2009年上海市TI杯高二年级数学竞赛

中图分类号: G424.79　文献标识码: A　文章编号: 1005-6416(2010)04-0030-02

个人赛

一、填空题(第1~4小题每小题6分,第5~8小题每小题9分,共60分)

1. 计算:

$$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{6\times8}{5\times7}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{10\times12\times14\times16}{9\times11\times13\times15}\right)^{\frac{1}{8}}$$

$=$______(精确到10^{-5}).

2. 设地球和太阳的半径分别为r和R,地球和太阳的质量分别为m和M. 已知$R=109r$,$M=330\ 000m$. 则太阳的平均密度与地球的平均密度的比值为______(精确到0.001).

3. 已知E是正方形$ABCD$的边BC上的一点,使得$S_{\triangle ABE}$、$S_{\triangle AEC}$、$S_{\triangle ACD}$成等比数列. 则$\angle EAB=$______(精确到$1''$).

4. 已知P是函数$y=2^x$图像上的一点,O是坐标原点. 则线段PO的长的最小值为______(精确到0.001).

5. 不等式$\sqrt{x+3}>x^2-1$的解集为______(精确到0.001).

6. 设E、F、G、H分别为凸四边形$ABCD$的边AB、BC、CD、DA的中点,且$EG\cdot FH=3S_{四边形ABCD}$. 则EG和FH之间的夹角为______(精确到$1''$).

7. 对整数$n>1$,设$x=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,$y=\lg 2+\lg 3+\cdots+\lg n$. 则满足$[x]=[y]$的所有整数$n$构成的集合为______($[a]$表示不超过实数$a$的最大整数).

8. 一个三位数的3个数码均不为0,其平方是一个恰好有3个数码为0的六位数. 试写出一个这样的三位数:______.

【说明】解答以下三题应写出必要步骤.

二、(20分)如图1,已知在平面直角坐标系xOy内,有一个物体A以0.3 km/s的速度沿着与x轴正方向平行的方向飞行. 当物体A在点N处,测得$ON=10$ km,$\angle xON=105°$,此时,在原点O处发射一枚速度为0.7 km/s沿直线飞行的导弹B. 为了使导弹B能击中物体A,求导弹的发射角$\angle xOB$(精确到0.001°).

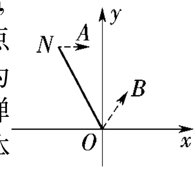

图 1

三、(20分)(1)求证:

$$(4\sin^2x-3)(4\cos^2x-3)=4\sin^2 2x-3\ (x\in\mathbf{R});$$

(2)求值: $\prod\limits_{t=0}^{28}\left(4\sin^2\frac{t\pi}{2^9}-3\right)$.

四、(20分)两个三位数写在一起形成了一个六位数. 若这个六位数恰等于原来两个三位数乘积的整数倍,求这个六位数.

团体赛

【说明】解答时,应写出必要步骤或计算器的算法.

一、(20分)(1)表1是在一次物体的平抛实验中测得的数据.

表 1

x	0	x_1	x_2	x_3	x_4
y	0	y_1	y_2	y_3	y_4

假定物体的轨道方程是$y=ax^2$,求实数a的值,使得每个测点$P_i(x_i,y_i)$($i=1,2,3,4$)到所求的轨道曲线上的点$A_i(x_i,ax_i^2)$的距离平方和$\sum\limits_{i=1}^{4}P_iA_i^2$最小.

(2)在(1)的要求下,对表2的数据,求轨道曲线$y=ax^2$的方程(系数a要求精确到0.01).

表 2

x	0	1	2	3	4
y	0	-2.60	-9.90	-22.60	-39.80

二、(20分)对正整数 n,设 $t_n=\frac{n(n+1)}{2}$,把 $t_1=1$, $t_2=3$, $t_3=6$, $t_4=10$, $t_5=15$……的末位数连写起来可以构成一个无限循环小数:0.136 05…,求此循环小数的循环节的长度.

三、(20分)对正整数 n,记 $f(n)$为数 $3n^2+n+1$的十进制表示的数码和(如 $f(3)$是 $3\times3^2+3+1=31$的数码和,即 $f(3)=4$).

(1)证明:对任意的正整数 n, $f(n)\neq1$,且 $f(n)\neq2$;

(2)试找出一个正整数 n,使得 $f(n)=3$.

参考答案

个人赛

一、1. 2.604 73　2. 0.255　3. $20°54'19''$　4. 0.857　5. $(-1.492, 1.785)$　6. $19°28'16''$　7. $\{5, 6\}$　8. 448或 548或 949

二、设经过 t s后,导弹 B恰好在点 C处命中目标(如图 2),并设 $\angle xOB=\alpha$.则

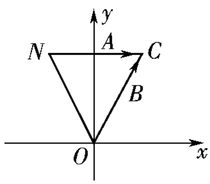

图 2

$NC=0.3t$,

$OC=0.7t$,

$\angle NOC=105°-\alpha$,

$\angle ONC=75°$.

在 $\triangle ONC$ 中由正弦定理得

$$\frac{NC}{\sin\angle NOC}=\frac{OC}{\sin\angle ONC}$$

$$\Rightarrow\frac{0.3t}{\sin(105°-\alpha)}=\frac{0.7t}{\sin75°}$$

$$\Rightarrow\sin(105°-\alpha)=\frac{3}{7}\sin75°$$

$$\Rightarrow105°-\alpha=\arcsin\left(\frac{3}{7}\sin75°\right)$$

或 $$\Rightarrow105°-\alpha=180°-\arcsin\left(\frac{3}{7}\sin75°\right)$$

$\Rightarrow\alpha=80.546°$或 $\alpha=-50.546°$(舍去).

因此,所求的发射角

$\angle xOB=80.546°$.

三、(1) $(4\sin^2x-3)(4\cos^2x-3)$

$=16\sin^2x\cdot\cos^2x-12(\sin^2x+\cos^2x)+9$

$=4\sin^22x-3$.

(2)记 $A_k=\prod\limits_{t=0}^{2^k-1}\left(4\sin^2\frac{t\pi}{2^k}-3\right)$.

当 $k\geqslant2$时,由(1)有

$$A_k=\prod_{t=0}^{2^{k-2}-1}\left\{\left(4\sin^2\frac{t\pi}{2^k}-3\right)\cdot\left[4\sin^2\frac{(2^{k-1}-t)\pi}{2^k}-3\right]\right\}\cdot\left(4\sin^2\frac{2^{k-1}\pi}{2^k}-3\right)$$

$$=\prod_{t=0}^{2^{k-2}-1}\left(4\sin^2\frac{t\pi}{2^{k-1}}-3\right)\left[-\left(4\sin^2\frac{2^{k-2}\pi}{2^{k-1}}-3\right)\right]$$

$=-A_{k-1}$.

故 $A_9=A_1=(4\sin^20-3)\left(4\sin^2\frac{\pi}{2}-3\right)$

$=-3$.

四、设这个六位数为 $\overline{abcdef}$.

由题意可设 $\overline{abcdef}=k\,\overline{abc}\cdot\overline{def}$,即

$\overline{abc}\cdot1000+\overline{def}=k\,\overline{abc}\cdot\overline{def}$.

所以, $\overline{abc}\mid\overline{def}$.

记 $\overline{def}=l\,\overline{abc}$($l\in\{1, 2, \cdots, 9\}$).于是,

$kl\,\overline{abc}^2=(1000+l)\,\overline{abc}$,

即 $kl\,\overline{abc}=1000+l$.

从而, $l\mid1000$.

故 $l=1$或 2或 5.

若 $l=1$,则 $k\,\overline{abc}=1001=7\times11\times13$,只能是 $k=7$, $\overline{abc}=143$,此时,六位数

$\overline{abcdef}=143143$;

若 $l=2$,则 $\overline{abc}<500$,且 $2k\,\overline{abc}=1002$, $k\,\overline{abc}=501=3\times167$,只能是 $k=3$, $\overline{abc}=167$,此时,六位数 $\overline{abcdef}=167334$;

若 $l=5$,则 $\overline{abc}<200$,且 $5k\,\overline{abc}=1005$, $k\,\overline{abc}=201=3\times67$,这不可能.

综上,所求的六位数为 143 143和 167 334.

团体赛

一、(1)由题设知

$$\sum_{i=1}^4P_iA_i^2=\sum_{i=1}^4(ax_i^2-y_i)^2$$

$$=a^2\sum_{i=1}^4x_i^4-2a\sum_{i=1}^4x_i^2y_i+\sum_{i=1}^4y_i^2$$

$$=\sum_{i=1}^4x_i^4\left[a^2-\frac{2\sum\limits_{i=1}^4x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^4x_i^4}a+\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^4x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^4x_i^4}\right)^2\right]+$$

$$\sum_{i=1}^4y_i^2-\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^4x_i^2y_i}{\sum\limits_{i=1}^4x_i^4}\right)^2$$

2009年全国高中数学联赛甘肃省预赛

中图分类号: G424.79　　文献标识码: A　　文章编号: 1005-6416(2010)04-0032-04

一、填空题(每小题 7分,共 56分)

1. 设 $A=\{x \mid x=2n,\ n\in \mathbf{N}\}$,

$B=\{x \mid x=3n,\ n\in \mathbf{N}\}$,

$C=\{x \mid x=n^2,\ n\in \mathbf{N}\}$.

则 $A\cap B\cap C=$______.

2. 过点 $(1,2)$ 引圆 $x^2+y^2=1$ 的两条切线. 则这两条切线与 x 轴、y 轴所围成的四边形的面积是______.

3. 在四面体 $PABC$ 中, 已知

$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=90^{\circ}$,

各棱长的和为 S. 则这个四面体体积的最大值为______.

4. 设函数 $y=f(x)$ 满足对一切的 $x\in \mathbf{R}$, $y=f(x)\geqslant 0$, 且 $f(x+1)=\sqrt{9-f^2(x)}$. 已知当 $x\in[0,1)$ 时,

$$f(x)=\begin{cases}2^x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2};\\ \lg(x+31), & \frac{1}{2}\leqslant x<1.\end{cases}$$

则 $f(\sqrt{1\,000})=$______.

5. 连续两次掷骰子得到的点数依次为 m、n. 则以点 $(0,0)$、$(1,-1)$、(m,n) 为顶点

$$=\sum_{i=1}^{4}x_i^4\left(a-\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2+\sum_{i=1}^{4}y_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2.$$

故当 $a=\dfrac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum_{i=1}^{4}x_i^4}$ 时, $\sum_{i=1}^{4}PA_i^2$ 取最小值

$$\sum_{i=1}^{4}y_i^2-\left(\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i}{\sum_{i=1}^{4}x_i^4}\right)^2.$$

(2)由表 2数据得

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^4=1^4+2^4+3^4+4^4=354,$$

$$\sum_{i=1}^{4}x_i^2y_i=1^2\times(-2.6)+2^2\times(-9.9)+3^2\times(-22.6)+4^2\times(-39.8)$$

$$=-882.4$$

于是, 由(1)知 $a=\dfrac{-882.4}{354}\approx -2.49$.

所以, 欲求的轨道曲线是 $y=-2.49x^2$.

二、注意到

$$t_{n+20}-t_n=\frac{(n+20)(n+20+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=20n+210=10(2n+21),$$

即 t_{n+20} 与 t_n 的末位数相同.

所以, 20是此循环小数的循环节的长度. 这个循环小数为

0.136 051 865 568 150 631 0 0

三、(1)由于 $3n^2+n+1$ 是大于 3的奇数, 故 $f(n)\neq 1$.

若 $f(n)=2$, 则 $3n^2+n+1$ 只能是首位和末位为 1、其余数码为 0的一个数, 即 $3n^2+n+1=10^k+1$(k 是大于 1的整数).

于是, $n(3n+1)=2^k\times 5^k$.

因为 $(n,3n+1)=1$, 所以, $\begin{cases}n=2^k,\\ 3n+1=5^k.\end{cases}$

于是, $3n+1\leqslant 4n=4\times 2^k<5^k$. 矛盾.

故 $f(n)\neq 2$

(2)当 $n=8$ 时, 因为 $3n^2+n+1=201$, 所以, $f(8)=3$.

(顾鸿达　熊　斌　忻重义　李大元　黄　华　命题)