 $b^2=a^2+2ac$. 答：(D).

3. 解 由 $f(x+2)=3f(x)$，可得

$f(x+4)=3f(x+2)=9f(x)$，

所以 $x\in[-4,-2]$上的图像，是由 $x\in[0,2]$时的图像向左平移4个单位，再将纵坐标缩短为原来的 $\frac{1}{9}$，

所以 $f(x)$在 $x\in[-4,-2]$上的最小值为 $x\in[0,2]$上最小值的$\frac{1}{9}$，即$\frac{1}{9}f(1)=-\frac{1}{9}$. 答：(A).

4. 解 易知 $f(n)$的值域为$\{1,3,4,5,6,9\}$，$f(f(n))$的值域 $M=\{1,4,5,9\}$. 答：(C).

5. 解 设 $CB=x$，则 $CN=x$，$AC=1+x$. 因为$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，所以 $1+x=\sqrt{3}x$，所以 $x=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

所以 $S_{\triangle CBN}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$，

$S_{\triangle CBM}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}BC^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{3}}{8}$，

所以 $S_{\triangle CPN}-S_{\triangle BPM}=S_{\triangle CBN}-S_{\triangle BCM}=\frac{1}{8}$.

答：(A).

6. 解 由 $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$，

令 $x=y$，得 $f(0)=0$，

令 $x=0$，得$-f(y)=f(-y)$，即 $f(x)$是奇函数，又由已知，当 $x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$，设$-1<x<y<0$，可证得$-1<\frac{x-y}{1-xy}<0$，而 $f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)>0$，所以 $f(x)-f(y)=f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)>0$，于是 $f(x)<f(y)$. 在$(-1,0)$上 $f(x)$单调递减，又 $f(x)$是奇函数，可知在 $x\in(0,1)$时，$f(x)<0$ 也单调递减，所以在$(-1,1)$上 $f(x)$单调递减.

又 $f(x)=f(y)+f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$，

得 $P=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right)=f\left(\frac{3}{7}\right)$，

又因为$\frac{3}{7}>\frac{1}{6}>0$，所以 $R>Q>P$. 答：(B).

二、填空题

1. 解 $\log_2\sin\frac{\pi}{3}+\log_2\tan\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{\pi}{4}=\log_2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\log_2\frac{\sqrt{2}}{4}=\log_2 2^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$.

2. 解 设 $g(x)=xf(x)-1$，则 $g(i)=0$，$i=1,2,3,4,5$. 因为 $f(x)$是四次多项式，所以 $g(x)$为五次多项式，则可设 $g(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$，

所以

$$f(x)=\frac{a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+1}{x},$$

且是四次多项式，所以

$a(-1)(-2)(-3)(-4)(-5)+1=0$，得 $a=\frac{1}{5!}$，

所以 $f(6)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

3. 解 因为 $n\lg 2$ 和 $n\lg 5$ 是无理数，那么可以表示 $n\lg 2=x+y$，其中 $x=[n\lg 2]$，$y=\{n\lg 2\}\neq 0$.

而 $n\lg 5=n\lg\frac{10}{2}=n-n\lg 2=n-x-y=n-x-1+(1-y)$.

因为 $0<y<1$，

所以 $0<1-y<1$，因此$[n\lg 5]=n-x-1$，

由此得到

$2012=[n\lg2]+[n\lg5]=x+(n-x-1)=n-1$，

所以 $n=2013$.

4.解　如图2所示的字母，由相交弦定理得 $AE^2=O_1E\cdot EF$，设 $AE=\dfrac{x}{2}$，则 $O_1E=\dfrac{1-x}{2}$，

$$EF=O_1F-O_1E=2-\frac{1-x}{2}=\frac{3+x}{2}.$$

因此，$\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1-x}{2}\cdot\dfrac{3+x}{2}$，即 $2x^2+2x-3=0$，

解得 $x=\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$(负根舍).

所以，正方形 $ABCD$ 的面积 $=x^2=\left(\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}(4-\sqrt{7})$.

5.解　设加项的通项为 $f(n)=\dfrac{n^2}{n^2-2\times1006n+2\times1006^2}=\dfrac{n^2}{(n-1006)^2+1006^2}$，

$n=2k-1,k=1,2,3,\cdots,1006$. 则

$$f(n)+f(2012-n)=\frac{n^2+(2012-n)^2}{(n-1006)^2+1006^2}=\frac{[1006+(n-1006)]^2+[1006-(n-1006)]^2}{(n-1006)^2+1006^2}=2.$$

这1006项按照 $f(n)$ 与 $f(2012-n)$ 配对，503对，每对的和为2，

所以，所求的值为 $2\times503=1006$.

6.解　根据对称性，如图5所表示的，阴影部分的面积为 u，其余部分是4个 x 和4个 y，于是，等腰曲边形 ABL 的面积 $=u+2y+x=2\times\dfrac{\pi}{6}\times1^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

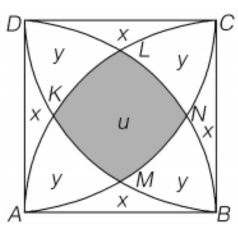

图5

同理，等腰曲边形 ADN 的面积 $=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

因此，曲边形 ANL 的面积 $=u+y=2\times\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)-\dfrac{\pi}{4}\times1^2=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

而枣核形 AC 的面积 $=2y+u=2\times\dfrac{\pi}{4}\times1^2-1^2=\dfrac{\pi}{2}-1$，

所以，阴影部分 $MNLK$ 的面积 $=2\times\left(\dfrac{5\pi}{12}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)=\dfrac{\pi}{3}+1-\sqrt{3}$.

7.解　设 $f(x)=ax^2+bx+c$，则由已知条件得关于 a、b、c 的方程组：

$$\begin{cases}9=100a-10b+c & ①\\ 7=36a-6b+c & ②\\ -9=4a+2b+c & ③\end{cases}$$

由①减③得 $3=16a-2b$　④

由②减③得 $4=8a-2b$　⑤

由④减⑤得 $a=-\dfrac{1}{8}$，

以 $a=-\dfrac{1}{8}$ 代入⑤，解得 $b=-\dfrac{5}{2}$.

再以 $a=-\dfrac{1}{8},b=-\dfrac{5}{2}$ 代入③得 $c=-\dfrac{7}{2}$，

所以 $f(x)=-\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{5}{2}x-\dfrac{7}{2}$，

$$f(100)=-\frac{100^2}{8}-\frac{5\times100}{2}-\frac{7}{2}=-1503.5.$$

8.解　过点 O 作两圆的公切线交 AD 于 P，则 $PO=AP=DP$，这意味着 $\triangle AOD$ 是直角三角形，

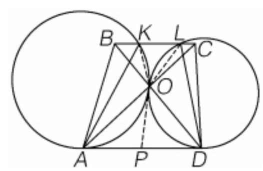

图6

显然 $\triangle AOD\backsim\triangle COB$，其相似比 $\dfrac{BC}{AD}=\dfrac{2}{3}$.

因为 $\angle ACK=\angle CAP=\angle AOP=\angle AKO$，

$\angle KAO=\angle KAO$，

所以，$\triangle ACK\backsim\triangle AKO$，

所以，$\dfrac{AK}{AO}=\dfrac{AC}{AK}$，因此

$$AK^2=AO\cdot AC=AO^2\ \frac{AO+OC}{AO}=\frac{5}{3}\cdot AO^2.$$

同理可得，$DL^2=\dfrac{5}{3}\cdot OD^2$. 所以

$$\begin{aligned}AK^2+DL^2&=\frac{5}{3}\cdot AO^2+\frac{5}{3}\cdot OD^2\\&=\frac{5}{3}\cdot AD^2\\&=\frac{5}{3}\times3^2=15.\end{aligned}$$

(北京数学会普及委员会提供)