2009 年北京科技大学数学竞赛试题

一、选择题（每题 2 分，共 20 小题，计 40 分）

1.设$x_n \le z_n \le y_n$，且$\lim_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$，则$\lim_{n\to\infty} z_n =$（　▲　）

A.存在且等于 0　　B.存在但不一定为 0

C.不一定存在　　D.一定不存在

2.已知当$x \to 0$时，$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f''(t)\,dt$的导数$F'(x)$与$x^2$为等价无穷小，则$f''(0) =$（　▲　）

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D.不存在

3.设$f(x) = \begin{cases} 1, x \ne 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$，$g(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, x \ne 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$，则$x = 0$是下列哪个函数的间断点？（　▲　）

A. $f(x) + g(x)$　　B. $f(x) - g(x)$

C. $\max\{f(x), g(x)\}$　　D. $\min\{f(x), g(x)\}$

4.设ξ为$f(x) = \arctan x$在$[0, b]$上应用$Lagrange$中值定理的中值，则$\lim_{b\to 0}\frac{\xi^2}{b^2} =$（　▲　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

5.设$f(x)$在$[a, b]$上连续，且$\int_a^b f(x)\,dx = 0$，则（　▲　）

A. 在(a, b)内不一定有x使$f(x) = 0$

B. 对于$[a, b]$上的一切x都有$f(x) = 0$

C. 在$[a, b]$的某个小区间上有$f(x) = 0$

D. 在(a, b)内至少有一点使$f(x) = 0$

6.设函数$f(x)$在$(0, +\infty)$内有界且可导，则（　▲　）

A. 当$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$时，必有$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

B. 当$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$时，必有$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

C. 当$\lim_{x\to+\infty} f'(x)$存在时，必有$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

D. 当 $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$存在时，必有$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

7.设$a > 0$，$f(x)$在$(-a, a)$内恒有$f''(x) > 0$，$|f(x)| \le x^2$，记$I = \int_{-a}^a f(x)\,dx$，则有（　▲　）

A. $I = 0$　　B. $I > 0$　　C. $I < 0$　　D. 不确定

8.设$f(x, y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{f(x, y) - f(0,0)}{x^2 + 1 - x\sin y - \cos^2 y} = -3$$

则$f(x, y)$在点$(0,0)$处（　▲　）

A.取极大值　　C.无极值

B.取极小值　　D.不能确定是否有极值

9.设$y=y(x)$是微分方程$y''+(x-1)y'+x^2y=e^x$的满足$y(0)=0$，$y'(0)=1$的解，则$\lim_{x\to 0}\frac{y(x)-x}{x^2}=$（　▲　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

10.设$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在$x=1$处收敛，则$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-1)^n$在$x=0$处（　▲　）

A. 绝对收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 收敛性与a_n有关

11.设连续函数$f(x)$满足$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{f(3-x)}=2$，且$f(1)=0$，则$f'(1)=$（　▲　）

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 2　　D. -2

12.设$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$，则以向量$\vec{a}$、$\vec{b}$为边的平行四边形的对角线长度为（　▲　）

A. $\sqrt{3},\sqrt{11}$　　B. $3,11$　　C. $\sqrt{3},\sqrt{10}$　　D. $\sqrt{2},\sqrt{11}$

13.设S为八面体$|x|+|y|+|z|\le 1$全表面上半部分的上侧，则不正确的是（　▲　）

A. $\iint_S\ y^2dydz=0$　　B. $\iint_S\ ydydz=0$　　C. $\iint_S\ x^2dydz=0$　　D. $\iint_S\ xdydz=0$

14.设f有连续的一阶导数，则$\int_{(0,0)}^{(1,2)}f(x+y)dx+f(x+y)dy=$（　▲　）

A. $2\int_0^1 f(x)\,dx$　　B. $\int_0^3 f(x)\,dx$　　C. $f(3)-f(0)$　　D. 0

15.设$[0,1]$上$f''(x)>0$，则$f'(0)$，$f'(1)$，$f(1)-f(0)$，$f(0)-f(1)$的大小顺序是（　▲　）

A. $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$　　B. $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

C. $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$　　D. $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

16.设常数$\lambda>0$，则级数$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^n\tan\left(\sqrt{n^2+\lambda}\pi\right)$是（　▲　）

A. 条件收敛　　B. 绝对收敛

C. 发散　　D. 敛散性与λ有关

17.设函数$f(x)$可导，$F(x)=f(x)(1+|sin\,x|)$，则$f(0)=0$是$F(x)$在$x=0$处可导的（　▲　）

A. 既非充分条件，又非必要条件　　B. 充分条件，但非必要条件

C. 必要条件，但非充分条件　　D. 充分必要条件

18.设D为$\boldsymbol{xOy}$平面上以$(1,1)$，$(-1,1)$和$(-1,-1)$为顶点的三角形区域，D_1为D在第一象限的部分，则

$$\iint_D(xy+\cos x\sin y)\,dxdy$$

等于（　▲　）

A. $2\iint_{D_1}(\cos x\sin y)\,dxdy$　　B. $2\iint_{D_1}xy\,dxdy$

C. $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,dxdy$　　D. 0

19.设$f(x)$连续，求满足方程$\int_0^x f(s)\,ds+\frac{1}{2}f(x)=x^2$的解为（　▲　）

A. $-e^{-2x}+2x+1$　　B. $e^{-2x}+2x-1$

C. $ce^{-2x}+2x-1$　　D. $ce^{-2x}+2x+1$

20. 判断下列函数组线性相关的是（　▲　）

A. $x,x-1$　　B. $\cos x,\sin x$

C. x,x^2,x^3　　D. $x,x-3,x-5$

二、填空题（每题 2 分，共 20 小题，计 40 分）

1.求$lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$___▲___

2.$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\sqrt[n]{2}\left(1-\cos\frac{1}{n^2}\right)}{\sqrt{n^2+1}-n}=$___▲___

3.$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}=$___▲___

4.设$f(x)=x^3\sin x$，则$f^{(10)}(0)=$___▲___

5.设$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=$___▲___

6.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内可导，且$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e$，$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+C}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，则$c=$

___▲___

7. $\lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x\left[\int_t^2 e^{-u^2}du\right]dt}{(x-2)^2}=$___▲___

8. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}=$___▲___

9.设$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，且$F(0)$=1，$F(x)f(x)=\cos 2x$，则$\int_0^\pi|f(x)|\,dx=$___▲___

10.设$\int_x^{2\ln 2}\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}dt=\frac{\pi}{6}$，则$x=$___▲___

11.$\int_0^\pi\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=$___▲___

12.设$u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中函数$f$和$g$具有二阶连续导数，则$x\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=$___▲___

13.$y=f(x)$二阶可导，且$\frac{dy}{dx}=(4-y)y^\beta(\beta>0)$，若$y=f(x)$的一个拐点是$(x_0,3)$，则$\beta=$___▲___

14.设函数$f(x)=x-[x]$，其中$[x]$表示数的整数部分，则它的$Fourier$系数$a_0=$___▲___，$a_n=$___▲___，（$n\geq 1$），$b_n=$___▲___（$n\geq 1$）.

15.设有一均匀细棒，长为$2l$，质量为m，在棒的延长线上离棒中心为$a(a>l)$处有一质量为m_0的质点M_0，则棒对M_0的吸引力为$F=\frac{kmm_0}{a^2-l^2}$，若已知两细棒的长分别为l_1和l_2，质量分别为m_1和m_2，相邻两端点之间的距离为a，则位于同一直线上的这两均匀细棒之间的吸引力是___▲___

16.积分$\iiint_{\Omega}(x+y+z^2)\,dxdydz=$___▲___，其中$\Omega$由旋转双曲面$x^2+y^2-z^2=1$，平面$z=H$和$z=-H$（$H>0$）所围成.

17.设l为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为$a$，则$\oint_l(xy+3x^2+4y^2)\,ds=$___▲___

18.已知$z=f(x,y)$满足$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2x$，$f(x,0)=1$，$\frac{\partial f(x,0)}{\partial y}=\sin x$，则$f(x,y)=$___▲___

19.设$f(xy)$在区域$D: 1\le xy\le 2, 1\le \frac{y}{x}\le 4$上连续，设$A=\int_1^2 f(x)\,dx$，则$\iint_D f(xy)\,dxdy=$___▲___

20.设$\Omega=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\le z\le 0, a>0\right\}$，$S$为$\Omega$的边界曲面外侧，计算

$$\oiint_S \frac{axdydz+2(x+a)ydzdx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+1}}$$

的值为___▲___

三、证明题（两大题，计 20 分）

1.设函数$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$连续，周期为 1，且$\int_0^1\varphi(x)\,dx=0$，函数$f(x)$在$[0,1]$上有连续导数，设

$$a_n=\int_0^1 f(x)\varphi(nx)\,dx$$

求证：级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛

2.设$a>0$，$f'(x)$在$[0,a]$上连续，则

$$f(0)\le\frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\,dx+\int_0^a|f'(x)|\,dx$$