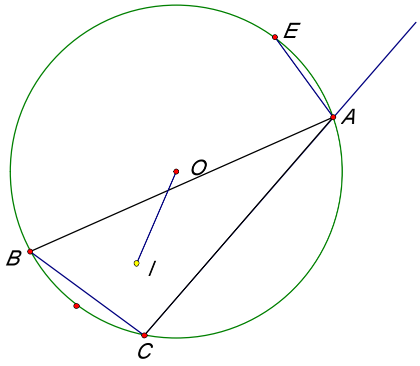
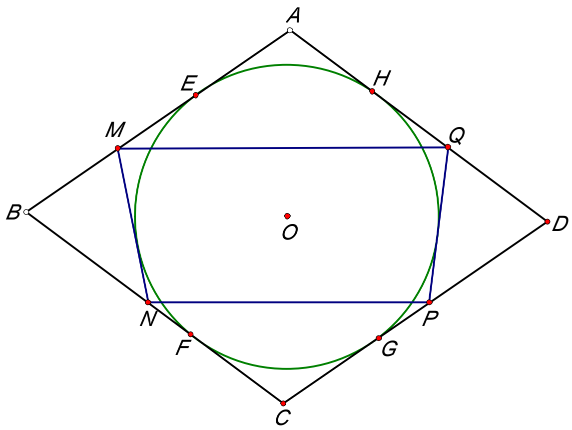
1994—2009 年全国联赛中的平面几何题

1.如图,设 ΔABC 的外接圆 O 的半径为 R ,内心为 I , $\angle B=60^{\circ}$, $\angle A<\angle C$, $\angle A$ 的外角平分线交圆 O 于 E .

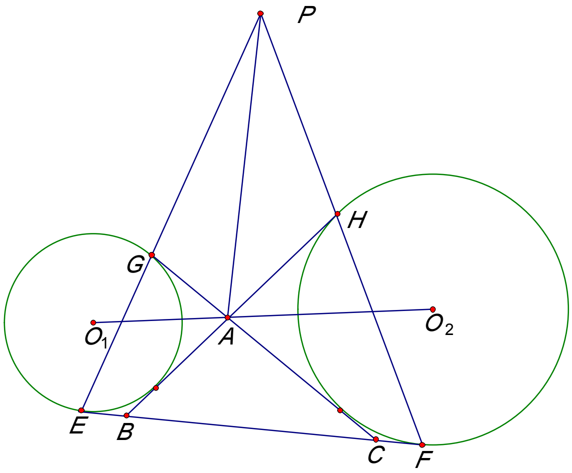
证明:(1) $IO=AE$; (2) $2R<OI+IA+IC<(1+\sqrt{3})R$. (1994 年)



2.如图,菱形 $ABCD$ 的内切圆 O 与各边分别相切于 E,F,G,H,在 $\overset{\frown}{EF}$ 与 $\overset{\frown}{GH}$ 上分别作圆 O 的切线交 AB 于 M,交 BC 于 N,交 CD 于 P,交 DA 于 Q.证明: $MQ // NP$.(1995 年)

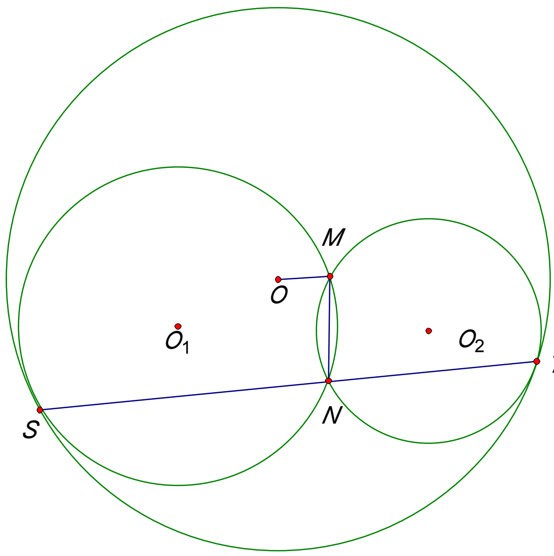


3.如图示,圆 O_1 与圆 O_2 和 ΔABC 的三边所在的直线都相切, E, F, G, H 为切点,直线 EG 和 FH 相交于 P 点.证明: $PA \perp BC$.(1996 年)

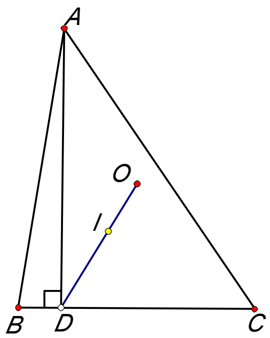


4.如图,已知两个半径不相等圆 O_1 与圆 O_2 相交于 M,N 两点,且圆 O_1,圆 O_2 分别与圆 O 内切于 S,T 两点.

求证:$OM \perp MN \Leftrightarrow S,N,T$ 三点共线.(1997 年)

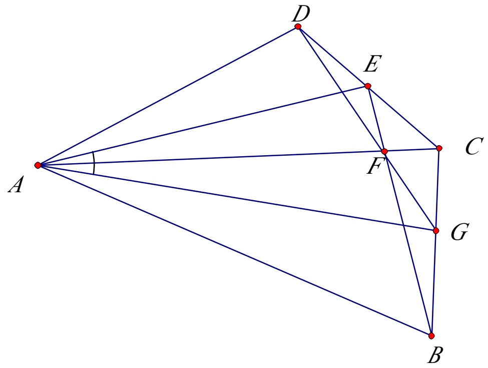


5.如图,O,I分别为ΔABC的外心和内心,AD是BC边上的高,I在线段OD上.求证:ΔABC的外接圆半径等于BC边上的旁切圆半径.注:ΔABC的BC边上的旁切圆是与边AB,AC的延长线以及边BC都相切的圆.**(1998年)**

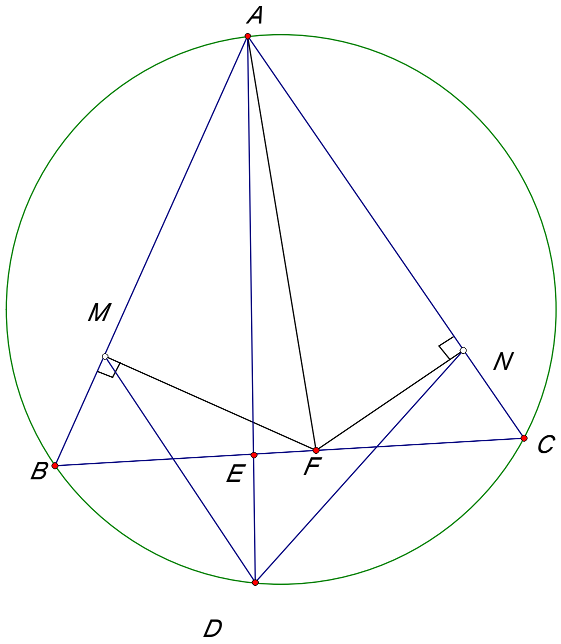


6.如图,在凸四边形 $ABCD$ 中, AC 平分 $\angle BAD$, E 是线段 CD 上的一点. $BE \cap AC = F$, $DF \cap BC = G$.

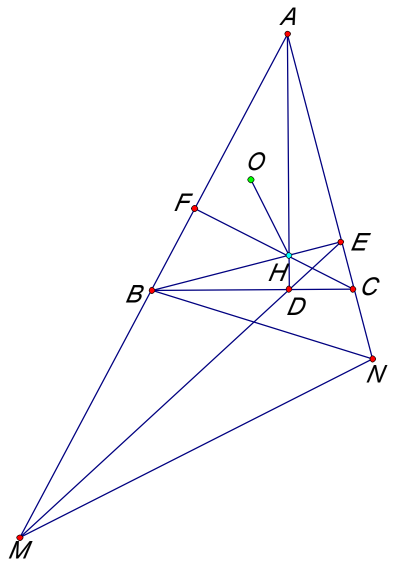
求证: $\angle EAC = \angle GAC$.(1999 年)



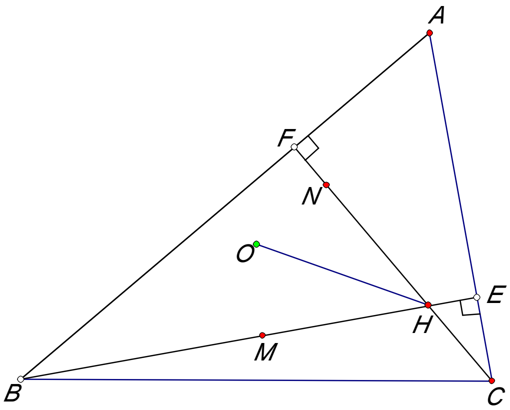
7.如图,锐角ΔABC的BC边上有两点E,F,满足$\angle BAE=\angle CAF$,作$FM\perp AB,FN\perp AC$(M,N是垂足),延长AE交ΔABC的外接圆于点D.证明:四边形$AMDN$的面积与ΔABC的面积相等.(2000年)



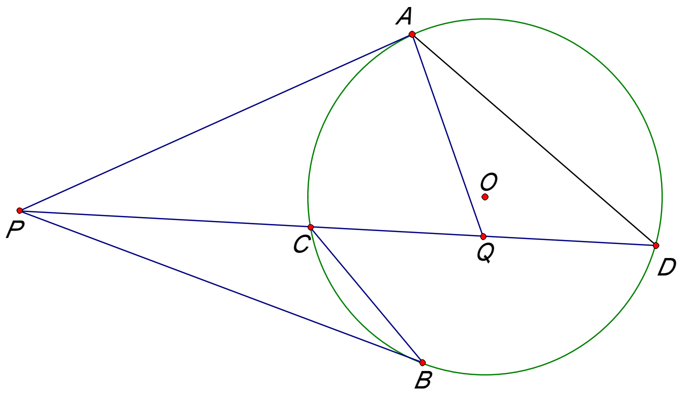
8.如图,ΔABC中,O为外心,三条高AD,BE,CF交于点H,直线ED和AB交于点M,直线FD和AC交于点N,求证:**(1)** $OB\perp DF,OC\perp DE$; **(2)** $OH\perp MN$.**(2001**年**)**



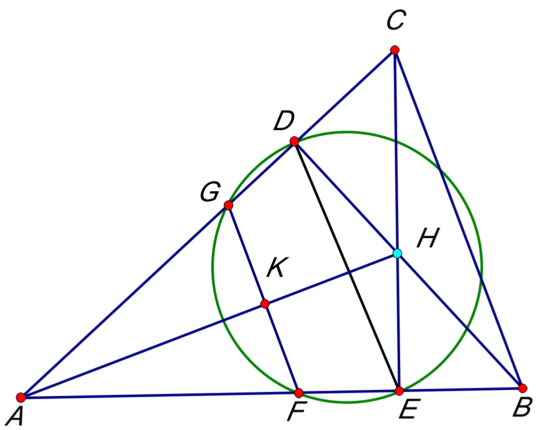
9.如图,在ΔABC中,$\angle A=60^\circ$,$AB>AC$,点O是ΔABC的外心,高BE,CF交于点H,点M,N分别在线段BH,HF上,且满足$BM=CN$.求$\dfrac{MH+NH}{OH}$的值.(2002年)



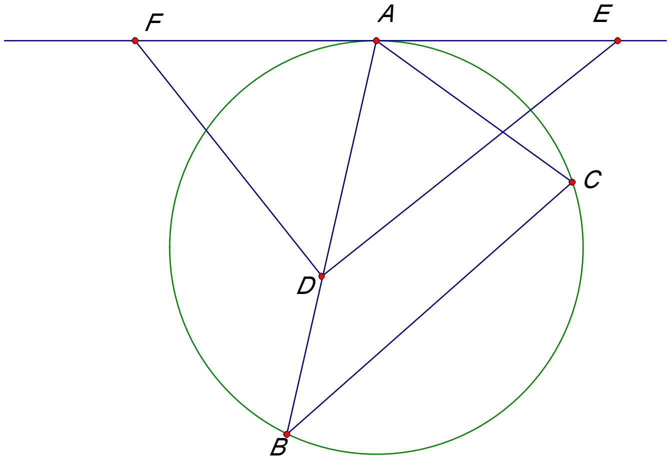
10.过圆外一点 P 作圆的两条切线和一条割线,切点为 A, B ,所作割线交圆于 C, D 两点, C 在 P, D 之间.在弦 CD 上取一点 Q, 使 $\angle DAQ = \angle PBC$.求证: $\angle DBQ = \angle PAC$.(2003 年)



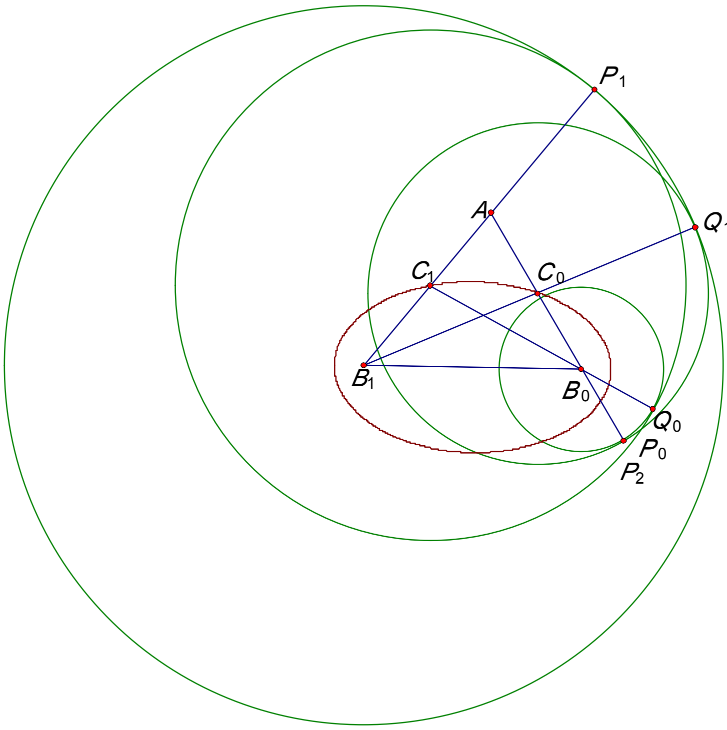
11.如图,在锐角ΔABC中,AB上的高CE与AC上的高BD相交于点H,以DE为直径的圆分别与两边AB,AC相交于F,G两点,$FG\cap AH=K$,$BC=25$,$BD=20$,$BE=7$.求AK的长.(2004年)



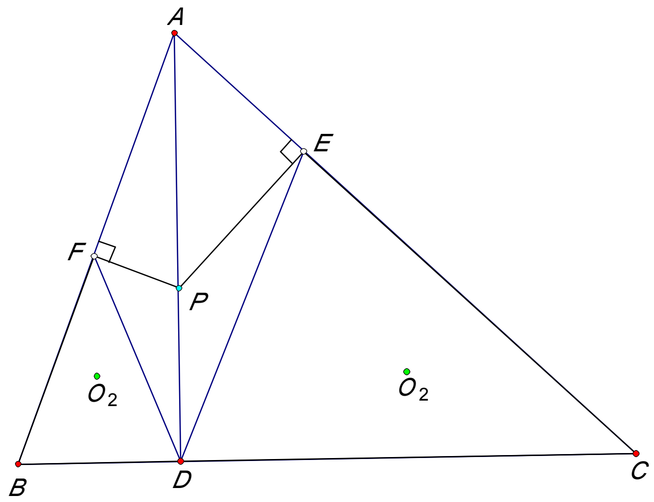
12.如图,在 ΔABC 中, $AB > AC$, 过 A 作 ΔABC 外接圆的切线 l ,又以点 A 为圆心, AC 为半径作圆分别交线段 AB 于点 D,交直线 l 于点 E, F .证明:直线 DE, DF 分别通过 ΔABC 的内心与一个旁心.**(2005 年)**



13.如图,以 B_0,B_1 为焦点的椭圆与 ΔAB_0B_1 的边 AB_i 交于 $C_i(i=0,1)$.在 AB_0 的延长线上任取点 P_0 ,以 B_0 为圆心, B_0P_0 为半径作圆弧 P_0Q_0 交 C_1B_0 的延长线于点 Q_0 ;以 C_1 为圆心, C_1Q_0 为半径作圆弧 P_1Q_0 交 B_1A 的延长线于点 P_1 ;以 B_1 为圆心, B_1P_1 为半径作圆弧 P_1Q_1 交 B_1C_0 的延长线于点 Q_1 ;以 C_0 为圆心, C_0Q_1 为半径作圆弧 Q_1P_2 交 AB_0 的延长线于点 P_2 .试证明:(1) P_2 与点 P_0 重合,且圆弧 P_0Q_0 与圆弧 P_0Q_1 相内切于点 P_0 ;(2) P_0,P_1,Q_0,Q_1 四点共圆.(2006 年)

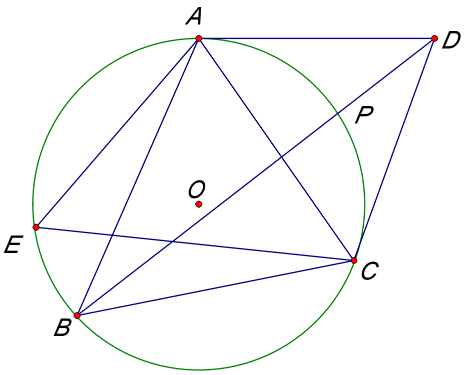


14.如图,在锐角ΔABC中,$AB < AC$,AD是边BC上的高,P是线段AD上一点,过P作$PE \perp AC$,垂足为E,作$PF \perp AB$,垂足为F,O_1, O_2分别是$\Delta BDF, \Delta CDE$的外心.求证:O_1, O_2, E, F四点共圆的充要条件为P是ΔABC的垂心.**(2007年)**



15.如图,凸四边形 $ABCD$,$\angle B+\angle D<180°$,$f(P)=PA\cdot BC+PD\cdot CA+PC\cdot AB$,其中 P 是平面上的一动点.(1)求证:当 $f(P)$ 达到最小值时,P,A,B,C 四点共圆;

(2)设 E 是 ΔABC 外接圆 O 的弧 AB 上一点,满足:$\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{BC}{EC}=\sqrt{3}-1,\angle ECB=\dfrac{1}{2}\angle ECA$,且圆 O 的两条切线为 DA,DC,$AC=\sqrt{2}$,求 $f(P)$ 的最小值.(2008 年)



16.如图,已知 M,N 分别为锐角三角形 ΔABC ($\angle A<\angle B$)的外接圆 Γ 上弧 BC,弧 AC 的中点.过点 C 作 $PC\parallel MN$ 交圆 Γ 于 P 点,I 为 ΔABC 的内心,连接 PI 并延长交圆 Γ 于 T.

(1)求证: $MP\cdot MT=NP\cdot NT$;(2)在弧 AB (不含点 C)上任取一点 $Q(Q\neq A,T,B)$,记 ΔAQC , ΔQCB 的内心分别为 I_1,I_2.求证: Q,T,I_1,I_2 四点共圆.(2009 年)