2005年北京市中学生数学竞赛(高一)

一、选择题(每小题5分,共25分)

1. 如果 $S=\{1,2,3,4,5\}$, $M=\{1,3,4\}$, $N=\{2,4,5\}$, 那么, $(\complement_S M)\cap(\complement_S N)$ 等于( ).

(A) $\varnothing$ (B) $\{1,3\}$ (C) $\{4\}$ (D) $\{2,5\}$

2. 已知 a、b 都是整数. 命题甲:$a+b$ 不是偶数,则 a、b 都不是偶数;命题乙:$a+b$ 不是偶数,则 a、b 不都是偶数. 则( ).

(A)甲真,乙假 (B)甲假,乙真

(C)甲真,乙真 (D)甲假,乙假

3. 若 c、d 是不共线的两个非零平面向量,则下面给出的四组 a、b 中,不共线的一组是( ).

(A) $\mathbf{a}=-2(\mathbf{c}+\mathbf{d})$, $\mathbf{b}=2(\mathbf{c}+\mathbf{d})$

(B) $\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{d}$, $\mathbf{b}=-2\mathbf{c}+2\mathbf{d}$

(C) $\mathbf{a}=4\mathbf{c}-\frac{2}{5}\mathbf{d}$, $\mathbf{b}=\mathbf{c}-\frac{1}{10}\mathbf{d}$

(D) $\mathbf{a}=\mathbf{c}+\mathbf{d}$, $\mathbf{b}=2\mathbf{c}-2\mathbf{d}$

4. 对定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(x)$, 若存在常数 c, 对于任意的 $x_1\in[a,b]$ 有唯一的 $x_2\in[a,b]$, 使得 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=c$, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的“均值”为 c. 那么, 函数 $f(x)=\lg x$ 在 $[10,100]$ 上的均值为( ).

(A) 10 (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

5. 在三角形中,三条边长成等差数列是三边的比为 3∶4∶5 的( ).

(A)充分而不必要条件

(B)必要而不充分条件

(C)充分必要条件

(D)既不充分也不必要的条件

二、填空题(每小题7分,共35分)

1. 在平面直角坐标系中,横、纵坐标都是整数的点称为整点,如 $(-1,7)$ 就是一个整点. 若直线 l 过点 $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ 和 $B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{5}\right)$, 则在 l 上与点 A 距离最近的整点是______.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$, $\angle ACB=$

六、设 $a=\cos^2\alpha$, $b=\cos^2\beta$, $c=\cos^2\gamma$, 则 $0\leqslant a、b、c\leqslant 1$, 且 $a+b+c=1$.

从而,原不等式等价于

$$0\leqslant a^4+b^4+c^4-2(a^2+b^2+c^2)+1 \leqslant ab+bc+ca+abc. \quad ①$$

令 $ab+bc+ca=u$, $abc=v$, 则

$a^2+b^2+c^2=1-2u$,

$a^4+b^4+c^4=2u^2-4u+4v+1$.

于是,式①等价于

$$0\leqslant 2u^2+4v\leqslant u+v. \quad ②$$

因为 $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, 所以,式②的左边显然成立,且仅当 $u=v=0$, 即 $\alpha、\beta、\gamma$ 中两个取 $\frac{\pi}{2}$、一个取 0 时等号成立.

另一方面,式②右边的不等式等价于

$u-2u^2\geqslant 3v$.

因 $u-2u^2=u(1-2u)$

$=(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2)$

$\geqslant(ab+bc+ca)\cdot\frac{(a+b+c)^2}{3}$

$=\frac{1}{3}(ab+bc+ca)(a+b+c)$

$\geqslant\frac{1}{3}\times 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\cdot 3\sqrt[3]{abc}$

$=3abc=3v$.

所以,式②右边成立,即式②成立.

从而,式①成立.

故原不等式成立.

(刘康宁 提供)

30°. 则 $AC+BC$ 的最大值是______.

3. 2 005 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_{2005}$ 满足

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+$$
$$|x_{2004}-x_{2005}|+|x_{2005}-x_1|=1.$$

则 $|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2005}|$ 的最小值等于______.

4. 已知 $x\in\mathbf{R}$. 则函数

$$f(x)=\max\left\{\sin x, \cos x, \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right\}$$

的最大值与最小值的和等于______.

5. 把单位正方体的六个面分别染上 6 种颜色，并画上个数不同的金鸡，各面的颜色与金鸡的个数对应如表 1：

表 1

面上所染颜色	红	黄	蓝	青	紫	绿
该面上的金鸡个数	1	2	3	4	5	6

取同样的 4 个上述的单位正方体拼成一个如图 1 所示的水平放置的长方体. 则这个长方体的下底面总计共画有______个金鸡.

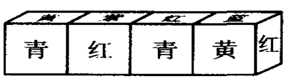

图 1

三、(10 分) 已知 a、b、c 是实数，二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=0$. 求证：$-1$ 与 1 中至少有一个是 $f(x)=0$ 的根.

四、(15 分) 圆内接凸四边形 $ABCD$ 的面积记为 S，$AB=a$，$BC=b$，$CD=c$，$DA=d$. 证明：

(1) $S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$，其中 $p=\frac{a+b+c+d}{2}$；

(2) 如果四边形 $ABCD$ 同时具有外接圆和内切圆，则 $S=\sqrt{abcd}$.

五、(15 分) 设 p 个质数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 构成公差为 $d(d>0)$ 的等差数列，且 $a_1>p$. 求证：

(1) 当 p 是质数时，$p \mid d$；

(2) 当 $p=15$ 时，$d>30\ 000$.

参 考 答 案

一、**1.** A.

易知 $\complement_S M=\{2,5\}$，$\complement_S N=\{1,3\}$，所以，

$(\complement_S M)\cap(\complement_S N)=\varnothing$.

2. B.

a、b 都是整数，$a+b$ 不是偶数，则 $a+b$ 是奇数，a、b 必一奇一偶. 所以，"a、b 都不是偶数"的结论不真；"a、b 不都是偶数"的结论为真.

3. D.

由 $\mathrm{a}=-2(\mathrm{c}+\mathrm{d})=-\mathrm{b}$，知 a、b 共线，排除选项(A)；

$\mathrm{a}=\mathrm{c}-\mathrm{d}=-\frac{1}{2}(-2\mathrm{c}+2\mathrm{d})=-\frac{1}{2}\mathrm{b}$，知 a、b 共线，排除选项(B)；

$\mathrm{a}=4\mathrm{c}-\frac{2}{5}\mathrm{d}=4\left(\mathrm{c}-\frac{1}{10}\mathrm{d}\right)=4\mathrm{b}$，知 a、b 共线，排除选项(C).

事实上，c、d 是不共线的两个平面向量. 则 $\mathrm{a}=\mathrm{c}+\mathrm{d}$ 是非零向量. 若 a、b 共线，则存在唯一的实数 λ，使得 $\mathrm{a}=\lambda\mathrm{b}$，故

$$\mathrm{c}+\mathrm{d}=\lambda(2\mathrm{c}-2\mathrm{d})\Leftrightarrow(1-2\lambda)\mathrm{c}=-(2\lambda+1)\mathrm{d}.$$

当 $1-2\lambda=0$ 时，d 为零向量，与已知不符. 当 $1-2\lambda\neq0$ 时，$\mathrm{c}=\frac{2\lambda+1}{2\lambda-1}\mathrm{d}$，这表明 c、d 是共线的两个非零平面向量，仍与已知不符. 所以，a、b 不共线.

4. C.

设对于任意的 $x_1\in[10,100]$，有唯一的 $x_2\in[10,100]$，使得 $x_1x_2=10^3$. 从而，

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}=\frac{\lg x_1+\lg x_2}{2}$$
$$=\frac{\lg x_1x_2}{2}=\frac{\lg 10^3}{2}=\frac{3}{2}.$$

5. B.

三角形的三条边长为 4、5、6 成等差数列，其比不等于 3∶4∶5；反过来，一个三角形三边的比为 3∶4∶5，设三边长为 $3k$、$4k$、$5k(k>0)$，则成公差为 k 的等差数列. 所以，在三角形中，三条边长成等差数列是三边的比为 3∶4∶5 的必要而不充分条件.

二、**1.** $(-2,-1)$.

设直线 l 的方程为 $y=kx+b$，由题意得

$$\begin{cases}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}k+b,\\ \frac{1}{5}=\frac{1}{4}k+b.\end{cases}$$

解得 $k=\frac{8}{15}$, $b=\frac{1}{15}$.

则直线 l 的方程为 $y=\frac{8}{15}x+\frac{1}{15}$.

显然,$(-2,-1)$ 在 l 上.

将 $x=-1,0,1,2,3$ 分别代入 $y=\frac{8}{15}x+\frac{1}{15}$,求得对应的 y 值都不是整数. 所以,在 l 上距离点 A 最近的整点是 $(-2,-1)$.

2. $8+4\sqrt{3}$.

如图 2,延长 BC 到点 P 使得 $PC=AC$,联结 AP,则 $\angle APB=15°$,故点 P 在以 $AB=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 为弦含弓形角等于 $15°$ 的弓形弧上.

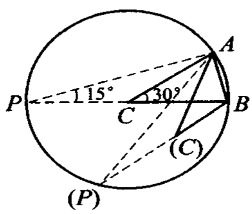

图 2

要 $AC+BC$ 的值最大,也就是要 PB 的值最大,必须且只须 PB 为弓形弧所在圆的直径,此时,$\angle PAB=90°$. 则 $AC+BC$ 的最大值为

$$\frac{AB}{\sin 15°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sin 15°}.$$

由几何方法,作 $\triangle MKN$,使得 $\angle MKN=90°$, $NK=1$, $MN=2$. 此时,$\angle NMK=30°$, $KM=\sqrt{3}$.

如图 3,延长 KM 到点 P,使得 $MP=MN=2$,联结 PN,则 $\angle NPK=15°$. 易知 $\tan 15°=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

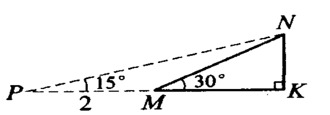

图 3

由勾股定理得 $PN=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

所以,$\sin 15°=\frac{NK}{PN}=\frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

故 $AC+BC$ 的最大值为

$$\frac{AB}{\sin 15°}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{4(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{4}=8+4\sqrt{3}.$$

3. $\frac{1}{2}$.

对任意的正整数 i、j,总有

$|x_i-x_j|\leqslant|x_i|+|x_j|$.

则 $1=|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+\cdots+|x_{2004}-x_{2005}|+|x_{2005}-x_1|$

$\leqslant|x_1|+|x_2|+|x_2|+|x_3|+\cdots+|x_{2004}|+|x_{2005}|+|x_{2005}|+|x_1|$

$=2(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2004}|+|x_{2005}|)$.

所以,$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2005}|\geqslant\frac{1}{2}$.

事实上,当 $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=x_3=\cdots=x_{2005}=0$ 时,恰有

$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2005}|=\frac{1}{2}$.

所以,$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_{2005}|$ 的最小值等于 $\frac{1}{2}$.

4. $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

注意到

$$f(x)=\max\left\{\sin x,\cos x,\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$=\max\left\{\sin x,\cos x,\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right\},$$

显然,$f(x)$ 的最大值为 1. 可以通过作出 $y=\sin x$, $y=\cos x$ 的图像得到 $\max\{\sin x,\cos x\}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$,在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时,达到最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 而在 $x=\frac{5\pi}{4}$ 时,$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的值为 -1. 所以,$f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. 17.

由于 4 个上述的单位正方体完全相同,观察判定:红色面的 4 个相邻面的颜色分别为蓝、黄、青、紫,所以,红色面相对面的颜色是绿色. 而黄色面的 4 个相邻面的颜色分别为青、蓝、红、绿,因此,黄色面相对面的颜色是紫色. 剩下的只能是青色面的相对面蓝色,即长方体的上底面的颜色,对应的下底面的颜色和该面上的金鸡数为:

上底(黄)——下底(紫)——5 个;

上底(紫)——下底(黄)——2 个;

上底(红)——下底(绿)——6 个;

上底(蓝)——下底(青)——4 个.

故这个长方体的下底面总计共画有 17 个金鸡.

三、(1) 由 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=0$,知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有零点.

若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 只有唯一的零

点,则这个零点就是抛物线的顶点.于是,有

$$\frac{a-b-c}{2a}=-\frac{b}{2a},$$ 解得 $a=c$.

由 $\Delta=0$,有 $b^2-4a^2=0$,则 $b=\pm 2a$.故抛物线的顶点横坐标为 $x=\frac{-b}{2a}=\frac{\mp 2a}{2a}=\mp 1$.所以,原二次函数变为 $f(x)=ax^2\pm 2ax+a=a(x\pm 1)^2$,$-1$ 与 1 中至少有一个是 $f(x)=0$ 的根.

若二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 有两个不同的零点,因为

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)$$
$$=\frac{a(a-b-c)^2}{4a^2}+\frac{b(a-b-c)}{2a}+c$$
$$=\frac{(a-b-c)^2+2b(a-b-c)+4ac}{4a}$$
$$=\frac{(a-b-c)(a-b-c+2b)+4ac}{4a}$$
$$=\frac{(a-c)^2-b^2+4ac}{4a}=\frac{(a+c)^2-b^2}{4a}$$
$$=\frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a}=\frac{f(-1)f(1)}{4a},$$

由 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right)=0$,则

$$\frac{f(-1)f(1)}{4a}=0\Leftrightarrow f(-1)=0 \text{ 或 } f(1)=0.$$

故 -1 与 1 中至少有一个是 $f(x)=0$ 的根.

四、(1) 联结 AC.由于四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形,所以,

$$\angle B+\angle D=180^\circ.$$

得 $\cos B=-\cos D$,$\sin B=\sin D$.易知,

$$S=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADC}$$
$$=\frac{1}{2}(ab\sin B+cd\sin D),$$

即 $4S=2(ab+cd)\sin B$.

所以,$16S^2=4(ab+cd)^2\sin^2 B$. ①

由余弦定理得

$$a^2+b^2-2ab\cos B=AC^2=c^2+d^2-2cd\cos D,$$

即 $a^2+b^2-2ab\cos B=c^2+d^2+2cd\cos B$.

故 $a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos B$.

平方得

$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4(ab+cd)^2\cos^2 B$. ②

①+②得

$$16S^2+(a^2+b^2-c^2-d^2)^2=4(ab+cd)^2.$$

故 $16S^2=(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$

$$=(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)\cdot(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)$$
$$=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$$
$$=(a+b+c-d)(a+b-c+d)\cdot(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$
$$=16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

所以,$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(2) 四边形 $ABCD$ 具有外接圆,根据(1)应有

$$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

又四边形 $ABCD$ 同时具有内切圆,因此,

$$a+c=b+d=p.$$

故 $p-a=c$,$p-b=d$,$p-c=a$,$p-d=b$.

代入(1)所证的圆内接四边形的面积公式,得

$$S=\sqrt{abcd}.$$

五、(1) 因为 $a_1>p$,$d>0$,所以,$a_1,a_2,\cdots,a_p$ 都是大于 p 的质数.因此,每一个 $a_i(i=1,2,\cdots,p)$ 都不能被 p 整除.

而 $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 被 p 除时只能取 $p-1$ 个不同的余数,根据抽屉原理,至少有两个数被 p 除的余数相同.设这两个数为 a_m、$a_n(n>m)$.于是,

$$a_n-a_m=(n-m)d$$

能被 p 整除.

但 $0<n-m<p$,p 为质数,所以,$p\nmid(n-m)$.

因此,$p\mid d$.

(2) 设 $p_1,p_2,\cdots,p_{15}$ 这 15 个质数构成公差为 $d(d>0)$ 的等差数列.由于这 15 个质数必都是奇数,所以,公差 d 为偶数,即 $2\mid d$.

由其中的 p_2,p_3,p_4 这 3 个质数成等差数列,$p_2>3$,根据(1)中的结论,得 $3\mid d$.

由 p_3,p_4,p_5,p_6,p_7 这 5 个质数成等差数列,$p_3>5$,根据(1)中的结论,得 $5\mid d$.

由 $2\mid d$,$3\mid d$ 和 $5\mid d$ 且 $(2,3,5)=1$,可得 $30\mid d$.

因此,由 $p_1\geqslant 3$ 知 $p_2\geqslant 33$.但 p_2 为质数,所以,$p_2\geqslant 37$.

于是,由 $p_2,p_3,\cdots,p_8$ 这 7 个质数成等差数列,$p_2>7$,根据(1)中的结论,得 $7\mid d$.

同理,由 $p_2,p_3,\cdots,p_{12}$ 这 11 个质数成等差数列,$p_2>11$,根据(1)中的结论,得 $11\mid d$.

由 $p_2,p_3,\cdots,p_{14}$ 这 13 个质数成等差数列,$p_2>13$,根据(1)中的结论,得 $13\mid d$.

因为 $(30,7,11,13)=1$,所以,$30\times 7\times 11\times 13\mid d$,

即 $30\,030\mid d$.

故 $d\geqslant 30\,030>30\,000$.

(周春荔 提供)