2011 年北京科技大学数学竞赛试题

一、选择题（每题 3 分，共 10 小题，计 30 分）

1.下列结果不正确的是（　▲　）

A. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}}=0$　　B. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$

C. $\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$　　D. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$

2.设函数$f(x)$有二阶连续导数，且$f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数$z=f(x)lnf(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是（　▲　）

A. $f(0)<1, f''(0)>0$　　B. $f(0)<1, f''(0)<0$

C. $f(0)>1, f''(0)>0$　　D. $f(0)>1, f''(0)<0$

3.设

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0,\quad x^2+y^2=0 \end{cases}$$

则下列结论不正确的是（　▲　）

A. $f'_x(0,0)$存在　　B. $f'_x(x,y)$在点$(0,0)$连续

C. $f'_y(x,y)$在点$(0,0)$不连续　　D. $f(x,y)$在点$(0,0)$可微

4.由$Lagrange$中值定理有$e^x-1=xe^{\theta(x)}$，其中$0<\theta(x)<1$，则$\lim_{x\to 0}\theta(x)=$（　▲　）

A. 1　　B. -1　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

5.函数$f(x)=(x^2-x+2)|x^3-x|$不可导点的个数（　▲　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

6.关于方程$x^2=x\sin x+\cos x$的实根情况，正确的是（　▲　）

A.恰好有一个实根　　B.恰好有两个实根

C.没有实根　　D.至多有一个实根

7.若$\lim_{n\to\infty}\left(n^p\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)a_n\right)=1(p>1)$，则级数$\sum a_n$（　▲　）

A. $p>2$时收敛　　B. $p>2$时发散

C. $p\geq 2$时收敛　　D. $p\leq 2$时发散

8.设函数$f(x)=x^2, 0\leq x\leq 1$，而$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{i=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty.$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$,$n=1,2,\cdots$，则$S\left(-\frac{5}{2}\right)=$（　▲　）

A. $-\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{2}$

9.设$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x'(0,0)=3$，$f_y'(x,y)=1$，则（ ▲ ）

A.$dz|_{(0,0)}=3dx+dy$

B.曲面$z=f(x,y)$在点$\big(0,0,f(0,0)\big)$ 的法向量为$(3,1,1)$

C.曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$\big(0,0,f(0,0)\big)$ 的切向量为$(3,0,1)$

D. 曲线$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$在点$\big(0,0,f(0,0)\big)$ 的切向量为$(1,0,3)$

10.设$[x+y]$表示不大于$x+y$的最大整数，则

$$\iint\limits_{\substack{0\le x\le 2\\ 0\le y\le 2}}[x+y]dxdy$$

的值为（ ▲ ）

A. -6　　B. 6　　C. 3　　D. -3

二、填空题（每题 4 分，共 13 小题，计 52 分）

1.设$x>0$，极限$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x^n+x^{2n}}=$____▲____

2.极限$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=$____▲____

3.不定积分$\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx=$____▲____

4.两直线$L_1:\frac{x-3}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{3}$和$L_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{0}=\frac{z-2}{1}$的距离为____▲____

5.设函数$F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则$\left.\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|_{x=0,y=2}=$____▲____

6.设$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中函数$f$和$g$具有二阶连续导数，则$x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=$____▲____

7.函数$z=x^2+y^2$在有界闭域$D:(x-1)^2+y^2\le 4$上的最大值为____▲____

8.计算$\int_0^1 t\,dt\int_t^1 e^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}dx=$____▲____

9.设L为自点$A(1,0)$到点$B(0,1)$的圆弧$y=\sqrt{1-x^2}$，则$\int_L[y^2+\sin^2(x+y)]\,dx+[x^2-\cos^2(x+y)]dy=$

____▲____

10.曲面积分$\iint_\Sigma\frac{axdydz+(z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=$____▲____

其中Σ为下半球面$z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$的上侧，a为大于零的任意常数.

11.级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和为____▲____

12.幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-4)^n}{n}(x-1)^{2n-1}$的收敛域为____▲____

13.设$f(x)$为可微函数，且满足方程$f(x)=e^x+e^x\int_0^x[f(t)]^2\,dt$，则$f(x)=$___▲___

三、证明题（两大题，计 18 分）

1.证明:

（1）对于任意正整数$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$

（2）设$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\cdots)$，证明：数列$\{a_n\}$收敛

2.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上无穷次可微，$\left|f^{(n)}(x)\right|\leq M$（$M$为正常数），且$f\left(\frac{1}{n}\right)=0(n=1,2,\cdots)$，证明$f(x)\equiv 0$