2004 年北京市中学生数学竞赛(高一)

初 赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1.满足条件 $f(x^2)=[f(x)]^2$ **的二次函数是(　　).**

(A) $f(x)=x^2$

(B) $f(x)=ax^2+5$

(C) $f(x)=x^2+x$

(D) $f(x)=-x^2+2\,004$

2.在 R 上定义的函数 $y=\sin x$, $y=\sin|x|$, $y=\sin 2\,004$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ **中,偶函数的个数是(　　).**

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 3

3.方程 $||x|-1|=a$ **恰有三个实数解.则** a **等于(　　).**

(A) 0　(B) 0.5　(C) 1　(D) $\sqrt{2}$

4.实数 a、b、c **满足** $a+b>0$, $b+c>0$, $c+a>0$, $f(x)$ **是 R 上的奇函数,且是严格的减函数,即若** $x_1<x_2$, **就有** $f(x_1)<f(x_2)$. **则(　　).**

(A) $2f(a)+f(b)+f(c)=0$

(B) $f(a)+f(b)+f(c)<0$

(C) $f(a)+f(b)+f(c)>0$

(D) $f(a)+2f(b)+f(c)=2\,004$

5.已知 a、b、c、d **这四个正整数中,** a **被 9 除余 1,** b **被 9 除余 3,** c **被 9 除余 5,** d **被 9 除余 7.则一定不是完全平方数的两个数是(　　).**

(A) a、b　(B) b、c　(C) c、d　(D) d、a

6.正实数列 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 **中,** a_1、a_2、a_3 **成等差数列,** a_2、a_3、a_4 **成等比数列,且公比不等于 1.又** a_3、a_4、a_5 **的倒数成等差数列.则(　　).**

(A) a_1、a_3、a_5 成等比数列

(B) a_1、a_3、a_5 成等差数列

(C) $\frac{1}{a_1}$、$\frac{1}{a_3}$、$\frac{1}{a_5}$ 成等差数列

(D) $\frac{1}{6a_1}$、$\frac{1}{3a_3}$、$\frac{1}{2a_5}$ 成等比数列

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

7.已知 $f(x)=\begin{cases}2^x, & x<0,\\ \sqrt{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \log_{\frac{1}{3}}x, & x>1.\end{cases}$ **则** $f(f(f(-2\,004)))$ **的值等于______.**

8.已知 $a=1+2+\cdots+2\,004$. **则** a **被 17 除的余数为______.**

9.已知 $f(x)=x^2+x-1$. **若** $ab^2\neq 1$, **且** $f(a^{-1})=f(b^2)=0$, **则** $\frac{a}{1+ab^2}=$ ______.

10.如图 1,等腰 Rt△ABC 的直角顶点 C 在等腰 Rt△DEF 的斜边 DF 上,E 在△ABC 的斜边 AB 上.如果凸四边形 ADCE 的面积等于 5 cm^2,那么,凸四边形 ABFD 的面积等于______ cm^2.

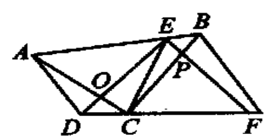

图 1

11.若 a、$b\in$ **R 且** $a^2+b^2=10$, **则** $a-b$ **的取值范围是______.**

12.已知 a、b **是关于** x **的方程** $x^4+m=9x^2$ **的两个实根,且满足** $a+b=4$. **则** m **的值为______.**

13. $\cos 20°\cdot\cos 40°\cdot\cos 60°\cdot\cos 80°=$ ______.

14.将 2 004 表为 n **个彼此不等的正整数的和.则** n **的最大值为______.**

复　赛

一、填空题(每小题8分,共40分)

1. 已知函数 $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$. 那么, $f\left(\frac{1}{2\,004}\right)+f(1)+f(2\,004)=$______.

2. 化简 $(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2=$______.

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_n a_{n+1} a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$, 且 $a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$. 则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,004}=$______.

4. 如图2,已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的半径分别是2和4, $O_1O_2=10$. 则两圆的两条内公切线与一条外公切线所围成的 $\triangle MNP$ 的面积等于______.

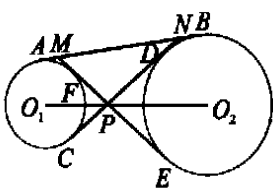

图2

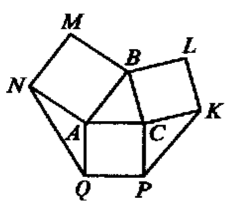

图3

5. 如图3,四边形 $ABMN$、四边形 $BCKL$、四边形 $ACPQ$ 都是正方形. 已知 $S_{\text{正方形}ABMN}-S_{\text{正方形}BCKL}=m$ (m 是正数). 则 $NQ^2-PK^2=$______.

二、(15分)已知 $abc\neq 0$. 求证:

$$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4}+\frac{b^4}{a^4+4b^4+c^4}+\frac{c^4}{a^4+b^4+4c^4}\leqslant\frac{1}{2}.$$

三、(15分)已知 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$. 求证:关于 x 的二次方程

$$x^2-(1-\cos^3\alpha)x+\cos\alpha=0,$$

$$x^2-(1-\sin^3\alpha)x+\sin\alpha=0,$$

$$x^2-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}\,x+\frac{1}{4}=0$$

中至少有一个具有两个不等的实数根.

四、(15分)如图4, O、I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心与内心,已知 $\angle OIB=30°$. 求证: $\angle BAC=60°$.

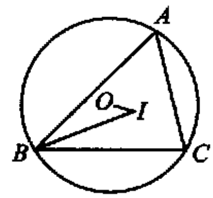

图4

五、(15分)已知数列 $\{a_n\}$:

$$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\ (n=1,2,\cdots),$$

其中 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根. 求证:

(1) 对任意正整数 n,都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$;

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中的项都是正整数,且任意相邻两项都互质.

参考答案

初　赛

一、1. A.

设 $f(x)=ax^2+bx+c$. 代入、展开并确定 $a=1$, $b=0$, $c=0$.

2. D.

根据奇函数定义与偶函数定义直接判定, $y=\sin|x|$, $y=\sin 2\,004$, $y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ 都是偶函数.

3. C.

用图像法:画出函数 $y=||x|-1|$ 的图像(如图5),当平行于 Ox 轴的直线 $y=a$ 与函数 $y=||x|-1|$ 的图像恰有三个交点时, $a=1$.

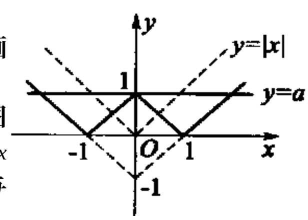

图5

4. B.

$x\in\mathbf{R}$, $f(x)$ 是奇函数,则 $f(0)=0$. 因为 $f(x)$ 是严格的减函数,所以,对 $x>0$,有 $f(x)<0$.

又 $a+b>0$,则

$a>-b\Rightarrow f(a)<f(-b)=-f(b)$

$\Rightarrow f(a)+f(b)<0$.

同理, $f(b)+f(c)<0$, $f(c)+f(a)<0$.

相加得 $2[f(a)+f(b)+f(c)]<0$.

5. B.

设整数 x 被9除余0, ±1, ±2, ±3, ±4,则 x^2 被9除余0,1,4,7. 那么,被9除余2,3,5,6,8的正整数一定不是完全平方数,故 b、c 一定不是完全平方

数.

6. A.

由已知得$\begin{cases} 2a_2=a_1+a_3, & ① \\ a_3^2=a_2a_4, & ② \\ a_3^{-1}+a_5^{-1}=2a_4^{-1}. & ③ \end{cases}$

由式③得$\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}=\dfrac{2}{a_4}$. ④

由式②得 $a_4=\dfrac{a_3^2}{a_2}$,将其代入式④,有

$\dfrac{a_3+a_5}{a_3a_5}=\dfrac{2a_2}{a_3^2}=\dfrac{a_1+a_3}{a_3^2}$

$\Rightarrow a_3^2+a_3a_5=a_1a_5+a_3a_5$

$\Rightarrow a_3^2=a_1a_5$.

二、**7.** $-\dfrac{1}{2}$.

由已知,有 $f(-2\,004)=2^{-2\,004}=\dfrac{1}{2^{2\,004}}$.

由于 $0\leqslant\dfrac{1}{2^{2\,004}}\leqslant1$,则

$f(f(-2\,004))=f\left(\dfrac{1}{2^{2\,004}}\right)=\sqrt{3}$.

因此,$f(f(f(-2\,004)))=f(\sqrt{3})$

$=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{3}=-\dfrac{1}{2}$.

8. 1.

$a=1+2+\cdots+2\,004$

$=\dfrac{2\,004\times2\,005}{2}=2\,009\,010$.

则 2 009 010 被 17 除商 118 177,余 1.

9. -1.

由 $f(x)=x^2+x-1$,$f(a^{-1})=f(b^2)=0$,$ab^2\neq1$ 知 a^{-1}、b^2 是 $f(x)=x^2+x-1$ 的两个实根.

由韦达定理得$\dfrac{1}{a}+b^2=-1$,$\dfrac{b^2}{a}=-1$.

则$\dfrac{1}{a}+b^2=\dfrac{b^2}{a}=-1$.

于是,有 $1+ab^2=-a$.

10. 10.

凸四边形 $ECFB$ 与凸四边形 $ADCE$ 中,对角线 $BC=AC$,$EF=DE$.由于 $\angle OCP=\angle PEO=90°$,则

$\angle EOC+\angle EPC=180°$.

从而,$\sin\angle EOC=\sin\angle EPC$.

所以,$S_{四边形ECFB}=\dfrac{1}{2}EF\cdot BC\sin\angle EPC$

$=\dfrac{1}{2}DE\cdot AC\sin\angle EOC=S_{四边形ADCE}=5\ \mathrm{cm}^2$.

故 $S_{四边形ABFD}=S_{四边形ADCE}+S_{四边形ECFB}$

$=5+5=10(\mathrm{cm}^2)$.

11. $[-2\sqrt{5},2\sqrt{5}]$.

由 a、$b\in\mathbf{R}$ 且 $a^2+b^2=10$,得

$(a-b)^2=2(a^2+b^2)-(a+b)^2$

$\leqslant2(a^2+b^2)=20$.

则 $|a-b|\leqslant2\sqrt{5}$.

12. 12.25.

方程可化为 $x^4-9x^2+m=0$.则 a^2、b^2 是 $y^2-9y+m=0$ 的根,其中 $y=x^2$.由韦达定理,得

$a^2+b^2=9$,$a^2b^2=m$.

又 $a+b=4$,则 $(a+b)^2=16$,可得 $ab=\dfrac{7}{2}$.

13. $\dfrac{1}{16}$.

$\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos60°\cdot\cos80°$

$=\dfrac{2\sin20°\cdot\cos20°\cdot\cos40°\cdot\cos60°\cdot\cos80°}{2\sin20°}$

$=\dfrac{2\sin40°\cdot\cos40°\cdot\cos60°\cdot\cos80°}{4\sin20°}$

$=\dfrac{2\sin80°\cdot\cos80°\cdot\cos60°}{8\sin20°}=\dfrac{\sin160°}{16\sin20°}=\dfrac{1}{16}$.

14. 62.

将 2 004 表为 n 个彼此不等的正整数的和.要 n 最大,只须写成从 1 开始的连续的自然数的和即可.

由 $1+2+\cdots+n\leqslant2\,004$,得

$\dfrac{n(n+1)}{2}\leqslant2\,004$.

整理得 $n^2+n-4\,008\leqslant0$.

解得 $n\leqslant62$.

复　赛

一、**1.** $\dfrac{3}{2}$.

若 $ab=1$,则

$f(a)+f(b)=\dfrac{a^2}{1+a^2}+\dfrac{b^2}{1+b^2}$

$=\dfrac{1+a^2+1+b^2}{1+a^2+b^2+a^2b^2}=1$.

于是,$f(1)=\dfrac{1}{2}$,$f(2\,004)+f\left(\dfrac{1}{2\,004}\right)=1$.

所以,$f\left(\dfrac{1}{2\,004}\right)+f(1)+f(2\,004)=\dfrac{3}{2}$.

2. 16.

$(\log_34+\log_29)^2-(\log_34-\log_29)^2$

$=4\log_34\cdot\log_29=4\times\dfrac{\lg4}{\lg3}\times\dfrac{\lg9}{\lg2}$

$=4\times\dfrac{2\lg2}{\lg3}\times\dfrac{2\lg3}{\lg2}=16$.

3. 4 008.

将 $a_1=1$,$a_2=2$ 代入 $a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+$

a_{n+2},得 $a_3=3$.

由 $a_na_{n+1}a_{n+2}=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$,

$a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$,

相减得 $(a_{n+3}-a_n)(a_{n+1}a_{n+2}-1)=0$.

由于 $a_{n+1}a_{n+2}\neq 1$,所以,$a_{n+3}=a_n$.

因此,数列$\{a_n\}$是周期数列.

故 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,004}$

$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{2\,002}+a_{2\,003}+a_{2\,004})$

$=(1+2+3)\times 668=4\,008$.

4. $\frac{32}{3}$.

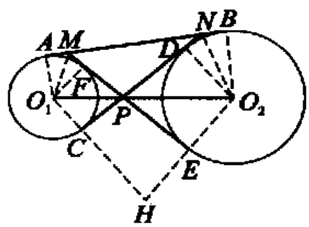

图6

如图6,求得外公切线 $AB=4\sqrt{6}$,内公切线 $CD=EF=8$,$O_1P=\frac{10}{3}$,$O_2P=\frac{20}{3}$. 由勾股定理计算得

$$PC=PF=\frac{8}{3},\ PD=PE=\frac{16}{3}.$$

设 $MA=MF=x$,$ND=NB=y$.

由切线长定理得 $MB=ME$.

于是,$AB-x=8+x$. 所以,$x=2\sqrt{6}-4$.

同理可得 $y=2\sqrt{6}-4$.

此时,计算得

$$S_{\text{梯形}AO_1O_2B}=\frac{(2+4)\times 4\sqrt{6}}{2}=12\sqrt{6}.$$

$$S_{\text{四边形}AO_1FM}=2(2\sqrt{6}-4),$$

$$S_{\text{四边形}BO_2DN}=4(2\sqrt{6}-4),$$

$$S_{\triangle O_1FP}=\frac{8}{3},\ S_{\triangle O_2DP}=\frac{32}{3}.$$

故 $S_{\triangle MPN}=12\sqrt{6}-2(2\sqrt{6}-4)-4(2\sqrt{6}-4)-\frac{8}{3}-\frac{32}{3}$

$=\frac{32}{3}$.

5. $3m$.

$NQ^2=AN^2+AQ^2-2AN\cdot AQ\cos\angle NAQ$

$=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle NAQ$,

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$.

因为 $\angle NAQ+\angle BAC=180°$,

$\cos\angle NAQ=-\cos\angle BAC$,

所以,$NQ^2+BC^2=2AB^2+2AC^2$.

类似可得 $PK^2+AB^2=2BC^2+2AC^2$.

故 $NQ^2-PK^2=3AB^2-3BC^2=3m$.

二、因为 $4a^4+b^4+c^4=2a^4+a^4+b^4+a^4+c^4$

$\geqslant 2a^4+2a^2b^2+2a^2c^2$,

所以,$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4}\leqslant\frac{a^4}{2a^4+2a^2b^2+2a^2c^2}$

$=\frac{a^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$.

同理可得 $\frac{b^4}{a^4+4b^4+c^4}\leqslant\frac{b^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$,

$\frac{c^4}{a^4+b^4+4c^4}\leqslant\frac{c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$.

三式相加得

$\frac{a^4}{4a^4+b^4+c^4}+\frac{b^4}{a^4+4b^4+c^4}+\frac{c^4}{a^4+b^4+4c^4}$

$\leqslant\frac{a^2}{2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{b^2}{2(a^2+b^2+c^2)}+\frac{c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a^2+b^2+c^2)}=\frac{1}{2}$.

当 $a=b=c\neq 0$ 时,上式等号成立.

三、将三个方程的判别式分别记为 Δ_1、Δ_2、Δ_3,则

$\Delta_1=(1-\cos^3\alpha)^2-4\cos\alpha$,

$\Delta_2=(1-\sin^3\alpha)^2-4\sin\alpha$,

$\Delta_3=\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2-1$.

显然,如果 $\cos\alpha<0$,则有 $\Delta_1>0$. 因此,方程 $x^2-(1-\cos^3\alpha)x+\cos\alpha=0$ 有两个不等的实数根.

如果 $\sin\alpha<0$,则有 $\Delta_2>0$. 因此,方程 $x^2-(1-\sin^3\alpha)x+\sin\alpha=0$ 有两个不等的实数根.

如果 $\cos\alpha\geqslant 0$ 且 $\sin\alpha\geqslant 0$,由已知 $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$,$1-\sin\alpha\neq 0$,则 $\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}>1$. 所以,

$\Delta_3=\left(\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)^2-1>0$,

此时,方程 $x^2-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}x+\frac{1}{4}=0$ 有两个不等的实数根.

综上可得,题设的三个方程中,至少有一个具有两个不等的实数根.

四、如图7,联结 AI 并延长交 $\odot O$ 于 D,联结 BD. 则 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点. 于是,

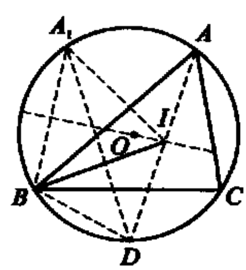

图7

$\angle IBD$

$=\angle IBC+\angle CBD$

$=\frac{\angle ABC}{2}+\angle CAD$

$=\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle BAC}{2}$,

$\angle BID$

2004 年安徽省高中数学竞赛(初赛)

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设 $a < b < 0$. **则下列不等关系中,不成立的是**(　　).

(A) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$　　(B) $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$

(C) $|a| > |b|$　　(D) $a^2 > b^2$

2. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - x^2)$ **的单调递减区间是**(　　).

(A) $(0,2)$　　(B) $[1,+\infty)$

(C) $[1,2)$　　(D) $(0,1]$

3. 已知集合 $S \subseteq \{1,2,\cdots,26\}$,**且满足** S **中任何 2 个元素的和都不能被 5 整除. 则集合** S **中元素的个数最多是**(　　)**个.**

(A) 10　(B) 11　(C) 12　(D) 13

4. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. **则** $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha$ **与 1 的大小关系是**(　　).

(A) $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha > 1$

(B) $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha < 1$

(C) $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha = 1$

(D) 大小与 α 的取值有关

5. 如图 1,正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ **的侧面** $AA'B'B$ **内有一点** M **到两直线** AB、$B'C$ **的距离相等. 那么,** M **的轨迹是**(　　).

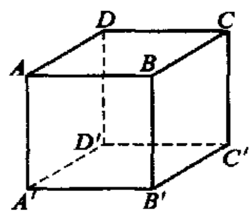

图 1

(A) 抛物线的一部分

(B) 双曲线的一部分

(C) 椭圆的一部分

(D) 线段

6. 已知 $A(a,b)$,$B(c,d)$,**且**

$= \angle IBA + \angle IAB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle BAC}{2}$.

所以, $\angle IBD = \angle BID \Rightarrow ID = BD$.

作 B 关于 OI 的对称点 A_1,则 A_1 在 $\odot O$ 上,有

$IA_1 = IB$, $\angle OIA_1 = \angle OIB = 30°$.

所以, $\angle BIA_1 = \angle OIB + \angle OIA_1 = 60°$.

因此, $\triangle A_1BI$ 是等边三角形,有 $A_1B = A_1I$.

又 $ID = BD$,则 A_1D 是线段 BI 的垂直平分线,也是 $\angle BA_1I$ 的平分线.

故 $\angle BAD = \angle BA_1D = \frac{1}{2}\angle BA_1I = 30°$.

因此, $\angle BAC = 2\angle BAD = 60°$.

五、(1) 因为 α、β 是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的两个根,根据韦达定理,有

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -1$.

故 $\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}$

$= (\alpha + \beta)(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) - \alpha\beta(\alpha^n - \beta^n)$

$= (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) + (\alpha^n - \beta^n)$.

所以, $\frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$,

即　$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

(2) 对数列 $\{a_n\}$,由

$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ $(n = 1,2,\cdots)$,

得　$a_1 = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} = 1$, $a_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$.

再由对任意正整数 n,都有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,所以,数列 $\{a_n\}$ 中的项都是正整数.

下面证明,任意相邻两项都互质.

如若不然,设 $(a_{n+2}, a_{n+1}) = d > 1$. 由对任意正整数 n,都有 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,则

$d = (a_{n+2}, a_{n+1}) = (a_{n+1}, a_n) = (a_n, a_{n-1}) = \cdots$

$= (a_4, a_3) = (a_3, a_2) = (1,1) = 1$,

与 $d > 1$ 矛盾.

因此,数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项都互质.

(周春荔　整理)