2015年全国高中数学联合竞赛广东赛区选拔赛试卷
参考答案及评分标准

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准. 填空题只设8分和0分两档；其他各题的评阅，请严格按照评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中第9小题4分为一个档次，第10、11小题5分为一个档次，不要增加其他中间档次.

一、填空题：本大题共8小题，每小题8分，共64分.

1. 已知z为方程$z^4+z^3+z^2+z+1=0$的根，则$z^{2015}=$____________.

【答案】1.

【解析】因为$z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$，所以$z^5=1$，进而$z^{2015}=1$.

2. 设集合$S=\{1,2,\cdots,10\}$，$A=\{a_1,a_2,a_3\}$是S的子集，且a_1,a_2,a_3满足：$1\le a_1<a_2<a_3\le 10, a_2-a_1\le 4$，那么满足条件的子集的个数为____________.

【答案】100.

【解析】依次取$a_1\in\{1,2,\cdots,8\}$，穷举可得.

3. 若函数$y=\log_a(x^2-ax+1)$有最小值，则a的取值范围是____________.

【答案】$1<a<2$.

【解析】当$0<a<1$时，函数$y=\log_a x$单调递减. 由于$t=x^2-ax+1$没有最大值，所以函数$y=\log_a(x^2-ax+1)$没有最小值.

当$a>1$时，函数$y=\log_a(x^2-ax+1)$有最小值，当且仅当$t=x^2-ax+1$有大于0的最小值，当且仅当$\Delta=a^2-4<0$. 所以$1<a<2$.

4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0, a_{n+1}=a_n+1+2\sqrt{a_n+2}$，则该数列的通项公式$a_n=$____________.

【答案】$a_n=\left(n+\sqrt{2}-1\right)^2-2$.

【解析】因为$a_{n+1}+2=a_n+2+2\sqrt{a_n+2}+1=\left(\sqrt{a_n+2}+1\right)^2>0$，所以$\sqrt{a_{n+1}+2}=\sqrt{a_n+2}+1$，即$\left\{\sqrt{a_n+2}\right\}$是首项为$\sqrt{2}$，公差为1的等差数列. 于是$\sqrt{a_n+2}=\sqrt{2}+n-1$，进而$a_n=\left(n+\sqrt{2}-1\right)^2-2$.

5. 设函数$f(x)=1-|1-2x|, 0\le x\le 1$，则曲线$y=f(f(x))$的长为____________.

【答案】$\sqrt{17}$.

【解析】分段画出图像，所求长为$4\times\sqrt{1+(1/4)^2}=\sqrt{17}$.

6. 已知点D是正三角形ABC的边BC的中点，分别在边AB、AC上随机各取一点P和Q，则角∠PDQ为锐角的概率是____________.

【答案】$\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\ln 3$.

【解析】不妨设正三角形 ABC 的边长为 2，以 DC 为 x 轴的正方向，DA 为 y 轴的正方向，建立坐标系．则直线 AB 和 AC 的方程分别是：

$$y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}, \qquad y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}.$$

记点 P 和 Q 的坐标分别为 $\left(-x_1,-\sqrt{3}x_1+\sqrt{3}\right)$，$\left(x_2,-\sqrt{3}x_2+\sqrt{3}\right)$，$0\le x_1,x_2\le 1$．若角 $\angle PDQ$ 为锐角，则内积

$$\overrightarrow{DP}\bullet\overrightarrow{DQ}=-x_1x_2+3(1-x_1)(1-x_2)>0, \quad 即 \quad x_2<\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3-2x_1}\right).$$

在 $0\le x_1,x_2\le 1$ 上考虑满足上述条件的 (x_1,x_2)，有概率

$$P=\int_0^1\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3-2x}\right)dx=\frac{3}{2}-\frac{3}{4}\ln 3.$$

7. 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{\sqrt{6}}{3},\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=$____________.

【答案】1/4.

【解析】平方求和，再用倍角公式即得.

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 上一点 P 到点 $(4,0)$ 的距离等于 4，则 P 点到直线 $x=-\frac{25}{4}$ 的距离为____________.

【答案】7.5.

【解析】因为 $a=5,b=3$，所以 $c=4$，且 P 到另一个焦点 $(-4,0)$ 的距离为 $2\times5-4=6$．由于直线 $x=-\frac{25}{4}$ 是椭圆的左准线方程，因此 P 点到直线 $x=-\frac{25}{4}$ 的距离为 $d=\frac{6}{e}=\frac{15}{2}=7.5$.

二、解答题：本大题共 3 小题，共 56 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

9.（本小题满分 16 分） 在三棱锥 S-ABC 中，$SA=4,\ SB\ge 7,\ SC\ge 9$，$AB=5,\ BC\le 6,\ AC\le 8$，求三棱锥 S-ABC 体积的最大值.

【解析】设 $\angle SAB=\alpha$，则

$$\cos\alpha=\frac{SA^2+AB^2-SB^2}{2\times SA\times AB}\le\frac{4^2+5^2-7^2}{2\times4\times5}=-\frac{1}{5}, \qquad \text{.......... 4 分}$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}\le\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

于是 $S_{\Delta SAB}=\frac{1}{2}\times SA\times SB\times\sin\alpha\le 4\sqrt{6}$， .... 8 分

$V_{C-SAB}\le\frac{1}{3}\times S_{\Delta SAB}\times BC\le 8\sqrt{6}$. .... 12 分

取 $SB=7,BC=6$ 且 CB 垂直平面 SAB 时，可以验证满足已知条件且上式等号成立，所以三棱锥 S-ABC 体积的最大值为 $8\sqrt{6}$. .... 16 分

10.（本小题满分 20 分）已知抛物线 $y^2 = 2px$（$p>0$）上两个动点 $A(x_1,y_1)$（$y_1>0$），$B(x_2,y_2)$（$y_2<0$）.

(1) 设 AB 的连线与 x 轴交于 C，抛物线在 A、B 两点的切线的交点坐标为 $D(x_3,y_3)$，证明：$|OC|+x_3=0$，其中 O 为坐标原点；

(2) 若 $OA\perp OB$，求线段 AB 的中点的轨迹方程.

【解析】（1）因为 $y_1^2=2px_1, y_2^2=2px_2, y_2^2-y_1^2=2p(x_2-x_1)$，直线 AB 的方程是：$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$. 当 $y=0$ 时，

$$x=-\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}y_1+x_1=-\frac{y_2^2-y_1^2}{2p(y_2-y_1)}y_1+\frac{y_1^2}{2p}=-\frac{y_1y_2}{2p},$$

所以 $|OC|=-\dfrac{y_1y_2}{2p}$. .... 5 分

另一方面，抛物线在 A、B 两点的切线方程分别为：$yy_1=p(x+x_1), yy_2=p(x+x_2)$，求得其交点的横坐标为 $x_3=\dfrac{y_1y_2}{2p}$. 于是 $|OC|+x_3=0$. .... 10 分

（2）由（1）知，$x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}$. 因为 $OA\perp OB$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 进而，

$$y_1y_2+\frac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=0\Rightarrow y_1y_2=-4p^2.$$ .... 15 分

设线段 AB 的中点的坐标为 (x,y)，则 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}, y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$. 于是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1^2+y_2^2}{4p}=\frac{1}{4p}\left[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2\right]=\frac{1}{4p}\left[4y^2+8p^2\right]$$

整理可得

$y^2=px-2p^2$ 为所求的轨迹方程. .... 20 分

11.（本小题满分 20 分）设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+\dfrac{n}{a_n}$（$n\in N^*$）. 证明

(1) 当 $n\geq 4$ 时，$n<a_n^2<n+1$；

(2) 数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 的前 n 项和 S_n 满足：当 $n\geq 4$ 时，

$$\frac{3}{2}+\ln(n+2)-\ln 5<S_n<\frac{3}{2}+\ln n-\ln 3.$$

【解析】（1）用数学归纳法：当 $n=4$ 时，命题成立.

假设当 $n\geq 4$ 时，$n<a_n^2<n+1$. 由于函数 $f(x)=\dfrac{x}{n^2}+\dfrac{n^2}{x}$ 在 $(0,n^2)$ 上严格递减，所以

$$a_{n+1}^2=\frac{a_n^2}{n^2}+\frac{n^2}{a_n^2}+2<\frac{n}{n^2}+\frac{n^2}{n}+2<n+2,\ a_{n+1}^2>\frac{n+1}{n^2}+\frac{n^2}{n+1}+2>n+1.$$

命题成立.

由数学归纳法可知，命题得证。 .... 5 分

（2）当$n\geq 4$时，由（1）可得

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdots+\frac{1}{n+1}<S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k^2}<1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

证明：$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x,\quad x>0.$ .... 10 分

由上式可得

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\cdots+\frac{1}{n+1}>\ln\left(1+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\ln(n+2)-\ln 5,$$ .... 15 分

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\cdots+\frac{1}{n}<\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\ln n-\ln 3.$$

所以当$n\geq 4$时，

$$\frac{3}{2}+\ln(n+2)-\ln 5<S_n<\frac{3}{2}+\ln n-\ln 3.$$ .... 20 分