如图1，$\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 相交于 A，B 两点，过点 A 任作两条割线分别交 $\odot O_1$ 于 C，E，交 $\odot O_2$ 于 D，F，过 C，D 两点的切线交于 P，过 E，F 两点的切线交于 Q.

求证：$BP = BQ$ 的充要条件是 $CD = EF$.

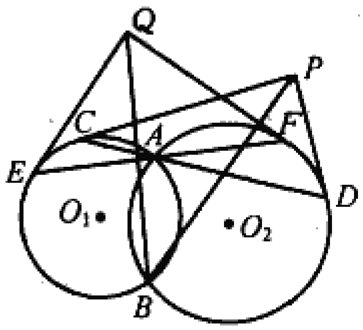


图 1

如图 2，$\triangle ABC$ 中，$AB > BC > CA$，$AB = 6$，$\angle C - \angle B = 90^\circ$，圆 O 为 $\triangle ABC$ 的内切圆，E 是 BC 边上的切点，EF 为圆 O 的直径. 射线 AF 交 BC 边于点 D. 若 DE 等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，求边 BC、AC 的长.

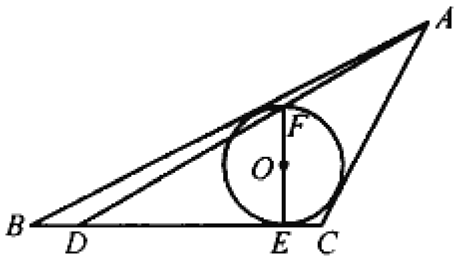


图 2

二

一、(50分)已知$\triangle ABC$内切$\odot O$于点D、E、F，延长CO交EF于M，延长BO交EF于G. 证明：$S_{\triangle BOC}=S_{四边形AMOG}$.

一、(50 分) 设 $\angle XOY = 90^{\circ}$，P 为 $\angle XOY$ 内一点，且 $OP = 1$，$\angle XOP = 30^{\circ}$. 过点 P 任作一直线分别交射线 OX，OY 于点 M，N. 求 $OM + ON - MN$ 的最大值.

一、(50 分) 设 D 是给定 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一动点，P 分 AD 为定比 λ，设 BP 交 AC 于 E，CP 交 AB 于 F. 求 $\triangle AEF$ 面积的最大值.

一、(50 分) 设 $\triangle ABC$ 内接于单位圆 $\odot O$，且圆心 O 在 $\triangle ABC$ 的内部. 若 O 在边 BC、CA、AB 上的射影分别为点 D、E、F，求 $OD+OE+OF$ 的最大值.

一、(50 分)已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于两不同点 A、B，点 P、E 在 $\odot O_1$ 上，点 Q、F 在 $\odot O_2$ 上，且满足 EF 为两圆的公切线，$PQ \parallel EF$，PE 与 QF 相交于点 R. 证明：$\angle PBR = \angle QBR$.

一、(50 分) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 与 AB、AC 边分别相切于 E、F，射线 BI、CI 分别交 EF 于 M、N. 求证：四边形 $AMIN$ 与 $\triangle IBC$ 的面积相等.

一、(50 分) 如图 1,BC 是 $\triangle CEF$ 外接圆 $\odot O$ 的直径,A 是 $\overset{\frown}{EF}$ 上一点,D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,过点 O 作平行于 DA 的直线交 AC 于点 J. 如果 J 是 $\triangle CEF$ 的内心,试求 $\angle ACF$ 的度数.

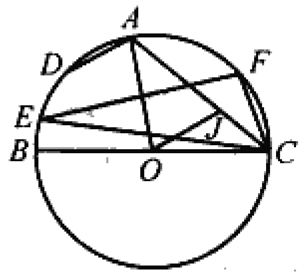


图 1

四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$，设 AB、CD 相交于点 P，$\triangle ABC$、$\triangle BCD$ 的内心分别为 O_1、O_2，直线 O_1O_2 与 AB、CD 分别交于点 E、F，求证 $PE = PF$.

一、(50 分) 如图 1，$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于 A、B 两点，由点 B 作 $\odot O_2$ 的弦 BC，联结 AC 交 $\odot O_1$ 于点 D. 求证：$BC=CD$ 的充要条件是 $\odot O_2$ 经过 $\odot O_1$ 的圆心 O_1.

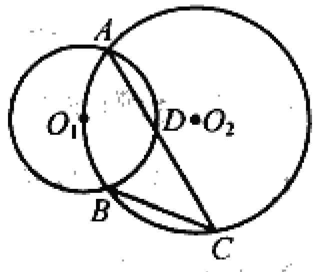


图 1

一、(50 分) 如图 3,等腰直角 $\triangle ABC$ 中,D 为斜边 AB 的中点,过直角顶点 C 作 $CC' \parallel AB$,又点 E、F、M 分别在边 AC、BC、EF 上,满足 $\frac{CE}{AE}=\frac{BF}{CF}=\frac{FM}{EM}$,过点 M 作 $MH \perp CC'$ 于 H. 试比较 MD 与 MH 的大小.

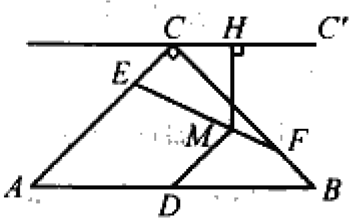


图 3

一、(50 分) 如图 2，在 $\triangle ABC$ 中，内角平分线 BD，CE 相交于点 I，点 D，E 分别在两边 AC，AB 上，过 I 作 DE 的垂线 IP，垂足 P 在 DE 上，PI 的延长线交 BC 边于点 Q. 求证：$IQ=2IP$ 的充分必要条件是 $\angle BAC=60^\circ$.

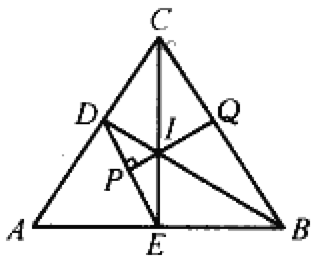


图 2

一、（本题 50 分）已知圆内接四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC，BD 交于点 E，对边 BA，CD 的延长线交于点 F，设 $\triangle EAD$，$\triangle EBC$，$\triangle FAD$，$\triangle FBC$ 的外心分别为 O_1，O_2，O_3，O_4，直线 EF 分别与圆 O_1，O_2 交于不同于 E 的点 P、Q，分别与圆 O_3，O_4 交于不同于 F 的点 U，V，证明 $PU = QV$.

一、(50 分) 如图 3，在 $\triangle PAB$ 中，E、F 分别是边 PA、PB 上的点，在 AP、BP 的延长线上分别取点 C、D，使 $PC = AE$，$PD = BF$，M、N 分别是 $\triangle PCD$、$\triangle PEF$ 的垂心. 证明：$MN \perp AB$.

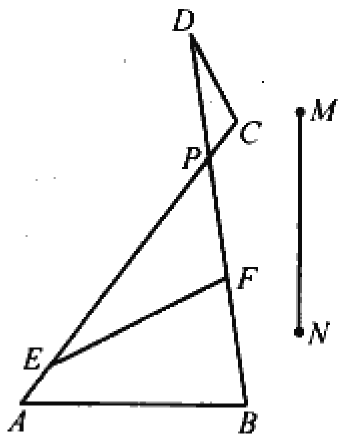


图 3

一、(本题 50 分) 锐角三角形 ABC 的内切圆 Ω 切 BC 于点 K，AD 为三角形 ABC 的高，M 为 AD 的中点，直线 KM 交 Ω 于另一点 N. 求证：三角形 BCN 的外接圆与 Ω 相切于点 N.

一、（本题 50 分）如图 1，$\triangle ABC$ 中，a，b，c 是对应边，M，N，P 分别是 BC，CA，AB 的中点，M_1，N_1，P_1 在 $\triangle ABC$ 的边上，且满足 MM_1，NN_1，PP_1 分别平分 $\triangle ABC$ 的周长. 证明：

（1）MM_1，NN_1，PP_1 交于一点 K；

（2）$\frac{KA}{BC}$、$\frac{KB}{CA}$、$\frac{KC}{AB}$ 中至少有一个不小于$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

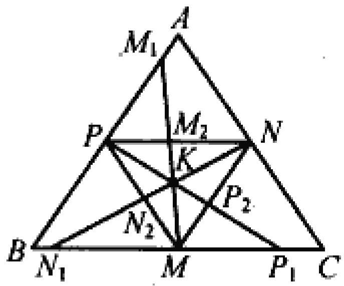


图 1

一、(50 分) 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, O 是 BC 的中点, 以 O 点为圆心的圆分别切 AB、AC 于点 E、F, 在 $\odot O$ 的 $\overset{\frown}{EF}$ 上任取一点 D, 过 D 作圆 O 的切线分别交 AB、AC 于点 P、Q, 联结 CP 交 EF 于点 R. 求证: $QR \parallel AB$.

一、(50 分)在等边 $\triangle ABC$ 内任取一点 P,使 $\angle APB > 150^{\circ}$,联结 PA、PB、PC,记 $PA = a$, $PB = b$, $PC = c$.

(1) 证明:以 a、b、c 为边可以组成一个钝角三角形,记作 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中,作边 A_1B_1 上的高 h_c,求证:$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\frac{1}{c}+\frac{1}{h_c}$.

一、(50 分) 如图 2，P 为 $\odot O$ 外一点，PA、PB 是 $\odot O$ 的两条切线，切点分别为 A、B，$\odot O$ 的割线 PCD 交 AB 于点 E，$EF \perp PA$，垂足为 F. 求证：FE 平分 $\angle CFD$.

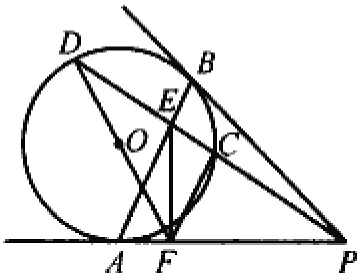
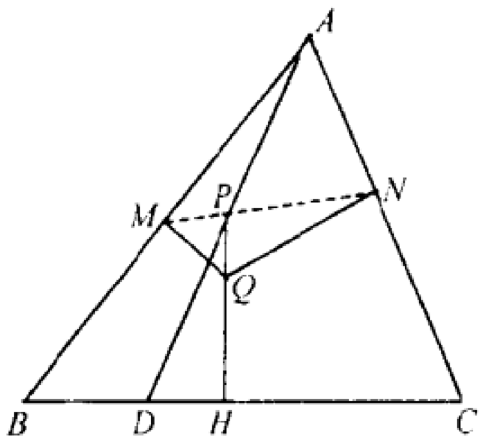


图 2

$\odot O$、$\odot I$ 分别是$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆，$\odot O$ 半径为 6，$\odot I$ 半径为 2. $\odot I$ 分别切 AB、AC、BC 于点 F、E、D，M 为$\triangle DEF$ 的重心. 试求$\dfrac{IM}{OM}$的值.

如图所示，$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上的一定点. P 为 AD 上的动点，$PH \perp BC$ 于 H，Q 为 PH 上一点，使得 Q 向 AB、AC 的二垂足与 P 点共线. 求 Q 点的轨迹.



过$\triangle ABC$顶点C作$l /\!/ AB$，$\angle A$平分线交BC于D，交l于E，$\angle B$平分线交AC于F，交l于G，如果$DE=GF$，求证：$AC=BC$.

梯形 $ABCD$ 中，AB 平行于 CD，作点 $F\in AB$，使 $CF=DF$. 设 AC 与 BD 相交于点 E，O_1，O_2 分别为 $\triangle ADF$，$\triangle BCF$ 的外心．求证：$EF\perp O_1O_2$.

圆内接五边形 $ABCDE$ 中，AD 交 BE 于 S，CS 延长线上有 1 个点 F（F 在五边形 $ABCDE$ 外），满足 $\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1$，求证：$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DB}=1$.

延长$\triangle ABC$三顶点A,B,C和内心I的连线，分别交$\triangle ABC$的外接圆于D,E,F.求证：

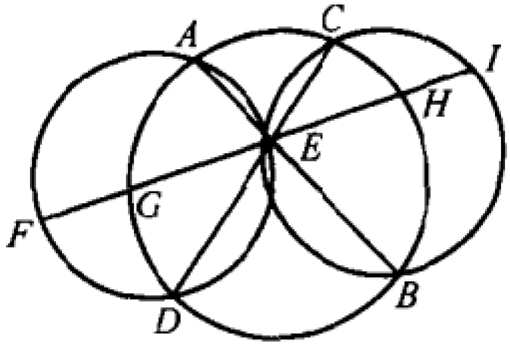
1. $\triangle DEF$的周长$\geqslant\triangle ABC$的周长；

2. $\triangle DEF$的内切圆半径$\geqslant\triangle ABC$的内切圆半径.

圆 C 外一点 K,到 C 的切线是 KL 和 KN,在 KN 延长线上取一点 M,$\triangle KLM$ 的外接圆和 C 再在一点 P 相交,Q 是 N 到 LM 的垂足.求证:$\angle MPQ=2\angle KML$.

O、G、H 分别是锐角$\triangle ABC$ 的外心,重心,垂心,若 B、O、G、H、C 共圆.求证$\triangle ABC$ 是正三角形.

如图 4 所示,圆内两弦 AB 与 CD 相交于 E 点,过 E 的一条直线交圆 AED 和圆 CEB 顺次于 F、G、H、I. 求证:$FG = HI$.



1. $\triangle ABC$ 中，$AB=12$，$AC=16$，M 为边 BC 的中点，点 E、F 分别在边 AC 与 AB 上，直线 EF 与 AM 相交于 G. 若 $AE=2AF$，求比值 $\frac{EG}{GF}$.

2. E 为圆外 1 点. 弦 EAB 与 EDC 的交角为 40°，若 $AB=BC=CD$，求 $\angle ACD$.

锐角$\triangle ABC$中,内心为I,外心为O.

1. 如果$\angle B=60°$,$|OI|=|AB-AC|$.

求证:$\triangle ABC$是等边三角形.

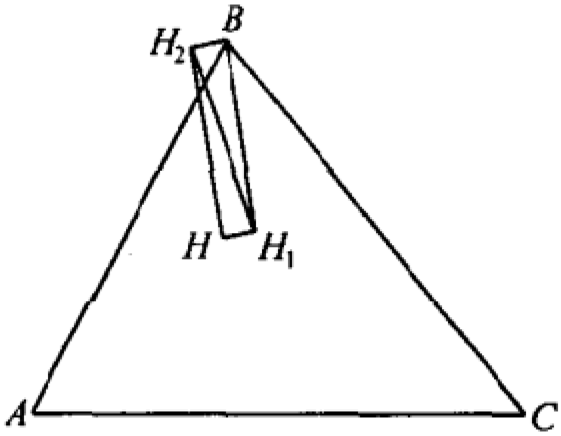
2. 如果$AB<AC$,$IO=\frac{1}{2}(AC-AB)$.

求证:$S_{\triangle IAO}=\frac{1}{2}(S_{\triangle BAO}-S_{\triangle CAO})$.

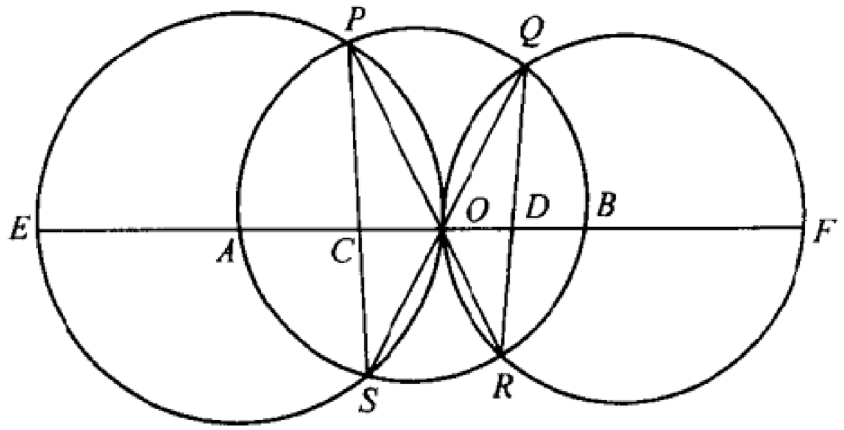
已知锐角三角形 ABC 中，AD 是 BC 边上的高，H 是垂心，以 A 为圆心，以 $\sqrt{AH \cdot AD}$ 为半径作圆交以 BC 为直径的圆于 P,Q 两点，求证：P,Q,H 共线．且若 B,P 与 C,Q 在直线 AD 异侧，则 BQ,CP,AD 3 线共点．

（如下图所示）设$\triangle ABC$的垂心为H，过H作$\angle B$的平分线及外角平分线的垂线，垂足分别为H_1及H_2.

证明：H_1H_2平分AC

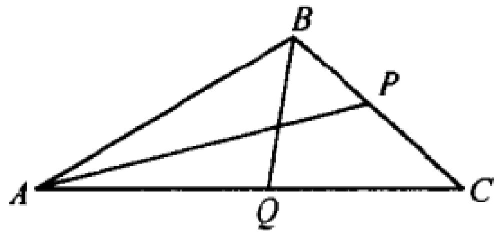


如图所示，凸四边形 $PQRS$ 内接于圆 W，$\triangle POS$ 和 $\triangle QOR$ 的外接圆为 W_1，W_2，其中 O 为 PR 和 QS 的交点，过 O 的直线 EF 交 W_1 于 E 点，交 W_2 于 F 点，EF 交 $\odot W$ 于 A、B 两点，求证：$AE=BF$.



若锐角$\triangle XYZ$内存在1点I使得I到$\triangle XYZ$关于3边的对称点构成正三角形，则I叫做$\triangle XYZ$的正则点。现以$\triangle ABC$的3边向外作锐角三角形$\triangle ABN$，$\triangle ACM$，$\triangle BCL$，使得这3个三角形内都存在正则点，且$\triangle ABN \backsim \triangle AMC \backsim \triangle LBC$。求证：$\triangle ABN$，$\triangle ACM$，$\triangle BCL$的正则点构成正三角形。

在$\triangle ABC$中，AP平分$\angle BAC$，AP交BC于P，BQ平分$\angle ABC$，BQ交CA于Q. 已知$\angle BAC = 30^\circ$且$AB + BP = AQ + QB$. 求$\triangle ABC$各内角的度数的可能值.



M 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中点,$\angle MAC = 15^{\circ}$,求$\angle B$ 的最大值.

在边长为 a 的正$\triangle ABC$ 中，有动点 P(P 可在边界上)，分别求 $PA \cdot PB \cdot PC$ 和 $PA+PB+PC$ 最大值.

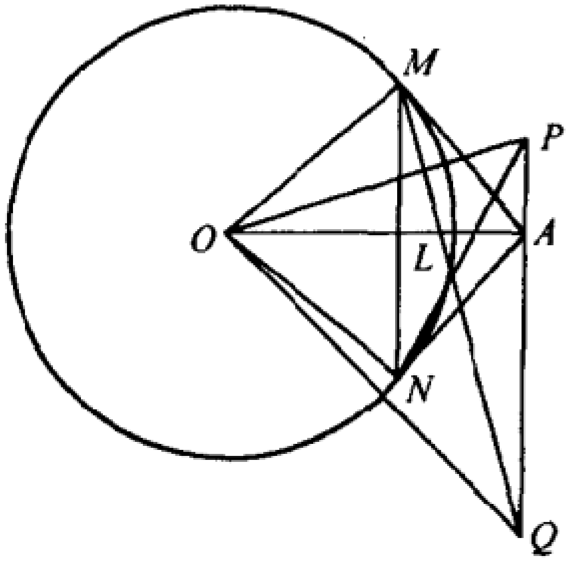
可否将一个凸四边形划分为若干凹四边形？

已知 P 为锐角$\triangle ABC$内一点，证明 P 是外心的充要条件为：

$$PA^2\sin 2A+PB^2\sin 2B+PC^2\sin 2C=4R^2\sin A\sin B\sin C$$

如图所示：AM 和 AN 是圆 O 的切线，M、N 是切点，L 是劣弧 MN 上异于 M、N 的点，过点 A 平行于 MN 的直线分别交 ML、NL 于点 P、Q，若 $S_{\odot O}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}S_{\triangle ABC}$.

求证：$\angle POQ=60^{\circ}$

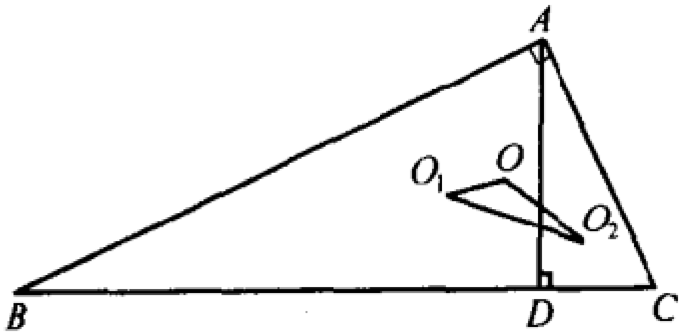


设四边形 $ABCD$ 的一组对边中点的连线为 l，l 的长度为 a，另两边中点到 l 的距离都是 b.

求证：$S_{\text{四边形}ABCD}=2\cdot ab$

已知：$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC = \mathrm{Rt}\angle$，$AD$ 是 BC 边上的高，O，O_1，O_2 分别为 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的内心.

求证：$\triangle OO_1O_2$ 的外心在 BC 上.



一、【证明】 如图 4，连接 EB，CB，AB，DB，FB，则 $\angle EBC=\angle EAC=\angle FAD=\angle FBD$.

记线段 EC 与 DF 的交点为 R，则由 $\angle ECB=\angle EAB=\angle BDR$ 知 B，C，R，D 四点共圆.

而 $\angle PCB+\angle PDB=(180^\circ-\angle CAB)+(180^\circ-\angle BAD)=180^\circ$，则 B，C，P，D 四点共圆. 从而 B，C，R，P，D 五点共圆.

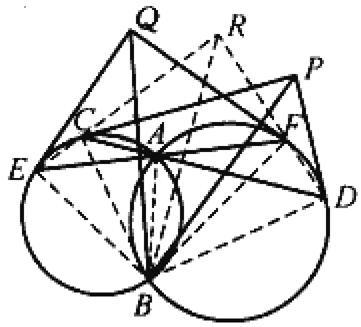


图 4

$\therefore \angle CPB=\angle ERB$，又由 $\angle BCP=\angle BER$，得

$$\triangle BCP\backsim\triangle BER,$$

同理，$\triangle BRD\backsim\triangle BQF$，

而显然 $\triangle BEF\backsim\triangle BCD$，

所以，$\dfrac{BP}{BR}=\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{CD}{EF}=\dfrac{BD}{BF}=\dfrac{BR}{BQ}$.

从而，$BP=BQ\Leftrightarrow BP=BR\Leftrightarrow CD=EF$.

命题得证.

一、【解】 过F作圆O的切线交AB、AC于M、N，显然有$MN \parallel BC$. 过C作$CK \perp BC$，K在AB上易知$\triangle AMF \backsim \triangle ABD$、$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$.

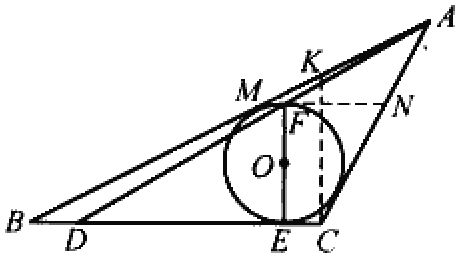


图 6

由切线长定理知

$AM + MF = AN + NF = \frac{1}{2}\triangle AMN$ 周长.

因为$\frac{AM}{AB} = \frac{MF}{BD} = \frac{AM+MF}{AB+BD}$

$= \frac{\frac{1}{2}\triangle AMN \text{ 周长}}{AB+BD}$， ①

又$\frac{AM}{AB} = \frac{\triangle AMN \text{ 周长}}{\triangle ABC \text{ 周长}}$， ②

由 ①②，可得 $AB + BD = \frac{1}{2}\triangle ABC$ 周长.

另据切线长定理易证 $AB + EC = \frac{1}{2}\triangle ABC$ 周长，所以 $BD = EC$.

记 $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{1}{2}(a+b+c)$，易知 $BD = EC = p - c$，此时 $\triangle ABC$ 外接圆半径 $R = DE = BC - (BD + EC) = a - 2(p-c) = c - b$.

易证 $\triangle ACK \backsim \triangle ABC$，则$\frac{AC}{AB} = \frac{AK}{AC}$，

从而 $AK = \frac{b^2}{c}, CK = \frac{ab}{c}, BK = \frac{c^2-b^2}{c}$.

因为 $2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{CK}{BK}} = \frac{b \cdot BK}{CK}$

$= \frac{b \cdot \frac{c^2-b^2}{c}}{\frac{ab}{c}} = \frac{c^2-b^2}{a}$.

而 $2R = 2(c-b)$，所以 $b + c = 2a$.

由 Rt$\triangle BCK$ 得 $BK^2 = BC^2 + CK^2$.

即$(\frac{c^2-b^2}{c})^2 = a^2 + (\frac{ab}{c})^2$，

结合 $b + c = 2a$ 并化简得

$$b^2 + c^2 = 4(c-b)^2.$$

$\therefore (\frac{b}{c})^2 - \frac{8}{3}(\frac{b}{c}) + 1 = 0$，

解得$\frac{b}{c} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{6}$.

由于 $b < c$，所以$\frac{b}{c} = \frac{8 - 2\sqrt{7}}{6}$.

又 $c = 6$，故 $b = 8 - 2\sqrt{7}, a = \frac{b+c}{2} = 7 - \sqrt{7}$.

一、【证明】 如图 7，联结 AO、OD、OF、BM. 由题设知

$\angle BOC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$，

$\angle 1+\angle 2=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$.

又 $\angle AFM=90^\circ-\frac{1}{2}\angle BAC$，

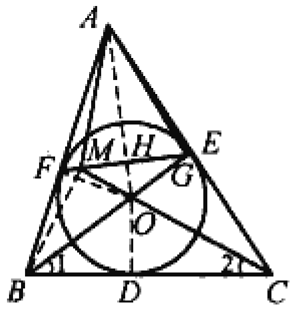


图 7

则 $\angle BOC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$，

$\angle MFB=180^\circ-\angle AFM=90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC$.

从而，$\angle MFB=\angle BOC$.

故 F、B、O、M 四点共圆.

又 $\angle 1=\angle FBO=\angle GMO$，有

$\triangle MOG\backsim\triangle BOC\Rightarrow BC=\frac{BO\cdot MG}{OM}$.

故 $BC\cdot OF=\frac{BO\cdot MG\cdot OF}{OM}$. ①

又 $\angle AFO=\angle BFO=\angle BMO=90^\circ$，且 $AO\perp EF$，即 $AO\perp MG$，因此，

$\angle FAO=\angle HFO=\angle MBO$.

则 $\triangle AOF\backsim\triangle BOM$，$\frac{AO}{BO}=\frac{OF}{OM}$，$AO=\frac{BO\cdot OF}{OM}$.

故 $AO\cdot MG=\frac{BO\cdot MG\cdot OF}{OM}$. ②

由式①、②得 $BC\cdot OF=AO\cdot MG$.

又 $OF=OD$，于是，$BC\cdot OD=AO\cdot MG$.

所以，$S_{\triangle BOC}=S_{四边形AMOG}$.

一、【解】 先作一$\odot O_1$过点P且与射线OX，OY相切(切点为A、B)，且点P在优弧$\overset{\frown}{AB}$上. 分别以射线OX，OY为x轴、y轴建立直角坐标系，如图5，则有$P\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$，

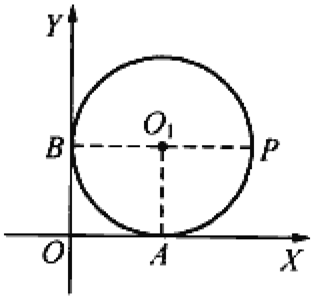


图 5

设$O_1(a,a)$，则有$(\frac{\sqrt{3}}{2}-a)^2+(\frac{1}{2}-a)^2=a^2$.

即 $a^2-(\sqrt{3}+1)a+1=0$，

所以，$\Delta=(\sqrt{3}+1)^2-4=2\sqrt{3}$.

故 $a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$(取较小根). 因为$30°<45°$，且$\frac{1}{2}>a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}$，所以，过点$P$的$\odot O_1$的切线与射线$OX$，$OY$都相交.

如图6，设MN是过点P的$\odot O_1$的切线，M，N分别在射线OX，OY上，设M_1N_1是过点P的任一直线，且与$\odot O_1$相交，M_1，N_1分别在射线OX，OY上.

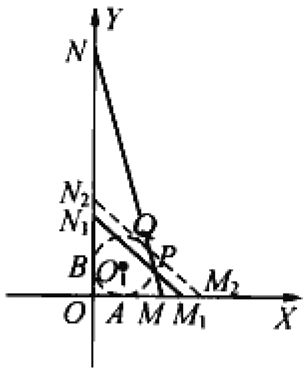


图 6

将M_1N_1朝远离点O的方向平移，直至与$\odot O_1$相切所得的直线为M_2N_2(切点为Q)，M_2，N_2分别在射线OX，OY上.

由切线长定理有：

$OM_1+ON_1-M_1N_1<OM_2+ON_2-M_2N_2=(OB+BN_2)+(OA+AM_2)-(N_2Q+QM_2)=2OA$.

同理，$2OA=OM+ON-MN$.

综上可得，当MN是过点P的$\odot O_1$的切线时，$OM+ON-MN$取得最大值，且最大值为$2OA=2a=\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}$.

一、【解】设$\frac{AF}{FB}=u,\frac{AE}{EC}=v.$

由塞瓦定理得

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

$$\Rightarrow\frac{BD}{DC}=\frac{EA}{CE}\cdot\frac{FB}{AF}=\frac{v}{u}$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{DC}=\frac{CD+DB}{DC}=1+\frac{v}{u}.$$

由 $\triangle ABD$ 被直线 CPF 所截得

$$\frac{AP}{PD}\cdot\frac{DC}{CB}\cdot\frac{BF}{FA}=1$$

$$\Rightarrow\frac{AP}{PD}=\frac{CB}{DC}\cdot\frac{AF}{FB}=(1+\frac{v}{u})u=u+v$$

$$\Rightarrow u+v=\lambda.$$

故$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{AB\cdot AC}{AF\cdot AE}=\frac{AF+FB}{AF}\cdot\frac{AE+EC}{AE}$$

$$=\left(1+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{v}\right)=1+\frac{\lambda+1}{uv}.$$

由 $\lambda=u+v\geqslant 2\sqrt{uv}$

$$\Rightarrow uv\leqslant\frac{\lambda^2}{4}\Rightarrow\frac{1}{uv}\geqslant\frac{4}{\lambda^2}$$

$$\Rightarrow\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AEF}}=1+\frac{\lambda+1}{uv}\geqslant 1+\frac{4\lambda+4}{\lambda^2}=\left(\frac{\lambda+2}{\lambda}\right)^2$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AEF}\leqslant\left(\frac{\lambda}{\lambda+2}\right)^2 S_{\triangle ABC}.$$

当且仅当 $u=v$ 时，上式等号成立.

此时，$\frac{BD}{DC}=\frac{v}{u}=1$，即 D 为 BC 的中点.

故 $\triangle AEF$ 面积的最大值为$\left(\frac{\lambda}{\lambda+2}\right)^2 S_{\triangle ABC}$.

一、【解】如图 5，因为 $OD \perp BC$，$OE \perp AC$，所以，D、E 分别是 BC、AC 的中点，$DE=\frac{AB}{2}$，且 O、D、C、E 四点共圆.

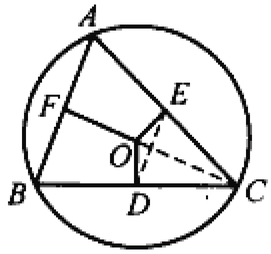


图 5

由托勒密定理有

$$OD \cdot \frac{AC}{2}+OE \cdot \frac{BC}{2}=OC \cdot \frac{AB}{2},$$

即 $OD \cdot AC+OE \cdot BC=OC \cdot AB$.

同理，$OE \cdot AB+OF \cdot AC=OA \cdot BC$，

$OF \cdot BC+OD \cdot AB=OB \cdot AC$.

注意到 $OA=OB=OC=R$（$\triangle ABC$ 的外接圆半径），以上三式相加得

$$OD(AB+AC)+OE(BC+AB)+OF(AC+BC)$$
$$=R(AB+BC+CA).$$

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则

$$OD \cdot BC+OE \cdot AC+OF \cdot AB$$
$$=2S_{\triangle ABC}=(AB+BC+CA)r.$$

以上两式相加得

$$(OD+OE+OF)(AB+BC+CA)$$
$$=(R+r)(AB+BC+CA).$$

从而，$OD+OE+OF=R+r \leqslant R+\frac{R}{2}=\frac{3}{2}$.

等号在 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立.

故 $OD+OE+OF$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$.

一、【证明】如图 4，设$\odot O_1$、$\odot O_2$ 的半径分别为 r_1、r_2，过点 B 作与 EF 平行的直线分别交$\odot O_1$、$\odot O_2$ 于点 G、H.

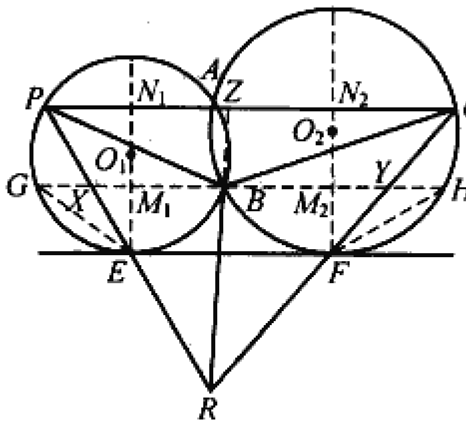


图 4

设 $BR\cap PQ=Z$，$BG\cap EP=X$，$BH\cap FQ=Y$，

$PQ\cap EO_1=N_1$，$PQ\cap FO_2=N_2$，

$BG\cap EO_1=M_1$，$BH\cap FO_2=M_2$.

$EM_1=FM_2=a$，$EN_1=FN_2=b$.

易知 $EG=\sqrt{2r_1a}$，$EP=\sqrt{2r_1b}$，

$EX=\frac{a}{b}EP=\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{2r_1a}$.

故$\frac{EX}{EG}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

由$\triangle EGX\backsim\triangle BPX$，知$\frac{EX}{EG}=\frac{BX}{BP}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

同理，$\frac{BY}{BQ}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

故$\frac{BX}{BP}=\frac{BY}{BQ}$，即$\frac{BP}{BQ}=\frac{BX}{BY}$.

由 $PQ/\!/XY$，知$\frac{PZ}{QZ}=\frac{BX}{BY}=\frac{BP}{BQ}$.

所以，$\angle PBR=\angle QBR$.

一、【证明】如图 5，连结 IA、IE、BM，易证 $IA \perp EF$，$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC$.

$\because \angle BEM = \angle BEF$
$= \angle BAF + \angle AFE$
$= \angle BAC + \angle AEF$
$= \angle BAC + (180^\circ - \angle BEM)$，

$\therefore \angle BEM = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BIC$.

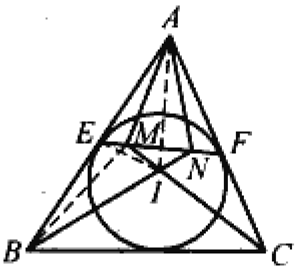


图 5

$\therefore$ B、I、M、E 四点共圆.

$\therefore \angle IMN = \angle IBE = \angle IBC$.

同理可证，$\angle INM = \angle ICF = \angle ICB$.

从而 $\triangle IMN \backsim \triangle IBC$，$\therefore \frac{MN}{BC} = \frac{IM}{IB}$.

又 $\angle IMB = \angle IEB = 90^\circ$，

$\angle IBM = \angle IEM = 90^\circ - \angle AEF = \angle IAE$，

$\therefore \frac{MN}{BC} = \frac{IM}{IB} = \sin\angle IBM = \sin\angle IAE = \frac{IE}{IA}$，

即 $MN \cdot IA = BC \cdot IE$. 故 $S_{四边形AMIN} = S_{\triangle IBC}$.

一、【解】如图 5，联结 OD、AF、FJ、FO.

设 $\angle AOD = \angle BOD = \alpha$，$\angle ACF = \beta$.

由 D 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点知 $\angle BOD = \angle ACB$，

$OD \parallel AC$.

又 $AD \parallel OJ$，则四边形 $ADOJ$ 是平行四边形，$DO = AJ$.

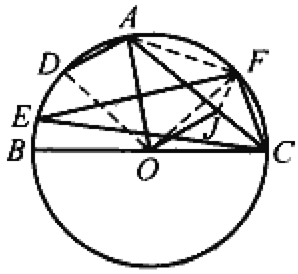


图 5

因为 AC 是 $\angle ECF$ 的平分线，所以，

$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{AF}$，$OA \perp EF$.

由 $\angle AFC = \frac{1}{2}(180^\circ + 2\alpha) = 90^\circ + \alpha$，知

$\angle FAJ = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) - \beta = 90^\circ - \alpha - \beta$.

又 $\angle ACF = \angle ACE = \angle AFE = \beta$，于是，

$\angle EFJ = \angle JFC = \frac{1}{2}(\angle AFC - \beta)$

$= \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha - \beta)$，

$\angle AFJ = \angle EFJ + \beta = \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha + \beta)$，

$\angle AJF = 180^\circ - \angle FAJ - \angle AFJ$

$= 180^\circ - (90^\circ - \alpha - \beta) - \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha + \beta)$

$= \frac{1}{2}(90^\circ + \alpha + \beta)$.

故 $\angle AFJ = \angle AJF$，$AF = AJ = DO = OA = OF$，$\triangle AOF$ 是正三角形.

所以，$\angle ACF = 30^\circ$.

一、【证明】如图 4，连结 BO_1、BO_2、CO_1、CO_2，则 $\angle BO_1C=\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=\pi-\frac{1}{2}\cdot(\angle ABC+\angle ACB)=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle BAC)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle BAC$，

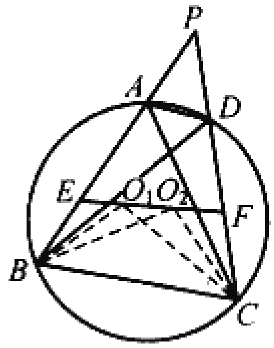


图 4

$\angle BO_2C=\angle BDC+\frac{1}{2}\angle DBC+\frac{1}{2}\angle DCB=\pi-\frac{1}{2}(\angle DBC+\angle DCB)=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle BDC)=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle BDC$.

所以，由 $\angle BAC=\angle BDC$ 得 $\angle BO_1C=\angle BO_2C$，因而 B、O_1、O_2、C 四点共圆.

从而 $\angle PEF=\angle PBO_1+\angle EO_1B=\frac{1}{2}\angle PBC+\angle O_2CB=\frac{1}{2}(\angle PBC+\angle PCB)$.

$\angle PFE=\angle PCO_2+\angle FO_2C=\frac{1}{2}\angle PCB+\angle O_1BC=\frac{1}{2}(\angle PBC+\angle PCB)$.

所以 $\angle PEF=\angle PFE$，故 $PE=PF$.

第二试

一、【证明】如图 4,联结 AB、O_1O_2、AO_1、BO_1、AO_2、BO_2、BD,并延长 CB 交$\odot O_1$ 于 E,联结 AE.

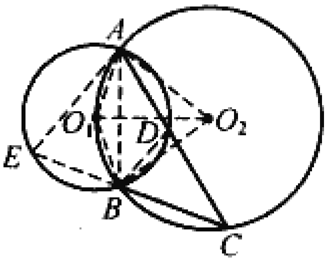


图 4

因为 AB 为 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公共弦,O_1O_2 为连心线,则

$$\angle AO_1O_2=\angle BO_1O_2,\angle AO_2O_1=\angle BO_2O_1.$$

$$故\ \angle C=\frac{1}{2}\angle AO_2B=\angle AO_2O_1. \quad ①$$

又四边形 $ADBE$ 内接于 $\odot O_1$,于是,

$$\angle BDC=\angle E=\frac{1}{2}\angle AO_1B=\angle AO_1O_2. \quad ②$$

由式 ①、② 知 $\angle CBD=\angle O_1AO_2$.

故 $BC=CD\Leftrightarrow\angle BDC=\angle CBD\Leftrightarrow\angle AO_1O_2=\angle O_1AO_2\Leftrightarrow O_2O_1=O_2A$

$\Leftrightarrow\odot O_2$ 经过 $\odot O_1$ 的圆心 O_1.

因此,$BC=CD$ 的充要条件是 $\odot O_2$ 经过 $\odot O_1$ 的圆心 O_1.

一、【解】由 $AC=BC$ 及 $\frac{CE}{AE}=\frac{BF}{CF}$，知 $CE=BF$.

如图 7，联结 DF，将 $\triangle BDF$ 绕点 D 逆时针旋转 90°，则点 B 转到点 C 处，点 F 转到点 E 处，有 $\triangle CDE \cong \triangle BDF$. 从而，$\triangle DEF$ 为等腰直角三角形.

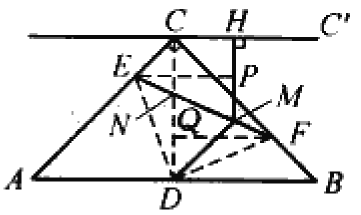


图 7

记 CD 与 EF 相交于点 N，作 $EP \perp MH$ 于点 P，$FQ \perp CD$ 于点 Q. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ECF$ 中，由 CN 为 $\angle ECF$ 的平分线及已知条件，有

$$\frac{EN}{NF}=\frac{CE}{CF}=\frac{BF}{CF}=\frac{FM}{EM}.$$

由合比性质得

$$\frac{EN}{EN+NF}=\frac{FM}{FM+EM}\Rightarrow\frac{EN}{EF}=\frac{FM}{EF}.$$

故 $EN=FM$.

又由 $DE=DF$，$\angle DEN=\angle DFM=45^\circ$，得 $\triangle DEN \cong \triangle DFM$，

则 $DN=DM$. ①

又在 $\mathrm{Rt}\triangle EPM$ 与 $\mathrm{Rt}\triangle FQN$ 中，有 $EM=EF-MF=EF-EN=FN$.

再由 $MH \perp CC'$，$CD \perp AB$，$AB \parallel CC'$，有 $EP \parallel CC' \parallel AB \parallel FQ$，

则 $\angle PEM=\angle QFN$.

故 $\mathrm{Rt}\triangle EPM \cong \mathrm{Rt}\triangle FQN$.

进而，$PM=QN$. ②

据式 ①、② 得

$$MD=DN=DQ+QN=BF\sin45^\circ+QN$$
$$=CE\sin45^\circ+PM=PH+PM=MH.$$

说明：可以建立直角坐标系，求出点 M 的轨迹为抛物线，D 恰为抛物线的焦点，CC' 恰为抛物线的准线. 由抛物线的定义得 $MD=MH$.

一、【证明】(1) 若 $IQ=2IP$，则由正弦定理可得

$$2=\frac{IQ}{IP}=\frac{IQ}{IC}\cdot\frac{IC}{ID}\cdot\frac{ID}{IP}$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}}\cdot\frac{1}{\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos\frac{C-A}{2}}{\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)\cdot\sin\beta},$$

即 $$2\sin\beta\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C-A}{2},\qquad ①$$

其中 $\beta=\angle IDE$，$\gamma=\angle IED$，如图 5 所示. 同理可得

$$2\sin\gamma\cdot\cos\left(\beta-\frac{B}{2}\right)=\cos\frac{B-A}{2},\qquad ②$$

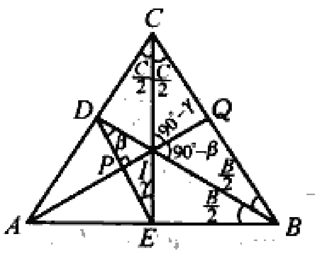


图 5

显然

$$\beta+\gamma=\frac{C+B}{2}$$

$$=90^\circ-\frac{A}{2}.\qquad ③$$

由式 ① 得

$$\sin\left(\beta+\gamma-\frac{C}{2}\right)+\sin\left(\beta-\gamma+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C-A}{2},$$

即 $\sin\frac{B}{2}+\sin\left(\beta-\gamma+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C-A}{2}$，

所以 $\sin\left(\beta-\gamma+\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C-A}{2}-\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$，

即 $$\sin\left(2\beta-\frac{B}{2}\right)=2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}.\qquad ④$$

同理由式 ② 可得

$$\sin\left(2\gamma-\frac{C}{2}\right)=2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2},\qquad ⑤$$

由式 ④ ÷ 式 ⑤ 得

$$\sin\left(2\beta-\frac{B}{2}\right)\cdot\sin\frac{B}{2}=\sin\left(2\gamma-\frac{C}{2}\right)\cdot\sin\frac{C}{2},$$

即 $\cos(2\beta)-\cos(2\beta-B)=\cos(2\gamma)-\cos(2\gamma-C)$.

由式 ③ 得 $2\beta-B=-(2\gamma-C)$，又因为余弦函数为偶函数，所以

$$\cos(2\beta)=\cos(2\gamma),2\beta=2\gamma,$$

从而 $$\beta=\gamma=45^\circ-\frac{A}{4}.\qquad ⑥$$

把式 ⑥ 代入式 ③ 得

$$\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)=2\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2},$$

即 $$\sin\frac{C}{2}=2\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2},$$

所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$，$\frac{A}{2}=30^\circ$，即 $A=60^\circ$，$\angle BAC=60^\circ$. 必要性得证.

(2) 若 $\angle BAC=60^\circ$，则 $\frac{C+B}{2}=\frac{180^\circ-A}{2}=60^\circ$，即 $\angle CID=60^\circ=\angle BAC$，于是 A、E、I、D 四点共圆. 又因为 $\angle IAE=\angle IAD$，所以 $ID=IE$，从而 $\beta=\gamma$，这时 $2=\frac{IQ}{IP}$，从而

$$2=\frac{IQ}{IC}\cdot\frac{IC}{ID}\cdot\frac{ID}{IP}$$

$$=\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)}\cdot\frac{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{C}{2}\right)}\cdot\frac{1}{\sin\beta}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{C-A}{2}\right)}{\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)\cdot\sin\beta}$$

即 $$2\cos\left(\gamma-\frac{C}{2}\right)\sin\beta=\cos\left(\frac{C-A}{2}\right).\qquad ⑦$$

因为 $\beta+\gamma=\frac{C+B}{2}$，所以式 ⑦ 可化为 $\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C-A}{2}$，

即 $\sin\frac{C}{2}=\cos\frac{C-A}{2}-\cos\frac{A+C}{2}=2\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$.

从而 $$\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2},$$

可得 $A=60^\circ$. 故必有 $IQ=2IP$，即充分性得证.

一、【证明】设四边形 $ABCD$ 的外接圆的圆心为 O，连 BQ，与圆 O 交于点 K，连 KA，则 $\angle AKB = \angle ACB = \angle ECB = \angle EQB$，于是有 $KA \parallel PQ$. 连 PD，与圆 O 交于点 L，连 CL，则 $\angle DPE = \angle DAE = 180^\circ - \angle CLD$，于是有 $CL \parallel PQ$. 设过 O 且垂直于 EF 的直线为 l，则 $PQ \perp l$，且 CK，LA 关于 l 对称. 又因为 $\angle QBC = \angle QEC = \angle AEP = \angle ADP$，$\angle QCB = \angle QEB = \angle DEP = \angle DAP$，所以 $\angle BQC = \angle APD$，即 $\angle KQC = \angle APL$，因此 P，Q 关于 l 对称. 连 BV，与圆 O 交于点 T，连 TD，则 $\angle BTD = \angle BCD = \angle BCF = \angle BVF$，于是有 $TD \parallel UV$. 连 DU，与圆 O 交于点 S，连 BS.

则 $\angle BSD = \angle BAD = 180^\circ - \angle DAF = 180^\circ - \angle DUF = 180^\circ - \angle VUS$，于是有 $BS \parallel UV$. 因此 U，V 关于 l 对称，从而可得 $PU = QV$.

一、如图 6，设线段 DE、CF、PF 的中点分别为 G、H、K，则 K 也是 BD 的中点. 据中位线定理知：

在 $\triangle BDE$ 中，$KG \parallel BE$，$KG = \frac{1}{2}BE$；

在 $\triangle PCF$ 中，$KH \parallel PC$，$KH = \frac{1}{2}PC$，即

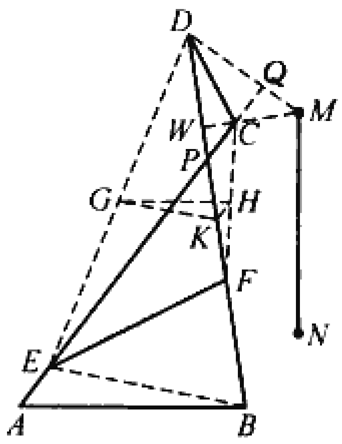


图 6

$KH \parallel AE$，$KH = \frac{1}{2}AE$.

故 $\triangle KHG \backsim \triangle EAB$，且 $HG \parallel AB$，$HG = \frac{1}{2}AB$.

为证 $MN \perp AB$，只要证 $MN \perp HG$.

以 G 为圆心、DE 为直径作 $\odot G$，其半径记为 R. 以 H 为圆心，CF 为直径作 $\odot H$，其半径记为 r. 设直线 AC 交 MD 于 Q，MC 交 BD 于 W.

由于 M 是 $\triangle PCD$ 的垂心，则

$MD \perp PQ$，$MC \perp PD$.

所以，D、W、C、Q 四点共圆.

$$故\ MQ \cdot MD = MC \cdot MW. \qquad ①$$

另一方面，由于 $\angle EQD = 90°$，$\angle FWC = 90°$，则 Q 在 $\odot G$ 上，W 在 $\odot H$ 上. 从而，

$MQ \cdot MD = MG^2 - R^2$，$MC \cdot MW = MH^2 - r^2$.

因此，式 ① 化为 $MG^2 - R^2 = MH^2 - r^2$，即

$MG^2 - MH^2 = R^2 - r^2$.

同理，$NG^2 - NH^2 = R^2 - r^2$.

故 $MG^2 - MH^2 = NG^2 - NH^2$.

所以，$MN \perp GH$.

而 $HG \parallel AB$，因此，$MN \perp AB$.

一、【证明】 可设 $AB \neq AC$(因为 $AB = AC$，由对称性，结论是平凡的)，不妨设 $AB > AC$. 如图 8，设 Ω 的圆心为 I，连 IK，IN，过 N 作圆 Ω 的切线交 BC 的延长线于 T，我们来证明 TN 也是三角形 BCN 外接圆的切线，从而原题得证. 为此，只要证明：

$$TN^2 = TB \cdot TC \Leftrightarrow TK^2 = (TK - KC)(TK + KB)$$

$$\Leftrightarrow TK = \frac{KB \cdot KC}{KB - KC} \qquad (*)$$

又易知 $\triangle TIK \backsim \triangle MKD$，所以

$$\begin{aligned}
TK &= MD \cdot \frac{KI}{KD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{r}{DK} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{2\triangle}{a} \cdot \frac{2\triangle}{a+b+c} \cdot \frac{2a}{(c-b)(c+b-a)} \\
&= \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4(c-b)} \\
&= \frac{KB \cdot KC}{KB - KC},
\end{aligned}$$

故(*)式得证，从而原题成立.

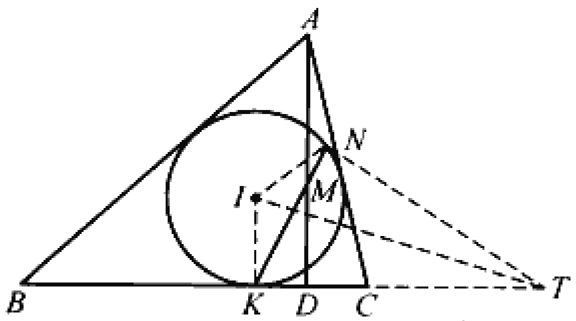


图 8

一、【证明】 (1) 如图 2，不妨设 $BC=a$，$AB=c$，$CA=b$，且 $a\geqslant c\geqslant b$，由 M，N，P 分别是 BC，CA，AB 的中点，有

$$\frac{PM_2}{PN}=\frac{PM_2}{BM}=\frac{PM_1}{BM_1}=\frac{\frac{b+c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{b}{b+c},$$

故 $\frac{PM_2}{M_2N}=\frac{b}{c}$. 同理，$\frac{NP_2}{P_2M}=\frac{a}{b}$，$\frac{MN_2}{N_2P}=\frac{c}{a}$.

所以，$\frac{PM_2}{M_2N}\cdot\frac{NP_2}{P_2M}\cdot\frac{MN_2}{N_2P}=1$，因此，$MM_1$，$NN_1$，$PP_1$ 交于一点 K.

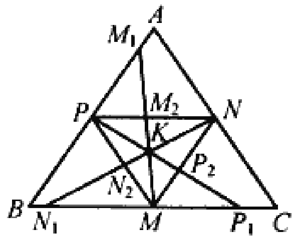


图 2

(2) 由 $\frac{PM_2}{M_2N}=\frac{b}{c}=\frac{PM}{MN}$ 知 MM_2 为 $\angle PMN$ 的角平分线，同理，NN_2，PP_2 也是 $\triangle MNP$ 的角平分线，所以，K 是 $\triangle MNP$ 的内心.

记 p，R，r 分别是 $\triangle ABC$ 的半周长和外接圆、内切圆的半径，设 $AB=x+y$，$BC=y+z$，$CA=z+x$，则

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

$$=\sqrt{\frac{xyz}{p}}.$$

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{16r^2p^2}=\frac{a^2b^2c^2}{16pxyz}.$$

$KP=\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}=2R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}$. 由于 P 是 AB 的中点，则有 $2(AK^2+BK^2)=c^2+4KP^2$，

即 AK^2+BK^2

$$=\frac{1}{2}\left[c^2+\left(4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right)^2\right].$$

同理可得，BK^2+CK^2

$$=\frac{1}{2}\left[a^2+\left(4R\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)^2\right],$$

$$CK^2+AK^2=\frac{1}{2}\left[b^2+\left(4R\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}\right)^2\right].$$

所以，

$$AK^2+BK^2+CK^2=\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+c^2+16R^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right)\right].$$

假设 $KA<\frac{a}{\sqrt{3}}$，$KB<\frac{b}{\sqrt{3}}$，$KC<\frac{c}{\sqrt{3}}$，则

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)>\frac{1}{4}\left[a^2+b^2+c^2+16R^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right)\right]\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2>12R^2\left(\sin^2\frac{A}{2}\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{B}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\sin^2\frac{C}{2}\sin^2\frac{A}{2}\right)$$

$$=12R^2[(1-\cos A)(1-\cos B)+(1-\cos B)(1-\cos C)+(1-\cos C)(1-\cos A)]$$

$$=12R^2\left[\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\cdot\frac{b^2-(c-a)^2}{2ca}+\frac{b^2-(c-a)^2}{2ca}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}+\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right]$$

$$=48R^2\left(\frac{xyz^2}{abc^2}+\frac{xy^2z}{ab^2c}+\frac{x^2yz}{a^2bc}\right)$$

$$=48\cdot\frac{a^2b^2c^2}{16pxyz}\left(\frac{xyz^2}{abc^2}+\frac{xy^2z}{ab^2c}+\frac{x^2yz}{a^2bc}\right)$$

$$=3\left(\frac{abz}{p}+\frac{bcx}{p}+\frac{cay}{p}\right)$$

$\Leftrightarrow p(a^2+b^2+c^2)>3(abz+bcx+cay)$

$=3[x(x+y)(x+z)+y(y+z)(y+x)+z(z+x)(z+y)]$

$\Leftrightarrow 2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)$

$>3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+9xyz$

$\Leftrightarrow (x+y+z)(xy+yz+zx)>(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+9xyz$

$\Leftrightarrow x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)>x^3+y^3+z^3+6xyz.$ ①

由 $a\geqslant c\geqslant b$，则有 $y\geqslant z\geqslant x$，所以，

$x^3+y^3+z^3+6xyz-[x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)]$

$=x(y-x)(z-x)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)$

$=x(y-x)(z-x)+(y-z)(y^2-xy-z^2+xz)$

$=x(y-x)(z-x)+(y-z)^2(y+z-x)\geqslant 0$，矛盾.

故 $\frac{KA}{BC}$、$\frac{KB}{CA}$、$\frac{KC}{AB}$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

一、【解】 如图 4，联结 OA、OD、OE、OF、OP、OQ. 为证 $QR \parallel AB$，须证 $\frac{ER}{RF}=\frac{AQ}{QF}$.

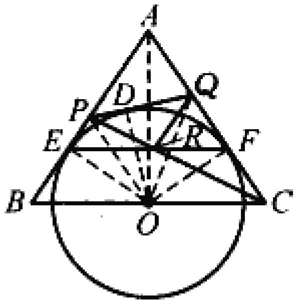


图 4

由梅涅劳斯定理可得

$$\frac{ER}{RF}=\frac{EP}{PA}\cdot\frac{AC}{CF}.$$

又易知 $\triangle AOC \backsim \triangle OFC$，故

$$\frac{AC}{CF}=\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle OFC}}=\frac{OA^2}{OF^2}.$$

从而，$\frac{ER}{RF}=\frac{EP}{PA}\cdot\frac{OA^2}{OF^2}$.

于是，须证 $\frac{AQ}{QF}=\frac{EP}{PA}\cdot\frac{OA^2}{OF^2}$，即

$$\frac{AQ}{QF}\cdot\frac{AP}{PE}=\frac{OA^2}{OF^2}.$$

另一方面，由切线长定理有

$$\angle AOQ=\angle AOF-\angle QOF$$

$$=\frac{1}{2}\angle EOF-\frac{1}{2}\angle DOF$$

$$=\frac{1}{2}\angle EOD=\angle POE.$$

同理，$\angle AOP=\angle QOF$.

于是，$\frac{AQ}{QF}\cdot\frac{AP}{PE}=\frac{S_{\triangle AOQ}}{S_{\triangle QOF}}\cdot\frac{S_{\triangle AOP}}{S_{\triangle POE}}$

$$=\frac{AO\sin\angle AOQ}{OF\sin\angle QOF}\cdot\frac{AO\sin\angle AOP}{OE\sin\angle POE}=\frac{OA^2}{OF^2}.$$

故结论成立.

一、【解】(1) 如图5，将$\triangle PAB$绕点B顺时针旋转60°，得$\triangle P_1CB \cong \triangle PAB$.

联结PP_1，得$P_1C = a$，且$\triangle BP_1P$为等边三角形，有$P_1P = BP_1 = PB = b$.

故以a、b、c为边可以组成$\triangle P_1PC$.

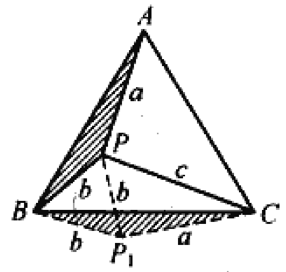


图 5

又由$\triangle P_1CB \cong \triangle PAB$，知$\angle CP_1B = \angle APB > 150^\circ$.

而在等边$\triangle BP_1P$中，有$\angle PP_1B = 60^\circ$，得

$$\angle CP_1P = \angle CP_1B - \angle BP_1P > 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ.$$

故$\triangle CP_1P$是一个钝角三角形.

(2) 由上证，钝角的对边为c.

如图6，在钝角$\triangle A_1B_1C_1$中，过钝角顶点C_1作$C_1E \perp A_1C_1$交A_1B_1于E，则C_1E在$\angle HC_1B_1$内部，E在H、B_1之间，得$\triangle B_1C_1E$，有

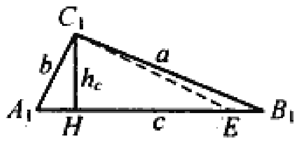


图 6

$$B_1C_1 - C_1E < EB_1. \quad ①$$

又在$\mathrm{Rt}\triangle A_1C_1E$中，

$$\begin{aligned} & A_1C_1 + C_1E \\ = & \sqrt{(A_1C_1^2 + C_1E^2) + 2A_1C_1 \cdot C_1E} \\ = & \sqrt{A_1E^2 + 2A_1E \cdot C_1H} \\ < & \sqrt{A_1E^2 + 2A_1E \cdot C_1H + C_1H^2} \\ = & A_1E + C_1H. \end{aligned} \quad ②$$

① + ② 得

$$B_1C_1 + A_1C_1 < EB_1 + A_1E + C_1H = A_1B_1 + C_1H,$$

即 $a + b < c + h_c$. ③

再由$0 < \sin C_1 < 1$及三角形面积公式，有

$$ab > ab\sin C_1 = ch_c. \quad ④$$

由式③、④得

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} < \frac{c+h_c}{ch_c} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h_c}.$$

一、【证明】 先证明$\frac{PC}{PD}=\frac{CE}{ED}$.

如图4，联结AC、CB、BD、DA. 因为$PA^2=PC\cdot PD$，所以，$\frac{PC}{PD}=\frac{PC^2}{PA^2}$. ①

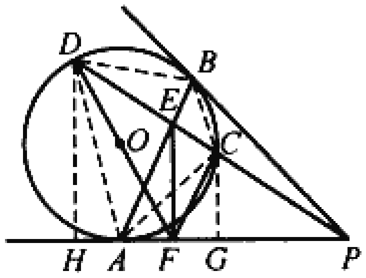
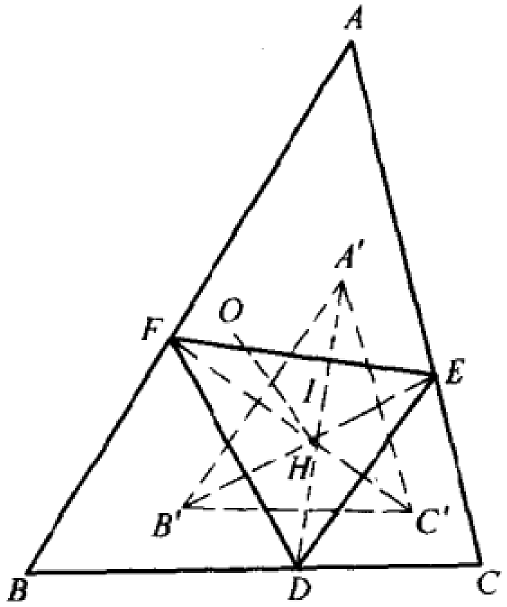


图 4

又$\triangle ACE\backsim\triangle DBE$，$\triangle DAE\backsim\triangle BCE$，则$\frac{CE}{BE}=\frac{AC}{DB}$，$\frac{DE}{BE}=\frac{AD}{CB}$. $\therefore\frac{PC}{PD}=\frac{CE}{ED}$ ②

$\therefore$ FE 平分$\angle CFD$.

作$\triangle DEF$的垂心H，设DH、EH、FH分别交$\odot I$于A'，B'，C'（如图）.



则$\angle HA'C'=\angle DFC'=\angle DEB'=\angle DA'B'$.

同理$\angle HC'A'=\angle HC'B'$，所以$H$为$\triangle A'B'C'$内心.

因为$\angle DEB'=\angle DFC'$，所以D为$\overset{\frown}{B'DC'}$中点，所以$B'C' /\!/ BC$（BC切$\odot I$于D）.

同理$A'B' /\!/ AB$　$A'C' /\!/ AC$.

所以$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$. 而$O$、$I$分别为$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$外心，$I$、$H$分别为$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$内心，所以$\frac{OI}{HI}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{6}{2}=3$.

因为OI、IH是$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中的对应线段.

所以OI与BC所成角等于IH与$B'C'$所成角.

因为$BC /\!/ B'C'$，所以O、I、H共线.

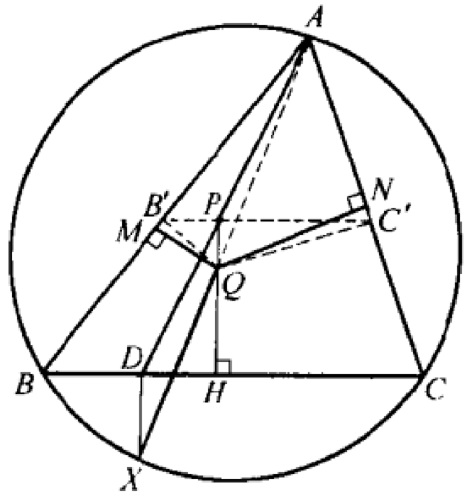
另一方面I、M、H分别为$\triangle DEF$的外心、重心、垂心.

由欧拉定理，I、M、H共线且$IM=\frac{1}{2}MH=\frac{1}{3}IH$.

所以$OM=OI+IM=IM+3IH=10IM$.

$\frac{IM}{OM}=\frac{1}{10}$.

作 $DX \perp BC$ 于 D，交劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 于 X. 过 P 作 $B'C' /\!/ BC$ 交 AB 和 AC 于 $B'C'$ 连接 QB'、QC'.



证明 A、B'、Q、C' 4 点共圆，但由 A、M、Q、C 4 点共圆.（由 $QM \perp AB$，$QN \perp AC$）知 $\angle BAC + \angle MQN = 180^\circ \Rightarrow$ 只要证明 $\angle B'QM = \angle C'QN$. 由 M、Q、P、B' 和 N、C'、Q、P 分别 4 点共圆知：$\angle B'QM = \angle B'PM = \angle C'PN = \angle C'QN$.

故 A、B'、Q、C' 4 点共圆，即 PQ 在 $\triangle AB'C'$ 的外接圆上.

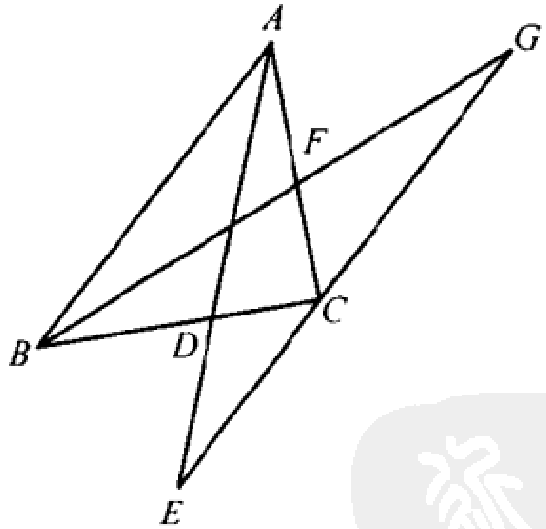
考虑位似，以 A 为位似中心，将 $\triangle AB'C'$ 位似到 $\triangle ABC$ 这个位似将 P 映到 D.

而 Q 和 X 都分别在 $\triangle AB'C'$ 和 $\triangle ABC$ 的外接圆上，且 $QP \perp B'C'$，$XD \perp BC$，所以位似将 Q 映到 X.

所以 A、Q、X 共线.

于是，Q 点的轨迹就是线段 AX.

设 $AC=b$，$BC=a$，$AB=c$，$\angle A=2\alpha$，$\angle B=2\beta$，则



$$FC=\frac{ab}{a+c},$$

$$FG=\frac{FC}{\sin\beta}\cdot\sin2\alpha=\frac{ab\sin2\alpha}{(a+c)\sin\beta},$$

同样，$DE=\dfrac{ab\sin2\beta}{(b+c)\sin\alpha}$.

因为 $FG=DE$，

所以 $\dfrac{ab\sin2\alpha}{(a+c)\sin\beta}=\dfrac{ab\sin2\beta}{(b+c)\sin\alpha}$；

$$\frac{a+c}{\sin2\alpha\sin\alpha}=\frac{b+c}{\sin2\beta\sin\beta}.$$

由正弦定理：$\dfrac{a}{\sin2\alpha}=\dfrac{b}{\sin2\beta}=2R$，

所以
$$\frac{2R}{\sin\alpha}+\frac{c}{\sin2\alpha\sin\alpha}=\frac{2R}{\sin\beta}+\frac{c}{\sin2\beta\sin\beta}.\qquad ①$$

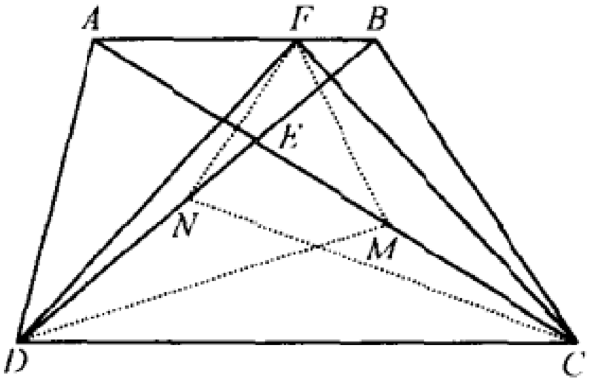
若 $a>b$，则 $2\alpha>2\beta$，再由正弦定理，得 $\sin2\alpha>\sin2\beta$，$\sin\alpha>\sin\beta$，

所以 $\dfrac{2R}{\sin\alpha}<\dfrac{2R}{\sin\beta}$，$\dfrac{c}{\sin2\alpha\sin\alpha}<\dfrac{c}{\sin2\beta\sin\beta}$，这与①式矛盾.

同样，当 $a<b$ 时，也可推出矛盾.

综上，$a=b$，即 $BC=AC$.

设$\triangle ADF$ 的外接圆与 AC 交于除 A 外 1 点 M 设$\triangle BCF$ 的外接圆与 BD 交于除 B 外 1 点 N.



即:A,M,D,F 4 点共圆

B,F,N,C 4 点共圆

在$\triangle EMD$ 中,由正弦定理:

$$\frac{EM}{ED}=\frac{\sin\angle EDM}{\sin\angle EMD} \qquad ①$$

在$\triangle ENC$ 中,由正弦定理:

$$\frac{EN}{EC}=\frac{\sin\angle ECN}{\sin\angle ENC} \qquad ②$$

而由于 $FD=FC$,$\angle EMD=\angle AFD=\angle FDC=\angle FCD=\angle CFB=\angle ENC$

$$\begin{aligned}\angle EDM &= \angle FDM-\angle FDE=\angle FAM-\angle FDE\\ &=\angle ECD-\angle FDE=\angle EDC-\angle FCE\\ &=\angle EBA-\angle FCE=\angle NCF-\angle FCE\\ &=\angle ENC\end{aligned}$$

所以由①、②知:$\frac{EM}{ED}=\frac{EN}{EC}\Rightarrow\frac{EM}{EN}=\frac{ED}{EC}=\frac{EB}{EA}$,即 $EA\cdot EM=EB\cdot EN$,这表明 E 到$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的幂相等,而 $F\in\odot O_1\cap\odot O_2$,所以 F 到$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的幂也相等,从而 EF 是$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的根轴,所以 $EF\perp O_1O_2$,证毕.

设 R 为$\triangle ABC$ 的外接圆半径,

由正弦定理得,$\frac{EF}{\sin\angle EDF}=2R$,所以 $EF=2R\sin\angle EDF=2R\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{B}{2}\right)=2R\cos\frac{A}{2}$,

于 F',则$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{F'A}=1$.

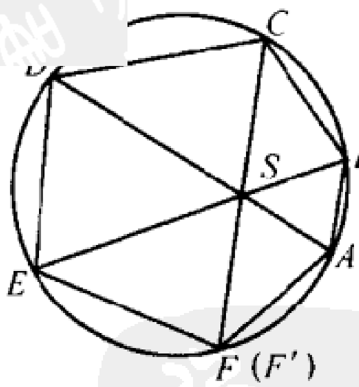


图 1

故$\frac{EF'}{F'A}=\frac{EF}{FA}=\lambda$.则 F 与 F' 均为关于 A、E 的 Apollonius 圆(定比为 λ)与 CS 的交点,且在 AE 的同一侧,故 F 与 F' 为同一点,即 F 也在圆 O 上.

从而$\angle ABC+\angle CDE+\angle EFA=2\pi$.

设点 P 满足$\angle FEA=\angle DEP$,$\angle EFA=\angle EDP$,则$\triangle FEA\backsim\triangle DEP$.于是$\frac{FA}{EF}=\frac{DP}{DE}$ ①

$$\frac{EF}{ED}=\frac{EA}{EP} \quad ②$$

由已知条件,有$\angle ABC=\angle PDC$,又由①得$\frac{AB}{BC}=\frac{DE\cdot FA}{CD\cdot EF}=\frac{DP}{CD}$ ③

所以,$\triangle ABC\backsim\triangle PDC$.故$\angle BCA=\angle DCP$,且$\frac{CB}{CD}=\frac{CA}{CP}$.

又因为$\angle FED=\angle AEP$,故由②知$\triangle FED\backsim\triangle AEP$.

类似地,由$\angle BCD=\angle ACP$ 及③得$\triangle BCD\backsim\triangle ACP$.于是$\frac{FD}{EF}=\frac{PA}{AE}$,$\frac{BC}{DB}=\frac{CA}{PA}$.两式相乘,即得所求.

同理，$FD=2R\cos\dfrac{B}{2}$，$DE=2R\cos\dfrac{C}{2}$.

用 p'，r' 及 p，r 分别表示 $\triangle DEF$ 及 $\triangle ABC$ 的周长及内切圆半径.

(1) 由算术几何平均不等式知，

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \qquad ①$$

再由熟知的不等式 $\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$，可得

$$\frac{3}{4}\geqslant\sqrt[3]{\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right)^2}, \qquad ②$$

由①、②得 $\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\geqslant 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

两边同乘以 $2R$，得 $p'=2R\left(\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{B}{2}+\cos\dfrac{C}{2}\right)\geqslant 8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}$ $\cos\dfrac{C}{2}=p$（注意到 $p=2R(\sin A+\sin B+\sin C)=8R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.）

(2) 由算术—几何平均不等式知，

$$\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\leqslant\left[\frac{1}{3}\left(\cos^2\frac{\pi-A}{4}+\cos^2\frac{\pi-B}{4}+\cos^2\frac{\pi-C}{4}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$
$$=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\right]^{\frac{3}{2}}$$

但 $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$，所以

$$\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{8} \qquad ①$$

再由熟知的不等式 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^3$ 得

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\geqslant 3\sqrt{3}\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}, \qquad ②$$

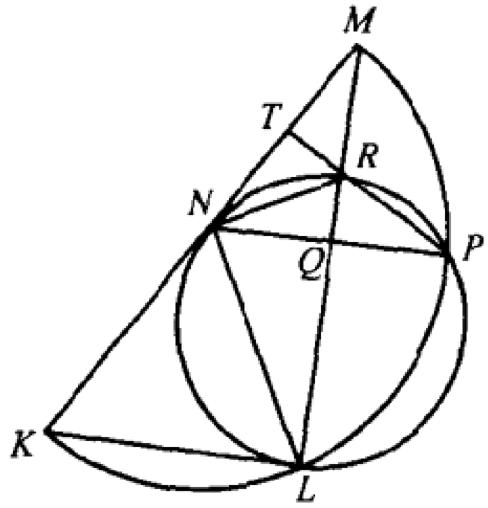
由①，②得：

$$\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}$$
$$\geqslant\frac{8}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi-A}{4}\sin\frac{\pi-B}{4}\sin\frac{\pi-C}{4}\cos\frac{\pi-A}{4}\cos\frac{\pi-B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\sin\frac{\pi-A}{2}\sin\frac{\pi-B}{2}\sin\frac{\pi-C}{2}$$
$$=\frac{1}{3\sqrt{3}}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\geqslant\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

又 $r'=4R'\sin\dfrac{D}{2}\sin\dfrac{E}{2}\sin\dfrac{F}{2}=4R\sin\dfrac{\pi-A}{4}\sin\dfrac{\pi-B}{4}\sin\dfrac{\pi-C}{4}$，

所以 $r'\geqslant 4R\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}=r$.

设 C 与 MQ 交于 R，连 PR 并延长交 MN 于 T，连结 TQ，LP，NR，NL.



则
$$\begin{aligned}
\angle MPT &= \angle MPL - \angle RPL \\
&= (\pi - \angle MKL) - (\pi - \angle RNL) \\
&= \pi - \angle MKL - \angle MNR - \angle KNL \\
&= \pi - \angle MKL - \angle NLR - \angle KLN \\
&= \pi - \angle MKL - \angle MLK \\
&= \angle KML = \angle TMR.
\end{aligned}$$

所以 $\triangle TMR \backsim \triangle TPM$，$TM^2 = TR \cdot TP$.

又 TN 是 C 的切线，故 $TN^2 = TR \cdot TP = TM^2$，$TN = TM$.

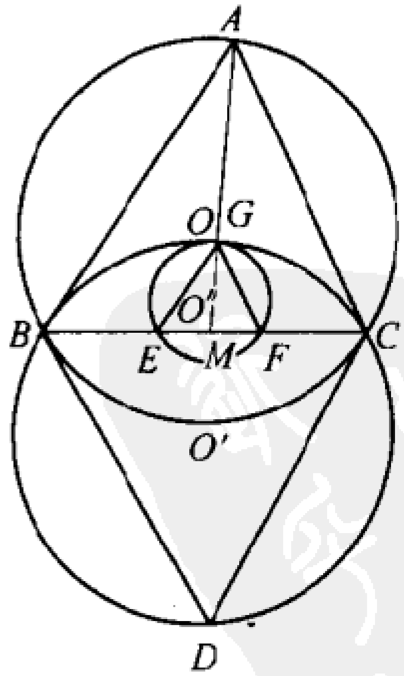
所以 T 是 MN 的中点，而 $\triangle MQN$ 是 Rt$\triangle$，则 $TQ^2 = TM^2 = TR \cdot TP$.

所以 $\triangle TQR \backsim \triangle TPQ$，$\angle TPQ = \angle TQR = \angle TQM = \angle TMQ$.

所以 $\angle MPQ = \angle MPT + \angle TPQ = \angle TMR + \angle TMQ = 2\angle KML$.

所以 $\angle MPQ = 2\angle KML$，原命题得证.

一、(50 分)



用 A、B、C 表示$\triangle ABC$3 个内角，

所以$\angle BOC=2A=\angle BHC=\pi-A$.

所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

作$\triangle ABC$ 外接圆$\odot O$.

以 BC 为底，在$\triangle ABC$ 外作正$\triangle BCD$，

则 O、B、C、D 共圆，设圆心为 O'，

取 BC 中点M，BC 三等分点E、F，

因为 $OB=OC$，$\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$，

易证$\triangle OEF$ 为正三角形.

作$\triangle OEF$ 外接圆$\odot O''$.

则$\odot O''$与$\odot O$ 相切于点O.

对$\odot O'$作关于点 M 的系数为$-\dfrac{1}{3}$的位似变换即得$\odot O''$，$\odot O'$与$\odot O$ 关于BC 对称，所以$\odot O$ 作关于点M 的系数为$\dfrac{1}{3}$的位似变换即得$\odot O''$连 DA 交$\odot O''$于G'，所以 $MG'=\dfrac{1}{3}MA$. 所以 $G'=G$.

所以 G 在$\odot O''$上另一方面，O、G、B、C 共圆，所以 G 在$\odot O'$上.

所以 $G=0$. 从而$\triangle ABC$ 是正三角形.

如图 11 中有引理:$\frac{1}{EJ}-\frac{1}{EG}=\frac{1}{EK}-\frac{1}{EH}$成立.

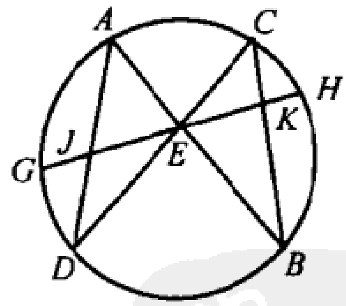


图 11

$$\frac{AJ\cdot AE}{CK\cdot CE}\cdot\frac{DJ\cdot DE}{BK\cdot BE}=\frac{S_{\triangle AJE}}{S_{\triangle CKE}}\cdot\frac{S_{\triangle DJE}}{S_{\triangle BKE}}=\frac{S_{\triangle AJE}}{S_{\triangle BKE}}\cdot$$

$$\frac{S_{\triangle DJE}}{S_{\triangle CKE}}=\frac{AE\cdot JE}{BE\cdot KE}\cdot\frac{DE\cdot JE}{CE\cdot KE}$$

即$\frac{AJ\cdot DJ}{CK\cdot BK}=\frac{JE^2}{KE^2}$

$$\frac{JE^2}{KE^2}=\frac{JG\cdot JH}{KG\cdot KH}=\frac{(EG-EJ)(EH+EJ)}{(EG+EK)(EH-EK)}$$

化简即得引理之式:

$$FG=FJ-GJ=\frac{AJ\cdot JD}{JE}-GJ=\frac{(EG-EJ)(EH+EJ)}{JE}-GJ=\frac{EG\cdot EH}{JE}-EH$$

同理 $HI=\frac{EG\cdot EH}{KE}-EG$, $FG=HI$.

1. 以 A 为原点，AB、AC 分别为 x、y 轴，建立坐标系(图 1). B、C 的坐标分别为 $(12,0)$，$(0,16)$，

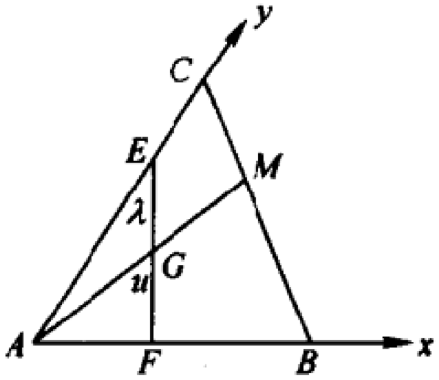


图 1

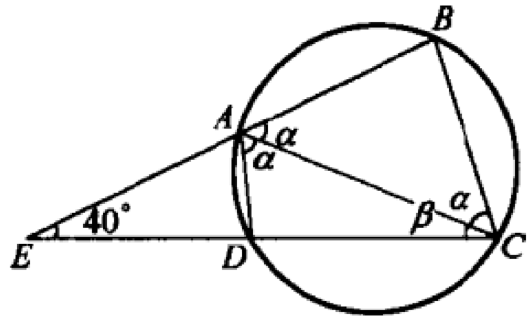


图 2

所以 BC 中点 M 的坐标为 $(6,8)$.

设 F 坐标为 $(z,0)$，则 E 坐标为 $(0,2z)$. 设 $\frac{EG}{GF}=\frac{\lambda}{u}$，$\lambda+u=1$，则 G 点坐标为 $(\lambda z,2uz)$.

由于 A、G、M 共线，所以 $\frac{\lambda z}{2uz}=\frac{6}{8}$，即 $\frac{\lambda}{u}=\frac{3}{2}$.

2. 因为弦 $CD=BC$，所以圆周角 $\angle DAC=\angle CAB=\alpha$. 又 $AB=BC$，所以 $\angle BCA=\angle BAC=\alpha$.

显然有 $3\alpha+\beta=180^\circ$，$\alpha-\beta=40^\circ$.

所以
$$\beta=\frac{1}{4}(180^\circ-3\times40^\circ)=15^\circ.$$

1. 由欧拉公式,

$$OI^2=R^2-2Rr=R^2-2R\cdot 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=R^2\left(1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=R^2\left[1-2\left(\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)\right]$$
$$=R^2\left(2-2\cos\frac{A-C}{2}\right).$$

由正弦定理,

$$(AB-AC)^2=4R^2(\sin C-\sin B)^2=4R^2\cdot 4\sin^2\frac{C-B}{2}\sin^2\frac{A}{2}.$$

因为$|OI|=|AB-AC|$,所以 $1-\cos\frac{A-C}{2}=8\sin^2\frac{C-B}{2}\sin^2\frac{A}{2}$,且 $B=60°$,$C=120°-A$.

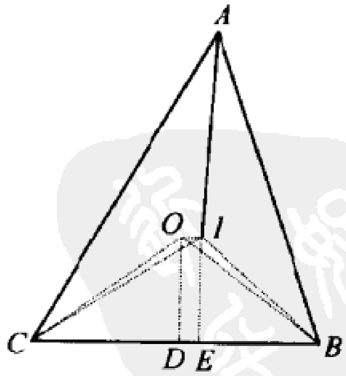
所以 $1-\cos(60°-A)=8\sin^2\left(30°-\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{A}{2}$.

所以 $2\sin^2\left(30°-\frac{A}{2}\right)=8\sin^2\left(30°-\frac{A}{2}\right)\sin^2\frac{A}{2}$.

所以 $\sin\left(30°-\frac{A}{2}\right)=0$,或 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$.

所以 $A=60°$,因此$\triangle ABC$ 为等边三角形.

2. 如图,连结 IC,IB,设 O,I 在BC 上的射影分别为D,E,记 $OA=R$,$IE=r$.



则 $DE=\frac{1}{2}BC-\frac{IE}{\cot\frac{B}{2}}$

$$=R\sin A-4R\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$
$$=2R\sin\frac{A}{2}\left(\cos\frac{A}{2}-2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$
$$=2R\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}=R(\sin B-\sin C)$$
$$=\frac{1}{2}(AC-AB)=IO,$$

即 DE,OI 是两平行线OD 与 IE 间的距离. 故 $OI\stackrel{\scriptstyle\parallel}{=}DE$.

$S_{\triangle BAO}-S_{\triangle CAO}=(S_{\triangle AIO}+S_{\triangle OIB}+S_{\triangle AIB})-(S_{\triangle AIC}-S_{\triangle AIO}-S_{\triangle OIC})=2S_{\triangle AIO}+(S_{\triangle OIB}+S_{\triangle OIC})+(S_{\triangle AIB}-S_{\triangle AIC})=2_{\triangle AIO}+r\cdot OI+\frac{1}{2}r(AB-AC)=2S_{\triangle AIO}+r\cdot OI-r\cdot OI=2S_{\triangle AIO}$,即

$$S_{\triangle IAO}=\frac{1}{2}(S_{\triangle BAO}-S_{\triangle CAO}).$$

易知$\angle AHC=\pi-\angle ABC$所以在$\triangle AHC$中有：

$$\frac{AH}{AC}=\frac{\sin\angle ACH}{\sin\angle AHC}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\angle BAC\right)}{\sin(\pi-\angle ABC)}=\frac{\cos\angle BAC}{\sin\angle ABC}$$

取BC中点M则PQ是$\odot A$与$\odot M$公共弦($\odot M$即以BC为直径的圆)，

所以MA垂直平分PQ，设交于K，则$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}$

$$\Rightarrow AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=(AC\sin\angle ACB)\cdot\frac{AC\cos\angle BAC}{\sin\angle ABC}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-BC^2)=AD\cdot AH$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2=AP^2+\frac{1}{4}BC^2$$

$$\Rightarrow AM^2=AP^2+PM^2$$

所以$AP\perp PM$，又$PK\perp AM$

所以$AK\cdot AM=AP^2$(直角三角形射影定理)

$\qquad\qquad=AD\cdot AH$

所以K,M,D,H共圆.

所以$\angle HKA=\angle MDA=\dfrac{\pi}{2}$.

所以$HK\perp AM$又$PQ\perp AM$且K在PQ上.

所以P,H,Q共线.

又$\angle APM=\dfrac{\pi}{2}=\angle ADM$，

所以A,P,M,D共圆.

又B,P在直线AP同侧，

所以$\angle PMB=\angle PAD$.

设R在线段AD上且在$\odot A$上.R'为PC与AD的交点，

$$\begin{aligned}\text{则}\angle PRA&=\frac{1}{2}(\pi-\angle PAD)\text{(因为 }AP=AR\text{)}\\&=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\angle PMB\\&=\frac{\pi}{2}-\angle PCB\end{aligned}$$

又$\angle PR'A=\angle DR'C=\dfrac{\pi}{2}-\angle PCB$，

(因为$R'D\perp DC$)

所以$\angle PRA=\angle PR'A$.

若R,R'不重合，则$PR/\!/PR'$(因为同位角相等)矛盾　所以R,R'重合.

即PC过$\odot A$与线段AD的交点R同理BQ过R，又AD过R，

所以PC,BQ,AD三线共点.

连结 AH 交 CB 于 D，连结 CH 交 AB 于 E，连结 DE.

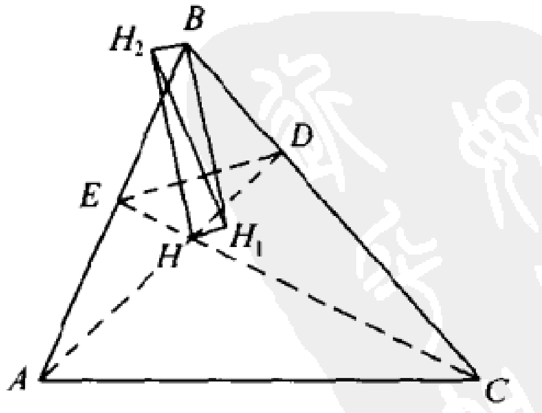
因为 $HD\perp BD$，$HE\perp BE$，$HH_1\perp BH_1$，$HH_2\perp BH_2$.

所以 B、D、H_1、H、E、H_2 6 点共圆且 BH 为直径.

因为 $BH_2\perp BH_1$，所以 H_1H_2 也为圆直径.

因为 BH_1 平分 $\angle DBE$，所以 H_1 为 $\overset{\frown}{DE}$ 中点.

又 H_1H_2 为直径（过圆心），所以 H_1H_2 垂直平分 DE.



因为 $AD\perp CD$，$AE\perp CE$，所以 A、E、D、C 4 点共圆，且 AC 为直径，所以 H_1H_2 垂直平分 DE，H_1H_2 过圆心. 所以 H_1H_2 过 AC 中点.

设 EF 分别与 PS、QR 交于 C、D. 在$\odot W$ 中,由相交弦定理有

$$OQ \cdot OS = OA \cdot OB$$

$$DB \cdot DA = DQ \cdot DR \qquad ①$$

而$\angle SQR = \angle SPR = \angle SEO$

所以 E、S、D、Q 4 点共圆:

$OD \cdot OE = OQ \cdot OS$

而在$\odot W_2$ 中:$DQ \cdot DR = OD \cdot DF$

由①、②、③式有

$$OA \cdot OB = OD \cdot OE$$

$$DA \cdot DB = OD \cdot DF$$

所以

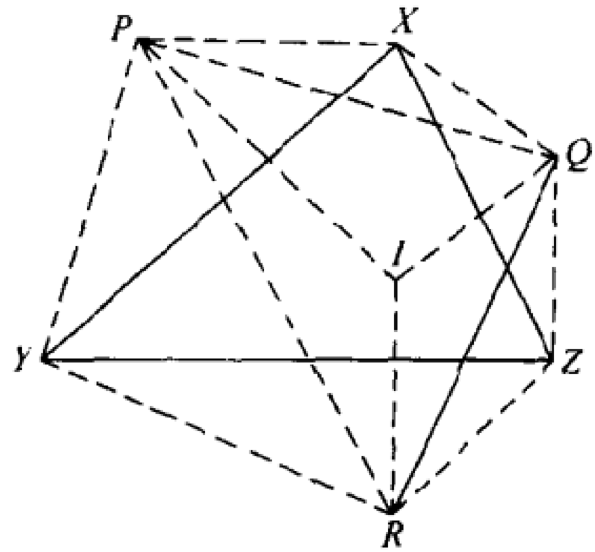
$$\begin{aligned} OD \cdot BF &= OD \cdot (DF - DB) \\ &= DA \cdot DB - OD \cdot DB \\ &= (DA - OD) \cdot DB \\ &= OA \cdot (OB - OD) \\ &= OD \cdot OE - OD \cdot OA \\ &= OD \cdot AE \end{aligned}$$

所以 $BF = AE$,证毕.

引理：若 I 是 $\triangle XYZ$ 的正则点，则 $XY\cdot ZI=XZ\cdot YI$.

证：设 I 关于 XY,XZ,YZ 的对称点分别是 P、Q、R.

则 $XP=XQ=XI$，$\angle PXY=\angle IXY$，$\angle IXZ=\angle QXZ$，



所以 $\angle PXQ=2\angle X$，于是 $PQ=XP\cdot\sin\frac{1}{2}\angle PXQ=XI\cdot\sin X$，

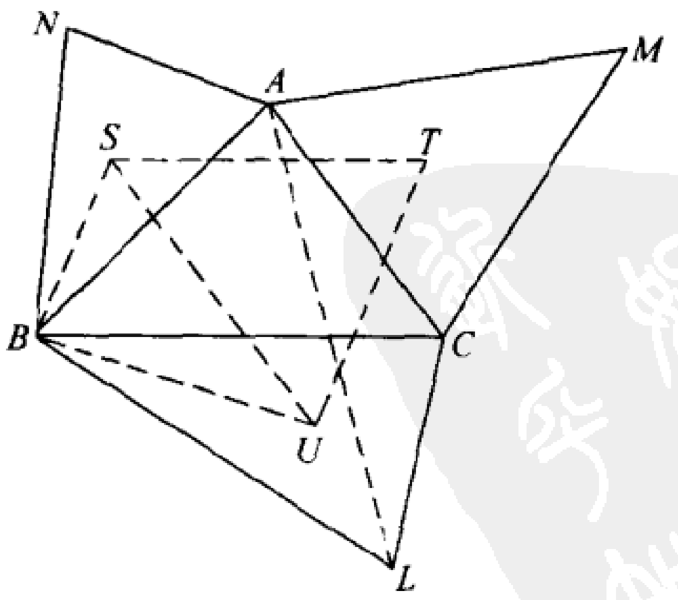
同理，$PR=YI\cdot\sin Y$，$QR=ZI\cdot\sin Z$，由正则点的定义，

$PR=QR=PQ$，所以 $XI\cdot\sin X=YI\cdot\sin Y=ZI\cdot\sin Z$，

由正弦定理，$YZ:XZ:XY=\sin X:\sin Y:\sin Z$，

所以 $XI\cdot YZ=YI\cdot XZ=ZI\cdot XY$，引理证毕.

现证明原命题：



设 $\triangle ABN$，$\triangle ACM$，$\triangle BCL$ 的正则点分别为 S,T,U.

因为 $\triangle ABN\backsim\triangle LBC$，所以 $SB:BU=AB:BL$，且 $\angle NBS=\angle CBU$，

即 $\angle SBU=\angle ABL$，所以 $\triangle SBU\backsim\triangle ABL$，于是

$SU:AL=BU:BL$. 同理，$TU:AL=CU:CL$；

另外，由引理，$BU\cdot CL=CU\cdot BL$，即 $BU:BL=CU:CL$，

所以 $SU:AL=TU:AL$，即 $SU=TU$，同理可证 $TU=ST$，

所以 $\triangle STU$ 是正三角形，证毕.

设$\triangle ABC$三边的长为a、b、c.

考虑到 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABQ}+S_{\triangle BQC}$,所以 $\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}c\cdot BQ\sin\frac{B}{2}+\frac{1}{2}BQ\cdot a\sin\frac{B}{2}$.

所以 $BQ=\dfrac{ac\sin B}{(a+c)\sin\frac{B}{2}}=\dfrac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}$.

又因为 BQ 平分$\angle ABC$,所以$\dfrac{AQ}{QC}=\dfrac{c}{a}$所以$\dfrac{AQ}{AQ+QC}=\dfrac{c}{a+c}$.

于是可得 $AQ=\dfrac{bc}{a+c}$,同理 $BP=\dfrac{ac}{b+c}$.

又由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

所以$(a+c)^2-b^2=4\cos^2\frac{B}{2}\cdot ac$.

所以 $AB+BP=AQ+QB$.

$\Leftrightarrow c+\dfrac{dc}{b+c}=\dfrac{bc}{a+c}+\dfrac{2ac}{a+c}\cos\dfrac{B}{2}$

$\Leftrightarrow\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{(a+c)^2-b^2+ab}{2a(b+c)}=\dfrac{4ac\cos^2\frac{B}{2}+ab}{2a(b+c)}$

$4c\cos^2\dfrac{B}{2}-2(b+c)\cos\dfrac{B}{2}+b=0$

解之得 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{b}{2c}$或 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\cos\dfrac{B}{2}=\dfrac{\sin B}{2\sin C}$或$B=120^\circ$.

即 $\sin\dfrac{B}{2}=\sin C$ 或$B=120^\circ$

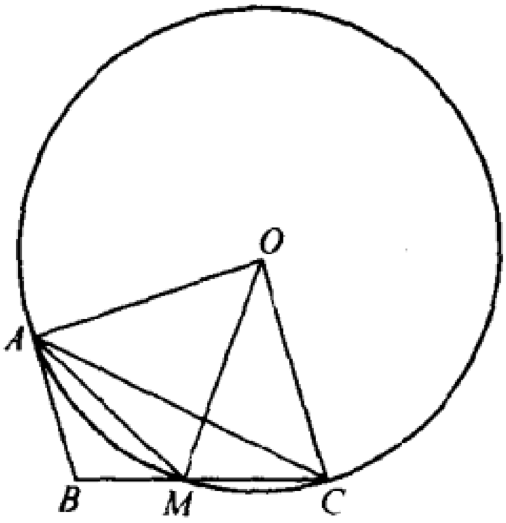
于是 $B=2C$ 或$B=120^\circ$.

1. $B=2C$ 时,$A=30^\circ$,$B=100^\circ$,$C=50^\circ$

2. $B=120^\circ$时,$A=30^\circ$,$B=120^\circ$,$C=30^\circ$.

$\angle B$ 最大值为 105°

作线段 BC，取中点 M，以 MC 为一弦作弓形弧，使劣弧 MC 所对圆心角为 30°，则优弧为 A 点轨迹．过 B 点作此弧的切线，取切点为 A，这样 $\angle B$ 取得最大值．



由 $BA^2 = BM \cdot BC$，得 $\triangle ABM \backsim \triangle CBA$，相似比为 $AB:BC = 1:\sqrt{2}$．

以 AC 为斜边，向外作等腰直角三角形 ACO，则

$$OA = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC = AM,$$

又因为 $\angle OAM = \angle OAC + \angle CAM = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$，

所以 $\triangle AMO$ 为正三角形，

所以 $OM = OA = OC$，

所以 O 是 $\triangle AMC$ 的外接圆圆心．

因为 BA 是 $\odot O$ 切线，

所以 $\angle BAO = 90^\circ$，

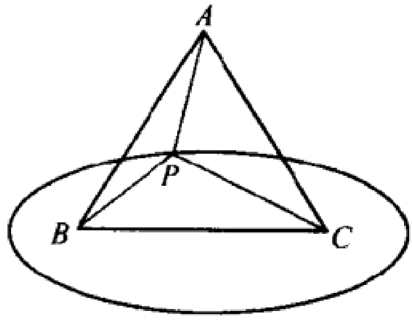
所以 $\angle BAM = 30^\circ = \angle BCA$，

所以 $\angle B = 180^\circ - \angle BCA - \angle CAB = 105^\circ$．

一、(50 分)

先求 $PA+PB+PC$ 的最大值.

当 $PB+PC$ 一定时,P 点轨迹即以 B、C 为焦点的椭圆,由椭圆的凸性知 PA 取得最大值时 P 点在边界上,



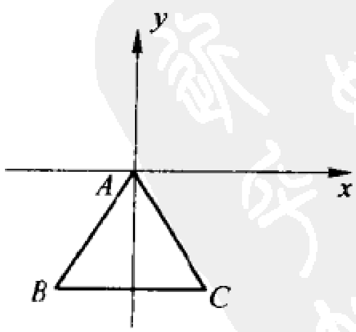
故不妨设 P 在 AB 上,

则 $PA+PB+PC=AB+PC=a+PC\leqslant a+a=2a$.

当 P 落在△ABC 某个顶点时取得最大值.

再求 $PA\cdot PB\cdot PC$ 最大值.

以 A 为原点建立直角坐标系(如图),



B 点为$(-1,-\sqrt{3})$,C 点为$(1,-\sqrt{3})$,

设 $|PA|=a$,则 P 点可表示为$(a\cos\theta,a\sin\theta)$,

因为 P 在△ABC 内,所以 $\theta\in\left[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$,

即 $\sin\theta\in\left[-1,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$,

$$|PB|\cdot|PC|=\sqrt{(a\cos\theta+1)^2+(a\sin\theta+\sqrt{3}^2}\cdot\sqrt{(a\cos\theta-1)^2+(a\sin\theta+\sqrt{3})^2}$$

$$=\sqrt{a^2+4+2a\cos\theta+2\sqrt{3}a\sin\theta}\cdot\sqrt{a^2+4+2\sqrt{3}a\sin\theta-2a\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{(a^2+4+2\sqrt{3}a\sin\theta)^2-4a^2\cos^2\theta}$$

$$=\sqrt{16a^2\sin^2\theta+4\sqrt{3}a(a^2+4)\sin\theta+(a^2+4)^2-4a^2},$$

此式最大值只可在 $\sin\theta=-1$ 或 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取到,即在边界上或在高线上.

1. 若在边界上,不妨设为在 BC 上.

设 AH 为 BC 上的高,设 $PH=6$,

则 $AP=\sqrt{b^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2}=\sqrt{b^2+\frac{3}{4}a^2}$,

$BP\cdot PC=BH^2-PH^2=\frac{1}{4}a^2-b^2$,

$$PA\cdot PB\cdot PC=\sqrt{b^2+\frac{3}{4}a^2}\cdot\left(\frac{1}{4}a^2-b^2\right).$$

$$=\sqrt{b^6+\frac{1}{4}a^2b^4-\frac{5}{16}a^4b^2+\frac{3}{64}a^6}.$$

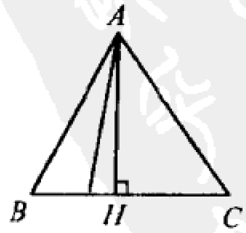
对平方差内设 $x=\frac{b^2}{a^2}, x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$,

则对 $x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{16}x+\frac{3}{64}$求导有

$3x^2+\frac{1}{2}x-\frac{5}{16}=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(3x+\frac{5}{4}\right)<0.$

所以 $x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{16}x+\frac{3}{64}$在$\left[0,\frac{1}{4}\right]$中单调递减,所以最大值在 O 时取到

即 $PA\cdot PB\cdot PC=\sqrt{\frac{3}{64}a^6}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2.$



2. 在高上,不妨设在 AH 上.

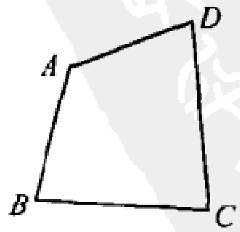
设 $PH=c$,则 $PB\cdot PC=PB^2=(\sqrt{PH^2+BH^2})^2=$

$\left(\sqrt{c^2+\frac{1}{4}a^2}\right)^2=c^2+\frac{1}{4}a^2.$

$PA=\frac{\sqrt{3}}{2}a-c$,设$\frac{c}{a}=y, y\in[0,1]$.

$PA\cdot PB\cdot PC=a^3\cdot\left(-y^3+\frac{\sqrt{3}}{2}y^2-\frac{1}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$

求导知 $-3y^3+\sqrt{3}y-\frac{1}{4}=-\left(\sqrt{3}y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant 0$,所以当 $y=0$ 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$.



不行.

用反证法.假设可以将凸四边形 $ABCD$ 划为 m 个凹四边形.设这个划分中涉及到的非 A、B、C、D 的顶点有 $P_1\cdots P_n$ 这 n 个.

一方面由内角和知 $360°+n\cdot 360°=m\cdot 360°$,

所以 $m=n+1$.

另一方面,从凹四边形的那个大于平角的角的顶点来看.因为任两个凹四边形不可能公用一个点作为那个大于平角的角的顶点.

所以 $m\leqslant n$.矛盾!所以不可以划分.

充分性：若 P 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $PA=PB=PC=R$.

所以 $PA^2\sin2A+PB^2\sin2B+PC^2\sin2C$

$=R^2(\sin2A+\sin2B+\sin2C)$

$=R^2[2\sin(A+B)\cos(A-B)-\sin2(A+B)]$

$=2R^2\sin(A+B)[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$

$=4R^2\sin A\sin B\sin C$.

必要性：设 P 是满足条件的点，不妨假定它在 $\triangle OAC$ 的内部，如图 6 所示，令 $\angle POC=\alpha$，易证 $\angle POA=2B-\alpha$，$\angle POB=2A+\alpha$.

所以 $PA^2\sin2A+PB^2\sin2B+PC^2\sin2C$

$=4R^2\sin A\sin B\sin C$

$=R^2\sin2A+R^2\sin2B+R^2\sin2C$.

所以 $(PA^2-R^2)\sin2A+(PB^2-R^2)\sin2B+(PC^2-R^2)\sin2C=0$.

由余弦定理，得

$PA^2-R^2=OP^2-2OP\cdot R\cos(2B-\alpha)$

$PB^2-R^2=OP^2-2OP\cdot R\cos(2A+\alpha)$

$PC^2-R^2=OP^2-2OP\cdot R\cos\alpha$.

代入公式得

$OP^2(\sin2A+\sin2B+\sin2C)-2OP\cdot R\cdot[\cos(2B-\alpha)\sin2A+\cos(2A+\alpha)\sin2B+\cos\alpha\sin2C]=0$.

又因为 $\cos(2B-\alpha)\sin2A+\cos(2A+\alpha)\sin2B+\cos\alpha\sin2C$

$=\cos2B\sin2A\cos\alpha+\sin2B\sin2A\sin\alpha+\cos2A\sin2B\cos\alpha-\sin2A\sin2B\sin\alpha+\cos\alpha\sin2C$

$=\cos\alpha[\sin2A\cos2B+\cos2A\sin2B+\sin2C)$

$=\cos\alpha[\sin2(A+B)+\sin2C]$

$=0$.

所以 $OP^2(\sin2A+\sin2B+\sin2C)=0$.

又，$\triangle ABC$ 为锐角三角形，即 $0^\circ<A,B,C<90^\circ$，从而 $0^\circ<2A,2B,2C<180^\circ$，所以 $\sin2A,\sin2B,\sin2C$ 均大于零，从而 $OP^2=0$，也就是 P 与 O 重合.

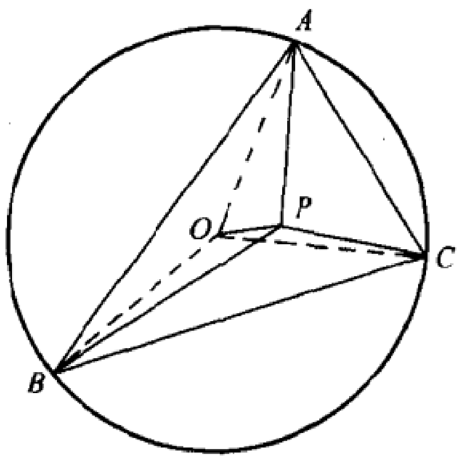


图 6

上面证明说明，对任意 P，均有

$PA^2\sin2A+PB^2\sin2A+PC^2\sin2C\geqslant4R^2\sin A\sin B\sin C$，

当且仅当 P 为外心时等号成立.

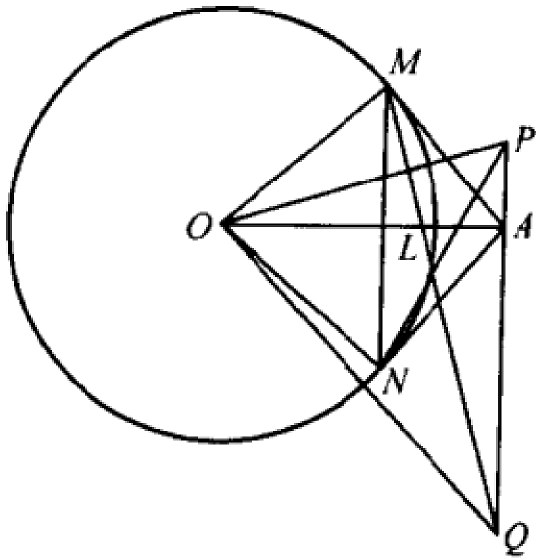
连结 OA、OM，设$\angle AOP=\alpha$，$\angle AOQ=\beta$. 因为 AM、AN 是$\odot O$ 的两条切线，所以由切线长定理知 $AM=AN$，且 $AO\perp MN$.

又因为 $PQ/\!/MN$，所以 $AO\perp PQ$.

$$\cos\angle POQ=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

所以$=\dfrac{OA}{OP}\cdot\dfrac{OA}{OQ}-\dfrac{AP}{OP}\cdot\dfrac{AQ}{OQ}$

$=\dfrac{OA^2-AP\cdot AQ}{OP\cdot OQ}$



又因为 $\angle AMP=\angle MNL=\angle AQN$，$\angle APM=\angle PMN=\angle ANQ$，

所以 $\triangle AMP\backsim\triangle AQN$，

所以$\dfrac{AM}{AQ}=\dfrac{AP}{AN}$，

所以 $AP\cdot AQ=AM\cdot AN=AM^2$，

所以 $\cos\angle POQ=\dfrac{OA^2-AM^2}{OP\cdot OQ}$

$=\dfrac{OM^2}{OP\cdot OQ}$，

所以 $OM^2=OP\cdot OQ\cos\angle POQ$，

所以 $S_{\odot O}=\pi\cdot OM^2=\pi\cdot OP\cdot OQ\cos\angle POQ$，

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\angle POQ$，

所以由已知得：$\pi\cdot OP\cdot OQ\cos\angle POQ=\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}OP\cdot OQ\sin\angle POQ$，

所以 $\tan\angle POQ=\sqrt{3}$，$\angle POQ=60^\circ$.

设 AB, BC, CD, DA 的中点分别为 M, N, K, L.

若 $ABCD$ 为凸四边形，如图 1. 连 BD, AC.

则 $ML \parallel BD$, $NK \parallel BD$，且 $ML = \frac{1}{2}BD = NK$.

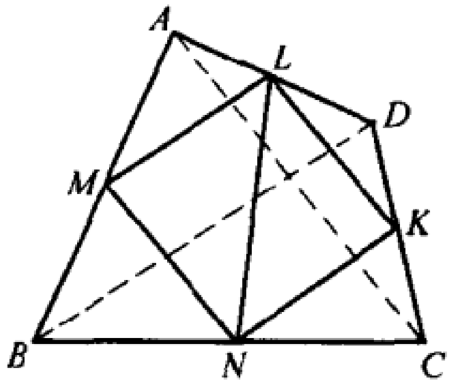


图 1

所以 $MNKL$ 为平行四边形

$$\Rightarrow S_{\triangle MNL} = S_{\triangle NKL} = \frac{1}{2}ab.$$

又 $S_{四边形ABCD} = (S_{\triangle AML} + S_{\triangle CNK}) + (S_{\triangle BMN} + S_{\triangle DKL}) + S_{\triangle MNL} + S_{\triangle KLN}$

$$= \frac{1}{4}S_{四边形ABCD} + \frac{1}{4}S_{四边形ABCD} + \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}ab$$

$$= \frac{1}{2}S_{四边形ABCD} + ab,$$

所以 $S_{四边形ABCD} = 2ab$.

若 $ABCD$ 为凹四边形，如图 2 所示. 连 AC、BD，易证 $KMNL$ 为平行四边形.

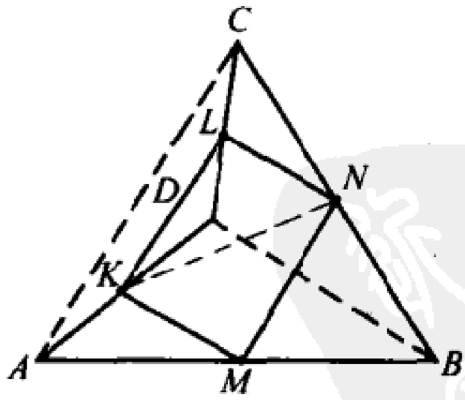


图 2

$S_{四边形MNLK} = ab$,

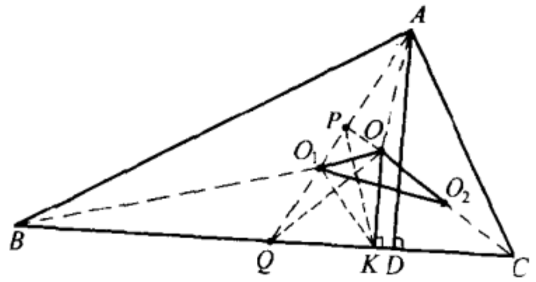
$$S_{四边形ABCD} = S_{四边形MNLK} + S_{\triangle BMN} - S_{\triangle DKL} + S_{\triangle CLN} + S_{\triangle AMK}$$

$$= ab + \frac{1}{4}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle DAC}) + \frac{1}{4}(S_{\triangle BCD} + S_{\triangle ABD})$$

$$= ab + \frac{1}{4}S_{四边形ABCD} + \frac{1}{4}S_{四边形ABCD}$$

$$\Rightarrow S_{四边形ABCD} = 2ab.$$

作 $OK\perp BC$ 于K，以下证 K 是$\triangle OO_1O_2$ 外心．延长 OO_1，OO_2，则它们



分别经过 B，C，连结 AO_1 并延长，交 BC 于Q；连结 AO，延长 CO 交AQ 于P，连结 PK、O_1K，OQ，显然 BO、CO，AO，AO_1 分别是$\angle ABC$，$\angle ACB$ $\angle BAC$ 与$\angle BAD$ 的平分线．

因为$\angle BAC=\angle ADC=\mathrm{Rt}\angle$，

所以$\angle ABC=\angle DAC=2\angle OBC=2\angle OBA$，$\angle BAD=\angle ACD$．

第一步：证 A，O，Q，B 共圆，

$$\begin{aligned}\text{因为}\angle AOB&=\angle OAC+\angle OBC=\frac{1}{2}\angle BAC+\frac{1}{2}\angle ABC+\angle ACB.\\&=\frac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC+\angle ACB)+\frac{1}{2}\angle ACB\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\angle AQB&=\angle QAC+\angle ACB=\angle QAD+\angle DAC+\angle ACB\\&=\frac{1}{2}\angle ACB+\angle ABC+\angle ACB\\&=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\angle ACB.\end{aligned}$$

所以$\angle AOB=\angle AQB$，所以 A，O，Q，B 共圆．

第二步：证 P，O，K，Q 共圆

$$\begin{aligned}\text{因为}\angle PAC+\angle ACP&=\angle QAD+\angle DAC+\frac{1}{2}\angle ACD\\&=\frac{1}{2}\angle ACD+\angle DAC+\frac{1}{2}\angle ACD=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

所以$\angle APC=\mathrm{Rt}\angle$，因为$\angle OKQ=\mathrm{Rt}\angle$，所以 P，O，K，Q 共圆．

第三步：证 $OK=O_1K$

因为$\angle AO_1O=\angle BAO_1+\angle ABO_1=\frac{1}{2}(\angle ABD+\angle DAB)=\frac{\pi}{4}$，

$\angle POO_1=\angle OBC+\angle OCB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\frac{\pi}{4}$，

所以$\angle PO_1O=\angle POO_1$，

所以 $PO_1=PO$．

因为 A，O，Q，B 共圆且 P，O，K，Q 共圆，所以$\angle OPK=\angle OQK=\angle BAO=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{\pi}{4}$．

所以 PK 平分$\angle O_1PO$，所以 PK 为O_1O 中垂线，

所以 $O_1K=OK$．

同理：$O_2K=OK$　即 $KO=KO_1=KO_2$，所以 K 是$\triangle OO_1O_2$ 外心原命题亦得证．