福建省高一数学竞赛

目录

2005 年福建省高一数学竞赛

一、填空题（共 10 小题，每小题 9 分，满分 90 分）

1. $y=\sqrt{\frac{1}{3}-x}+\sqrt{\frac{1}{3}+x}$的最大值为$a$，最小值为$b$，则$ab$等于______________.

2. 已知实数b,c满足$b<2<c$，且函数$y=x^2-4|x|+4$,当$b\le x\le c$时有最大值$4c$，最小值b，则$b+c=$______________.

3. 已知集合$S=\{x|1<x<10,x\in N^+\}$，对它的任一非空子集A，可以将A中的每一个元素k都乘以$(-1)^k$再求和（例如，$A=\{2,3,8\}$，则可求得和为$(-1)^2\times2+(-1)^3\times3+(-1)^8\times8=7$），对$S$的所有非空子集，这些和的总和为____________.

4. 已知两个集合$A=\{(x,y)|x=m,y=-3m+2,m\in N^+\}$，$B=\{(x,y)|x=n,y=a(n^2-n+1),n\in N^+\}$,若$A\cap B\neq\Phi$,则整数$a$的值为____________.

5. 函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，并且对任意正实数x，都有$f(x)+2f\left(\frac{2005}{x}\right)=3x$，则$f(2)=$______________.

6. a,b,c是正整数，且成等比数列，$b-a$是一个完全平方数，$\log_6a+\log_6b+\log_6c=6$，则$a+b+c=$_____________.

7. 已知$f(x)=x^2+6ax-a,y=f(x)$的图像与x轴有两个不同的交点$(x_1,0),(x_2,0)$且$\frac{a}{(1+x_1)(1+x_2)}-\frac{3}{(1-6a-x_1)(1-6a-x_2)}=8a-3$，则$a$的值为_____________.

8. 若不等式$\left(\frac{1}{\pi}\right)^{ax^2+7x-1}<\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2x+5}$对$-1\le a\le1$恒成立，则$x$的取值范围是____________.

9. 已知数列$\{a_k\}$的通项$a_k=2^k,k=1,2,\cdots,n$，则所有的$a_ia_j(1\le i\le j\le n)$的和为____________.

10. 设n为正整数，记$1\times2\times\ldots\times n$为$n!$(例如$1!=1,2!=1\times2,5!=1\times2\times3\times4\times5$)，若存在正整数$a_2,a_3,a_4,a_5,a_6$满足$\frac{31}{36}=\frac{a_2}{2!}+\frac{a_3}{3!}+\frac{a_4}{4!}+\frac{a_5}{5!}+\frac{a_6}{6!}$，这里$0\le a_i\le i,i=2,3,4,5,6$，则${a_2}^2+{a_3}^2+{a_4}^2+{a_5}^2+{a_6}^2$等于_____________.

二、解答题（共 4 小题，每小题 15 分，满分 60 分）

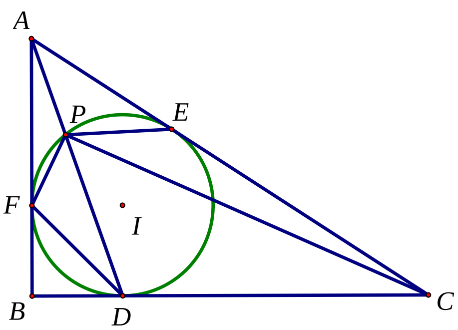
11. 设a,b,c这三个质数成等差数列，公差为 10，求出所有这样的a,b,c.

12. 设$f(x)=ax^2+bx+c(a,b,c\in R)$，已知$|f(-1)|\le1,|f(0)|\le1,|f(1)|\le1$，求证：当$x\in[-1,1]$时，$|f(x)|\le\frac{5}{4}$.

13. 在直角三角形ABC中，$\angle B=90°$，它的内切圆分别与BC,CA,AB相切于点D,E,F，连接AD，与内切圆相交于另一点P，连接PC,PE,PF,FD.已知$PC\perp PF$.

求证：（1）$\frac{PF}{FD}=\frac{PD}{DC}$

（2）$PE/\!/BC$.



14. 设集合A的元素都是正整数，满足如下条件：

（1）A的元素个数不小于 3；（2）若$a\in A$，则a的所有正因数都属于A；

（3）若$a\in A,b\in A,1<a<b$，则$1+ab\in A$.

请解答下面的问题：（1）证明：1，2，3，4，5 都是集合A的元素；

（2）问：2005 是否是集合A的元素？并说明理由。

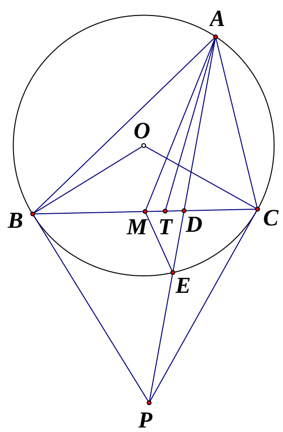
2006 年福建省高一数学竞赛

一、 填空题（每小题 5 分，共 60 分）

1. 满足$\sqrt{n+99}-\sqrt{n}<1$的最小正整数为____________.
2. 对于实数s,t，代数式$6t^2+3s^2-4st-8t+6s+5$的最小值是____________.
3. 设x,y是正实数，$A=\frac{x+y}{2},H=\frac{2xy}{x+y}$.若$A+H=y-x$，则$\frac{y}{x}=$____________.
4. 若$\triangle ABC$的边BC,CA上的中线长分别为m,n，则$\triangle ABC$的面积的最大值为__________.
5. 若$\cos x=0$，且$\cos(x+z)=\frac{1}{2}(z>0)$，则满足上述条件的$z$的最小值为__________.
6. 已知方程组$\begin{cases}\log_{225}x+\log_{64}y=4\\ \log_x 225-\log_y 64=1\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=x_1\\ y=y_1\end{cases}$和$\begin{cases}x=x_2\\ y=y_2\end{cases}$则$\log_{30}(x_1x_2y_1y_2)=$__________.
7. 已知$\{a_n\}$是一个等差数列，$a_1=19,a_{26}=-1$.设$A_n=a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{n+6}(n\in N_+)$。则$|A_n|$的最小值是________________.
8. 已知集合$A=\{1,2,\cdots,10\}$，f是$A\to A$的映射，当$a,b\in A(a\neq b)$时，$f(a)\neq f(b)$且对于任意一个$i\in A$，都有$f(i)\neq i,f\big(f(i)\big)=i$。则这样的映射$f$有__________个。
9. 设实数t满足$0\le t\le\pi$。若关于x的方程$\sin(x+t)=1-\sin x$无解，则t的取值范围是____________.
10. 若关于x的方程$x^3-ax^2-2ax+a^2-1=0$恰有一个实数根，则实数a的取值范围是____________.
11. 正整数$1,2,\cdots,2006$中，能表示为$\frac{mn+1}{m+n}(m,n\in N_+)$的有__________个。
12. 使得$3^{1024}-1$能被2^n整除的最大的正整数n为__________.

二、 解答题（每小题 15 分，共 60 分）

13. 设a,b,c为正数。求$u=\left[\frac{a+b}{c}\right]+\left[\frac{b+c}{a}\right]+\left[\frac{c+a}{b}\right]$的最小值（$[x]$表示不超过$x$的最大整数）。
14. 设$m\in N_+$，数列$a_0,a_1,\cdots,a_m$满足$a_0=37,a_1=72,a_m=0$，且$a_{k+1}=a_{k-1}-\frac{3}{a_k}(k=1,2,,m-1)$。求$m$的值。
15. 如图 1，$\odot O$为$\triangle ABC$的外接圆，AM,AT分别为中线和角平分线，过点B,C的$\odot O$的切线相交于点P，联结AP，与BC和$\odot O$分别相交于点D,E。求证：点T是$\triangle AME$的内心。
16. 将集合$S=\{1,2,\cdots,36\}$分拆为k个互不相交的非空子集$A_1,A_2,\cdots,A_k$的并。若对于每一个$A_i(i=1,2,\cdots,k)$，其中任意两个不同的元素的和都不是完全平方数，求k的最小值。



2007年福建省高一数学竞赛

一、选择题（共5小题，每小题5分，满分25分）

1. 给出下列四个命题：

（1）若a,b是异面直线，则必存在唯一的一个平面同时平行a,b；

（2）若a,b是异面直线，则必存在唯一的一个平面同时垂直a,b；

（3）若a,b是异面直线，则过a存在唯一的一个平面平行于b；

（4）若a,b是异面直线，则过a存在唯一的一个平面垂直于b

上述四个命题中，正确的命题有（　）

（A）1个　　（B）2个　　（C）3个　　（D）4个

2. 设集合$M=\{x|y=\lg(4-2x-x^2)\}, N=\left\{x\middle|\frac{3}{x+1}\geq 1\right\}$，则$M\cap N=$（　）

（A）$\{x|-1<x<\sqrt{5}-1\}$　　（B）$\{x|-3<x\leq 2\}$

（C）$\{x|-1<x<1\}$　　（D）$\{x|-1-\sqrt{5}<x<-3或\sqrt{5}-1<x\leq 2\}$

3. 已知函数$f(x)=2^x$与$g(x)=x^3$的图像交于$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$两点，其中$x_1<x_2$.若$x_2\in(a,a+1)$，且a为整数，则$a=$（　）

（A）7　　（B）8　　（C）9　　（D）10

4. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^{-x}-1(x\leq 0)\\ f(x-1)(x>0)\end{cases}$，若方程$f(x)=x+a$有且只有两个不相等的实数根，则实数$a$的取值范围为（　）

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$[0,1]$　　（C）$(-\infty,-1)$　　（D）$[0,+\infty)$

5. 点O在$\triangle ABC$的内部，且满足$\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则$\triangle ABC$的面积和凹四边形$ABOC$的面积之比为（　）

（A）$\frac{5}{2}$　　（B）$\frac{3}{2}$　　（C）$\frac{5}{4}$　　（D）$\frac{4}{3}$

二、填空题（共7小题，每小题5分，满分35分）

6. 若存在实数x和y，使得$\begin{cases}\sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{2}a\\ \cos^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}a^2\end{cases}$，则实数$a$的所有可能值为________。

7. 将一边长为4的正方形纸片按图1中的虚线所示的方法剪开后拼成一个正四棱柱，设其体积为V_1；若将同样的正方形纸片按图2中的虚线所示的方法剪开后拼成一个正四棱锥，设其体积为V_2；则V_1与V_2的大小关系是____________。

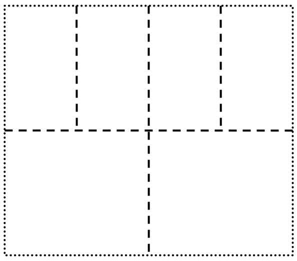


图 1

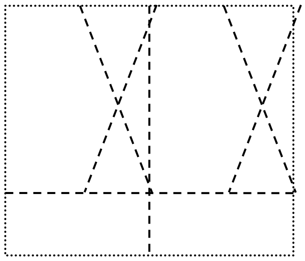


图 2

8. 已知$b_n=\cos(a_n\pi)$，其中$a_n=1+2^2+3^3+\cdots+n^n(n\in N^*)$，则$b_1+b_2+\cdots+b_{2007}$的值为_________。

9. 设$f(x)+g(x)=\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{1-\sin x}}\left(x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$，且$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，则$\left[f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2-\left[g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=$______________。

10. 若对满足$|x|\le 1$的一切实数x，不等式$t+1>(t^2-4)x$恒成立，则实数t的取值范围是____________。

11. 已知$f(x)$为R上的偶函数，且对任意$x\in R$都有$f(x+6)=f(x)+f(3)$成立，则$f(2007)=$_____________。

12. 把能表示成两个正整数平方差的这种正整数，从小到大排成一列：$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，例如：$a_1=2^2-1^2=3,a_2=3^2-2^2=5,a_3=4^2-3^2=7,a_4=3^2-1^2=8,\cdots$．那么$a_{2007}=$___________。

三、解答题（共 5 小题，每小题 12 分，满分 60 分）

13. 已知圆C满足下列三个条件

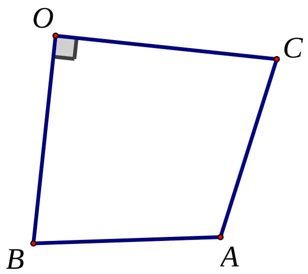
（1）圆C与x轴相切；（2）圆心C在直线$3x-y=0$上；（3）圆C与直线$x-y=0$交于A,B两点，且$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{14}$。求符合上述条件的圆C的方程。

14. 已知二次函数$f(x)=x^2+bx+c(b>0)$在区间$[-1,1]$上的最小值为$\frac{3}{4}$，最大值为3。

（1）求$f(x)$的表达式；

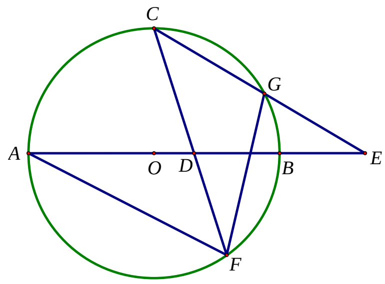
（2）若$a_n=f(n)-f(n-1)$，其中$n\ge 2$，且$n\in N^*$。

求证：$\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}+\frac{1}{a_4^2}+\cdots+\frac{1}{a_n^2}<\frac{1}{4}$。



15. 如图，在四边形$OBAC$中$BO\perp CO$，$AB=AC=4$，求四边形$OBAC$面积的最大值。

16. 如图，AB是圆O的直径，C是弧AB的中点，在AB及其延长线上分别取点D,E，使$BD = BE$，直线CD,CE分别交圆O于点F,G。



（1）求证：$\frac{AF}{DF}=\frac{AG}{EG}$；

（2）在直径AB上是否存在点D，使得FG与AB垂直.若能，请写出作法；若不能，请说明理由。

17. 求最小的正整数n，使得集合$\{1,2,3,\cdots,2007\}$的每一个n元子集中都有2个元素（可以相同），它们的和是2的幂。

2008 年福建省高一数学竞赛

一、选择题（共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1. 已知集合$A=\{x||x-a|<4\}, B=\{x|x^2-6x+5>0\}$，若$A\cup B=R$，则实数的取值范围是（　）

（A）$(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$　（B）$(-\infty,1]\cup[5,+\infty]$　（C）$(1,5)$　（D）$[1,5]$

2. 下列四个数中最大的一个数是（　）

（A）$(\ln 2)^2$　（B）$\ln(\ln 2)$　（C）$\ln(\sqrt{2})$　（D）$\ln 2$

3. 把正方形$ABCD$沿对角线AC折起，当点D到平面ABC的距离最大时，直线BD和平面ABC所成角的大小为（　）

（A）$30°$　（B）$45°$　（C）$60°$　（D）$90°$

4. 若不等式$x^2+ax+1\geq 0$对一切$x\in[2,3]$恒成立，则a的最小值为（　）

（A）-2　（B）0　（C）$-\frac{10}{3}$　（D）$-\frac{5}{2}$

5. 两条直角边长分别是整数a和b（其中$b<1000$），斜边长是$b+1$的直角三角形有（　）

（A）20个　（B）21个　（C）22个　（D）43个

二、填空题（共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

6. 若关于x的不等式$|x^2+2ax+3a|\leq 2$恰有唯一的解，则实数a的值是____________。

7. 已知函数$f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+bx)(a>0且a\neq 1)$，给出下列四个命题：

（1）当且仅当$b=0$时，$f(x)$为R上的偶函数；

（2）当$a=\frac{1}{2}, b=-1$时，$f(x)$为R上的减函数；

（3）当$a>1$时，$f(x)$为R上的增函数；

（4）若$f(x)$为R上的递增的奇函数，则$0<a<1, b=-1$或$a>1, b=1$。

其中正确命题的序号是____________。（把你认为正确命题的序号都填上）

8. 已知定义在$(0,+\infty)$上的函数$f(x)$满足：对一切正数 x 均有$f(3x)=3f(x)$成立，且当$1\leq x\leq 3$时，$f(x)=1-|x-2|$，则$f(100)=$____________。

9. 设点A,B,C是函数$y=x^2$图像上三个不同的点，满足AB与x轴平行，$\triangle ABC$是面积为 100 的直角三角形，则点C的纵坐标为____________。

10. 一个棱长为a的正四面体纸盒内放一个正方体，并且能使正方体在纸盒内任意转动，则正方体棱长的最大值为____________。

11. 设x,y为非负整数，使得$x+2y$是 5 的倍数，$x+y$是 3 的倍数，且$2x+y\geq 99$，则$7x+5y$的最小值为________。

12. 正整数$a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_{12}$中，若任意三个都不能成为三角形的三边长，则$\frac{a_{12}}{a_1}$的最小值是________。

三、解答题（共 5 小题，每小题 12 分，满分 60 分）

13. 已知圆C是正方形$DEFG$的外接圆（D,E,F,G按逆时针方向排列），其中$E(2,1),F(1,2)$。

（1）求圆C的方程；

（2）若直线l与圆C相切，且交x轴正半轴于点$A(a,0)$，交y轴正半轴于点$B(0,b)$。

① 求证：$(a-2)(b-2)=2$；

② 当$a>2,b>2$时，求$\triangle AOB$面积的最小值。

14. 已知定义在R上的函数$f(x)$同时满足下列三个条件：

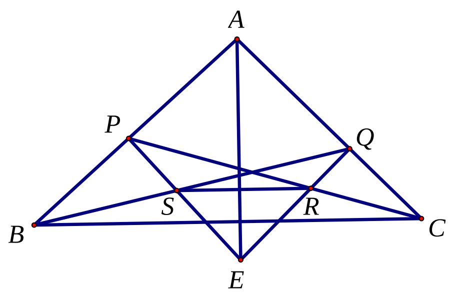
（1）当$x>0$时，$f(x)>0$；

（2）$f(1)=2$；

（3）对任意$x_1,x_2\in R$都有$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$。

设集合$A=\{(x,y)|f(3x^2)+f(4y^2)\leq 24\},B=\{(x,y)|f(x)-f(ay)+f(3)=0\}$。若集合$A$与$B$的交集非空，求实数$a$的取值范围。

15. 如图，在$\triangle ABC$中，P,Q分别是边AB,AC上的点，且使得$\angle APC=\angle AQB$。分别过点P,Q作AB,AC的垂线，两垂线交于E点，且PE,QE分别与BQ,CP交于S,R。



（1）证明：$AE\perp BC$；

（2）证明：$SR\parallel BC$。

16. 已知二次函数$f(x)=ax^2+bx+c$的图像过点$(-1,-2)$，且对任意实数x，不等式$6x\leq f(x)\leq 3x^2+3$恒成立。

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）若$a_n>0$，且$a_n^2+n^2+4=f(n)(n=1,2,\cdots,n)$，

求证：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}>\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1}-1)$。

17. 设$S=\{1,2,3,\cdots,n\}$（n为正整数），若S的任意含有 100 个元素的子集中必定有两个数的差能被 25 整除，求n的最大值。

2009 年福建省高一数学竞赛

一． 选择题（共 5 小题，每小题 5 分，满分 25 分）

1. 已知集合$P=\{x||2x-1|<1\}$，则使$(P\cap M)\supseteq(P\cup M)$的集合$M=$（ ）

（A）$\{x|0<x<1\}$（B）$\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{2}\right\}$（C）$\left\{x\middle|x<\frac{1}{2}\right\}$（D）$\left\{x\middle|\frac{1}{2}<x<1\right\}$

2. 从正方体的 8 个顶点中，任意选择 4 个顶点，则这四个点可能是

（1）矩形的四个顶点；

（2）有三个面为等腰直角三角形，另一个面为等边三角形的四面体的四个顶点；

（3）每个面都是等边三角形的四面体的四个顶点；

（4）每个面都是直角三角形的四面体的四个顶点。

其中正确的结论有（ ）

（A）1 个（B）2 个（C）3 个（D）4 个

3. 已知函数$f(x)=\log_a(x^2-ax+3)(a>0,\text{且}a\neq1)$，且满足：对任意实数$x_1,x_2$，当$x_1<x_2\leq\frac{a}{2}$时，总有$f(x_1)-f(x_2)>0$，则实数$a$的取值范围是（ ）

（A）$(0,3)$（B）$(1,3)$（C）$(2,2\sqrt{3})$（D）$(1,2\sqrt{3})$

4. 若点$P(a,b)$是直线$x+y=\frac{1}{m}$与圆$x^2+y^2=\frac{2}{m}-\frac{1}{m^2}$的一个公共点，则$ab$的取值范围是（ ）

（A）$\left[-\frac{1}{4},+\infty\right)$（B）$\left[-\frac{1}{4},2\right)$（C）$\left[-\frac{1}{4},\frac{4}{9}\right]$（D）$\left[-\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$

5. 定义在R上的函数$f(x)$的图像关于点$(-\frac{3}{4},0)$成中心对称，对任意的实数x都有$f(x)=-f(x+\frac{3}{2})$，且$f(-1)=1,f(0)=-2$，则$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2009)$的值为（ ）

（A）-2（B）-1（C）2（D）1

二． 填空题（共 7 小题，每小题 5 分，满分 35 分）

6. 设函数$f(x)=\begin{cases}1,x>0\\0,x=0\\-1,x<0\end{cases}$，则方程$x^2f(x-1)=-4$的解为____________.

7. 已知$\triangle ABC$的三个顶点坐标分别是$A(0,4),B(-2,0),C(2,0)$。点D的坐标为$(0,1)$。若E为$\triangle ABC$边界上一点，且折线BDE将$\triangle ABC$的面积分成相等的两部分，则点E的坐标为________。

8. 函数$f(x)=\sqrt{x^2-2x}+\sqrt{2x^2-3x+3}$的最小值是__________.

9. 若函数$f(x)=\log_a(x+\frac{m}{x}-4)(a>0,\text{且}a\neq1)$的值域为$R$，则实数$m$的取值范围是________.

10. 对于$i=1,2,\cdots,n$，有$|x_i|<1$，且$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|=21+|x_1+x_2+\cdots+x_n|$，则正整数$n$的最小值为________.

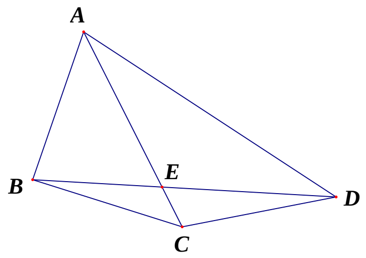
11. 设$[x]$是不超过x的最大整数，则$[\log_3 1]+[\log_3 2]+[\log_3 3]+\cdots+[\log_3 500]=$________.

12. 已知球O与棱长为 1 的正四面体$ABCD$的六条棱都相切，则球O的体积为________.

三． 解答题（共 5 小题，每小题 12 分，满分 60 分）

13. 如图，在凸四边形$ABCD$中，$AB=BC=CD$，对角线AC与BD交于点E，且$\angle BAD+$

$\angle ADC = 120°$。求证$AE = DE$。

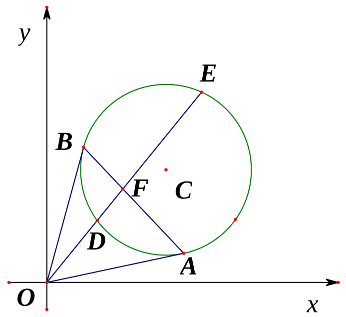


14. 已知二次函数$f(x) = x^2 + mx + 1(m \in Z)$，且关于$x$的方程$f(x) = 2$在区间$\left(-3,\frac{1}{2}\right)$内有两个不同的实根。

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）若$x \in [1,t](t > 1)$时，总有$f(x-4) \le 4x$成立，求t的最大值。

15. 已知圆$C: (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2$，过原点O作圆C的两条切线OA, OB，切点依次为A, B，过原点O引直线l交圆C于D, E两点，交直线AB于点F。



（1）求直线AB的方程；

（2）求证：$\frac{1}{OD} + \frac{1}{OE} = \frac{2}{OF}$.

16. 已知定义在区间$(0,+\infty)$上的函数$y = f(x)$满足下列三个条件：

（1）对任意的$x > 0, y > 0$，总有$f[x \cdot f(y)] \cdot f(y) = f(x+y)$成立；

（2）$f(2) = 0$；

（3）当$0 < x < 2$时，总有$f(x) \neq 0$。

求$f(3) + f(\frac{1}{2})$的值。

17. 已知集合M是集合$S = \{1,2,3,\cdots,2009\}$的含有$m$个元素的子集，且对集合$M$的任意三个元素$x, y, z$均有$x + y$不能整除$z$。求$m$的最大值。

2010 年福建省高一数学竞赛

一、 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 已知集合$A=\{x|2^{x^2-x-6}<1,x\in Z\}$，则集合$A$的非空子集的个数为（ ）

A. 6　　B. 7　　C.14　　D. 15

2. 直线$l:(2m+1)x+(m+1)y-7m-3=0$被圆$C:(x-2)^2+(y+3)^2=25$截得的最短弦长为（）

A. $\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

3. 若函数$f(x)=\begin{cases}(3-a)x+3-2a, x<0\\ a^x-1, & x\geq 0\end{cases}$在$R$上单调递增，则$a$的取值范围是（ ）

A.$\left[\frac{3}{2},3\right)$　　B.$(1,3)$　　C.$\left(0,\frac{3}{2}\right]$　　D.$\left[1,\frac{3}{2}\right)$

4. 若函数$f(x)=\log_2(mx^2-4x+m-3)$的值域为R,则实数m的取值范围是（ ）

A. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$　B. $(4,+\infty)$　C. $(0,4)$　D.$[0,4]$

5. 已知$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为长方体，E,F分别为棱AA_1,CC_1的中点，则在空间中与直线A_1D_1,EF,CD都相交的直线（ ）

A. 不存在　B. 有且仅有2条　C. 有且仅有3条　D. 有无数条

6. 已知定义在R上的奇函数$f(x)$在区间$[0,2]$上是增函数，且函数$y=f(x)$的图像关于直线$x=2$对称。若方程$f(x)=a(a<0)$在区间$[-12,8]$上有 6 个不同的实根x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6，则$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=$（ ）

A. -12　　B. 12　　C. -8　　D. 8

二、 填空题（每小题 6 分，共 36 分）

7. 若经过点$P(-1,0)$的直线与圆$C:x^2+y^2+4x-2y+3=0$相切，则此直线在y轴上的截距为______________.

8. 若$x>0$，且不等式$x^2+\frac{1}{2}x-\left(\frac{1}{2}\right)^n\geq 0$对一切正整数$n$都成立，则$x$的取值范围是______________.

9. 已知点Q为直线$l:2x+3y-17=0$上动点，点R为y轴正半轴上动点，点$P(2,0)$为x轴上定点，则$\triangle PQR$周长的最小值为______________.

10. 若圆$x^2+y^2=r^2(r>0)$上恰有三个不同的点到直线$l:3x+4y-15=0$的距离为2，则r的值为______________.

11. 对于集合M,N,定义$M-N=\{x|x\in M,且x\notin N\}$。若集合$A=\{x|x^2-3x+2<0\},B=\{x|x^2<m\}$，在上述定义下，若集合$A-B$非空，则实数$m$的取值范围是______________.

12. 在一个地面直径为$4cm$，高为$28cm$的圆柱中放入k个直径为$2cm$的小球（放入的球不能超出圆柱口），则k的最大值为______________.

三、 解答题（第 13、14、15、16 题每题 16 分，第 17 题 14 分，满分 78 分）

13． 已知$f(x)=log_2 x,g(x)=x^2-2ax+5a-1$.

（1）当$a=-2$时，求函数$g[f(x)]$在区间$[2,4]$上的最小值；

（2）若函数$f[g(x)]$在区间$[2,4]$上单调递增函数，求a的取值范围。

14． 已知函数$f(x)=x^2+mx+3-2m$，若函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上有零点，求实数m的取值范围。

15． 已知正三角形OAB的三个定点都在抛物线$y=\frac{1}{2}x^2$上（O为坐标原点），设圆C为$\triangle OAB$的外接圆（C为圆心）。

（1）求圆C的方程；

（2）过直线$l:x+y=16$上一点P作圆C的切线PE,PF,E,F为切点，

①线段PE长的最小值；

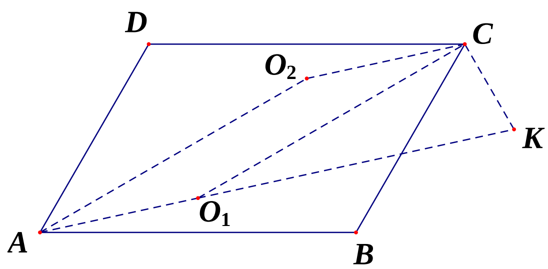
②当线段PE长取最小值，求$\triangle PEF$的外接圆的方程。

16． 如图，已知四边形$ABCD$是平行四边形，$AB\neq BC,\angle DAB=60°,O_1,O_2$分别是的$\triangle ABD$，$\triangle CBD$外心。

（1）求证：O_1C平分$\angle DCB$；

（2）求证：四边形AO_1CO_2为平行四边形；

（3）若AO_1与$\angle DCB$外角的平分线交于点K，求证：$O_1K=2O_1A$.



17． 证明：任给 15 个互不相同的两位数中，总可以找到 4 个互不相同的数a,b,c,d，使得$a+b=c+d$。

2011 年福建省高一数学竞赛

一、 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 已知集合$A=\{x||x-1|\le 3\}, B=\{x|x<a\}$，若$A\subset B$，则$a$的取值范围是（　）

（A） $[4,+\infty)$（B）$(4,+\infty)$（C）$(-\infty,2]$（D）$(-\infty,2)$

2. 若直线$l_1:(2m+1)x-4y+3m=0$与直线$l_2:x+(m+5)y-3m=0$平行，则m的值为（　）

（A）$-\frac{9}{2}$或-1（B）$-\frac{9}{2}$（C）$-\frac{19}{2}$（D）-1

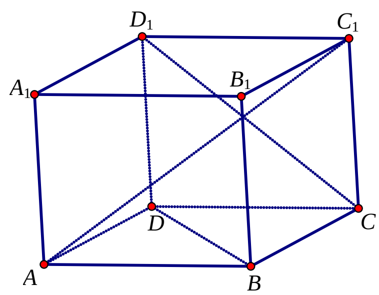
3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2 & x>k\\ x^2+4x+2 & x\le k\end{cases}$，若关于$x$的方程$f(x)=x$恰有三个不同的实根，则$k$的取值范围是（　）

（A）$[-1,2)$（B）$[-1,2]$（C）$[2,+\infty)$（D）$(-\infty,-1]$

4. 若直线$kx-y+3k-2=0$与曲线$y=\sqrt{4-x^2}$有公共点，则k的取值范围是（　）

（A）$\left(-\infty,\frac{2}{5}\right]\cup\left[\frac{12}{5},+\infty\right)$（B）$\left(-\infty,\frac{2}{5}\right]$（C）$\left[\frac{12}{5},+\infty\right)$（D）$\left[\frac{2}{5},\frac{12}{5}\right]$

5. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$为正方体，给出下列 5 个命题：



（1）$BD\parallel$平面CB_1D_1；

（2）$AC_1\perp$平面CB_1D_1；

（3）AC_1与底面$ABCD$所成角的正切值是$\sqrt{2}$；

（4）二面角$C-B_1D_1-C_1$的正切值是$\sqrt{2}$；

（5）过点A_1与异面直线AD和CB_1成$70°$角的直线只有2条。

其中正确的命题有（　）

（A） 1个 （B） 2个 （C） 3个 （D） 4个

6. 已知函数$f(x)$是定义在R上的偶函数，对于任意$x\in R$都有$f(x+6)=f(x)+f(3)$成立，且$f(x)$在区间$[0,3]$上是增函数，则方程$f(x)=0$在区间$[0,2011]$内的实根个数为（　）

（A） 334 （B） 335 （C） 668 （D） 770

二、 填空题（每小题 6 分，共 36 分）

7. 若点$A(1,3)$与点$B(-2,m)(m>0)$关于直线$l:6x+ny-5=0$对称，则$m+n=$__________.

8. 已知正三棱锥$P-ABC$的底面正三角形的边长为 3，若三棱锥$P-ABC$外接球的球心O在平面ABC内，则三棱锥$P-ABC$的体积为__________.

9. 已知$x>y>0, xy=1$，则$\frac{x^2+y^2}{x-y}$的最小值为__________.

10. 已知函数$f(x)=x^2-a^x$，其中$a>1$。若$x\in(-1,1)$时，$f(x)<\frac{1}{2}$恒成立，则a的取值范围是__________.

11. 设符合条件$\begin{cases}x^2+y^2\le 4\\(x-4)^2+y^2\le 12\end{cases}$的点$(x,y)$所成的集合为$M$，则区域$M$的面积为________.

12. 已知a,b,c为正整数，且$c>b>a>1$，$(a-\frac{1}{c})(b-\frac{1}{a})(c-\frac{1}{b})$为整数，则$a+b+$

$c =$______.

三、 解答题（第 13、14、15、16 题每题 16 分，第 17 题 14 分，满分 78 分）

13. 已知$f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}, g(x) = mf(x) + \sqrt{1-x^2}$

（1）求函数$f(x)$的值域；

（2）求函数$g(x)$的最小值$h(m)$.

14. 已知动直线$l: (m+1)x + (1-2m)y - 6 = 0(m \in R)$与圆$C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$交于$A, B$两点。

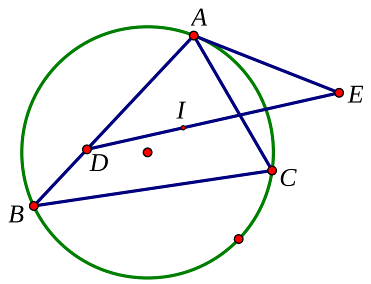
（1）若点A, B分圆C所得两段弧的长度之比为$2:1$，求m的值；

（2）过点C作$CM \perp l$于点M，求点M的轨迹方程。

15. 已知抛物线$C: y = 2x^2 + (2a+1)x + a + 1$与射线$E: y = x + a(x > -a)$交于不同的两点$A, B$。

（1）求a的取值范围；

（2）若$\triangle AOB$（O为坐标原点）的面积为$\sqrt{2}$，求a的值。



16. 如图，在$\triangle ABC$中，$AB > AC$,点D在边AB上，且$AD = AC, AE$为$\triangle ABC$外接圆的切线，且直线DE过$\triangle ABC$的内心I。求证：$AE = AD$.

17. 对一个$3 \times n$（3行，n列）的格阵中的每一个方格用红、蓝两种颜色中的一种染色。如果对任意一种染色方案总可以找到由2行3列相交处的同色的6个方格（2行可以不相邻，3列也可以不相邻），求n的最小值。

2012 年福建省高一数学竞赛

一、 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 已知集合$A=\{x|1\le x\le 4\}, B=\{y|y=log_2 x, x\in A\}$，则$A\cap B=$（ ）

(A) $[0,2]$ (B) $[0,1]$ (C) $[1,2]$ (D) $[2,4]$

2. 已知直线$x=2, x=4$与函数$log_4 x$的图像交于A、B两点，与函数$y=ln\,x$的图像交于C、D两点，则直线AB与CD（ ）

(A) 相交，且交点在第一象限

(B) 相交，且交点在第二象限

(C) 相交，且交点在第四象限

(D) 相交，且交点在坐标原点

3. 已知集合A，如果存在实数x_0，使得对任意整数a，都存在$x\in A$，使得$0<|x-x_0|<a$，则称x_0为集合A的“聚点”。给出下列四个集合：①$\left\{\frac{n}{n+1}\middle|n\in Z, n\ge 0\right\}$②$\{x\,|\,x\in R$, 且$x\ne 0\}$③$\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in Z, n\ne 0\right\}$④$Z$。其中以 0 为“聚点”的集合有（ ）

(A) ②③ (B) ①② (C) ①③ (D) ②④

4. 已知四面体$ABCD$四个顶点的坐标分别为$A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,1)$、$D(0,0,0)$，则直线DC与平面ABC所成角的正弦值为（ ）

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 已知x, y是两个不相等的正数，且满足条件$x^3-y^3=x^2-y^2$，则$[9xy]$的最大值为（ ）（符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

6. 函数$f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{18-3x}$的最大值为（ ）

(A) $\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{14}$ (D)$\sqrt{15}$

二、 填空题（每小题 6 分，共 36 分）

7. 已知过点$A(3,-2)$的直线l交x轴正半轴于点B，交直线$l_1: x-2y=0$于点C，且$|AB|=2|BC|$，则直线l在y轴上的截距为__________.

8. 若关于x的不等式$2^x+3^x-k\cdot 6^x\ge 0$在区间$[1,2]$上有解，则k的最大值为___________.

9. 在三棱锥$D-ABC$中，已知$AB=BC=AD=\sqrt{2}, BD=AC=2, BC\perp AD$，则三棱锥$D-ABC$外接球的表面积为_________。

10. 三个半径都是2的圆，其圆心分别为$A(1,1)$、$B(3,6)$、$C(7,12)$，直线l斜率为k，且过点$(1,1)$。若$\odot A$、$\odot B$、$\odot C$ 位于直线l某一侧的部分的面积和等于位于直线l另一侧的部分的面积和。则$k=$_________。

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le 0\\ f(x-1) & x>0\end{cases}$，则方程$f(x)=x$在区间$(0,10)$内所有实根的和为________。

12. 符号$[x]$表示不超过x的最大整数，符号$\{x\}$表示x的小数部分即$\{x\}=x-[x]$。若实数x满足$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]=2012$，则$\{x\}$的最小值为_______。

三、 解答题（第 13、14、15、16 题每题 16 分，第 17 题 14 分，满分 78 分）

13. 已知$f(x)=x^2+2px-2$在区间$[-2,0]$上的最小值为$g(p)$。

（1）求$g(p)$的表达式；

（2）当$g(p)=-3$时，求$f(x)$在区间$[-2,0]$上的最大值。

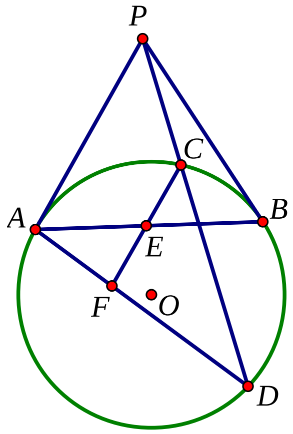
14. 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=m$，点$A(4,6)$、$B(s,t)$，

（1）若$3s-4t=-12$，且直线 AB 被圆 C 截得的弦长为 4，求m的值；

（2）若 s,t 为正整数，且圆 C 上任意一点到点A的距离与到点B的距离之比为定值$\lambda(\lambda>1)$，求m的值。

15. 对任意的正整数n，以及任意n个互不相同的正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，若不等式$(\frac{1}{a_1})^{\lambda}+(\frac{1}{a_2})^{\lambda}+\cdots+(\frac{1}{a_n})^{\lambda}<2$恒成立。求整数$\lambda$的最小值。

16. 如图，PA、PB为圆 O 的两条切线，A、B为切点，PCD为圆O的割线，C、D为割线与圆O的交点。过C作直线交AB于点E、交AD于点F，且$CE=EF$。求证：$CE\parallel PA$



17. 在直角坐标平面xOy内有 2012 个点，记这 2012 个点组成的点集P中任何两点的连线与坐标轴既不平行也不重合。证明：在点集P中，存在E、G两点，使得以EG为对角线，且边与坐标轴平行或重合的矩形$EFGH$内（不包括边界）至少含有点集P中的402个点。