

2009 年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

中图分类号: G424.79 文献标识码: A 文章编号: 1005-6416(2010)05-0028-03

一、填空题(每小题 8 分,共 40 分)

1. 已知 a 和 b 都是单位向量,并且向量 $c = a + 2b$ 与 $d = 5a - 4b$ 互相垂直,则 a 和 b 的夹角 $\langle a, b \rangle =$ _____.

2. $\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$ 的值是 _____.

3. 如图 1, 过 $\odot O$ 外一点 M 引圆的切线切 $\odot O$ 于点 B , 联结 MO 交 $\odot O$ 于点 A , 已知 $MA = 4$, $MB = 4\sqrt{3}$, N 为

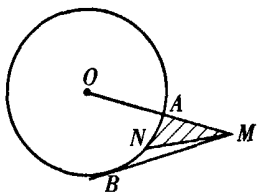


图 1

弧 \widehat{AB} 的中点. 则曲边三角形(阴影部分)的面积等于 _____.

4. $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ 的值是 _____.

5. 在平面直角坐标系中,不论 m 取何值时,抛物线 $y = mx^2 + (2m + 1)x - (3m + 2)$ 都不通过的直线 $y = -x + 1$ 上的点的坐标是 _____ (写出全部符合条件点的坐标).

二、(15 分) $Rt \triangle ABC$ 内切圆的半径为 r , 直角的角平分线的长为 t . 求证: $Rt \triangle ABC$ 的两条直角边的长 a, b 是关于 x 的一元二次方程

$$(t - 2\sqrt{2}r)x^2 + 2\sqrt{2}r^2x - 2tr^2 = 0$$

的根.

三、(15 分) 求函数 $f: \mathbf{N}_+ \rightarrow \mathbf{N}_+$, 使得

(1) $f(1) = 1$;

(2) 对于所有的 $x, y \in \mathbf{N}_+$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$$

都成立.

四、(15 分) 如图 2, 在 $\square ABCD$ 中,

$\angle BAD$ 的平分线与 BC 交于点 M , 与 DC 的延长线交于点 N , $\triangle CMN$ 的外接圆 $\odot O$ 与 $\triangle CBD$ 的外接圆的另一交点为 K . 证明:

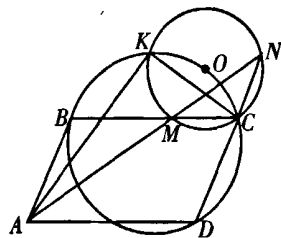


图 2

(1) 点 O 在 $\triangle CBD$ 的外接圆上;

(2) $\angle AKC = 90^\circ$.

五、(15 分) 证明: 在任意给出的七个实数中, 一定能找到两个实数 x, y , 使得

$$0 \leq \frac{x - y}{1 + xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

参考答案

一、1. $\frac{\pi}{3}$.

设 a 和 b 的夹角 $\langle a, b \rangle = \theta$. 则根据向量垂直的条件得

$$\begin{aligned} 0 &= c \cdot d = (a + 2b) \cdot (5a - 4b) \\ &= 5a^2 + 10a \cdot b - 4a \cdot b - 8b^2 \\ &= 5 + 6\cos \theta - 8 = 6\cos \theta - 3. \end{aligned}$$

由此 $\cos \theta = \frac{1}{2}$. 所以, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

2. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$$\frac{1}{\cos 290^\circ} + \frac{1}{\sqrt{3} \sin 250^\circ}$$

$$= \frac{1}{\cos 70^\circ} - \frac{1}{\sqrt{3} \sin 70^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{3} \sin 70^\circ - \cos 70^\circ}{\sqrt{3} \sin 70^\circ \cdot \cos 70^\circ} \\
 &= \frac{\sin 70^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 70^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 140^\circ} \\
 &= \frac{4 \sin(70^\circ - 30^\circ)}{\sqrt{3} \sin 40^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

3. $8 - \frac{4\pi}{3}$.

根据条件, 延长 MO 交 $\odot O$ 于点 C . 设 $\odot O$ 的半径为 r . 则 $MC = 4 + 2r$.

由切割线定理得

$$MB^2 = MA \cdot MC,$$

即 $48 = 4(4 + 2r)$.

解得 $r = 4$.

所以, $OC = OA = AM = 4$.

联结 OB . 在 $\text{Rt} \triangle OBM$ 中,

$$\sin \angle MOB = \frac{MB}{OM} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\Rightarrow \angle MOB = 60^\circ$.

因此, 弧 \widehat{AB} 的度数为 60° , 而 N 为弧 \widehat{AB}

的中点, 则弧 \widehat{AN} 的度数为 30° .

联结 ON . 则 $\angle MON = 30^\circ$. 从而,

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} OM \cdot ON \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8.$$

而扇形 AON 的面积为

$$\pi \times 4^2 \times \frac{30}{360} = \frac{4\pi}{3}.$$

故阴影图形的面积为 $8 - \frac{4\pi}{3}$.

4.4.

$$\text{设 } \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = x.$$

两边立方并整理得

$$x^3 - 6x - 40 = 0.$$

观察知, 4 是方程的一个根. 所以,

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 10) = 0.$$

由 $\Delta = 4^2 - 4 \times 10 = -24 < 0$, 知方程

$x^2 + 4x + 10 = 0$ 无实根.

故方程 $x^3 - 6x - 40 = 0$ 只有唯一的实根 $x = 4$.

5. $(1, 0), (-3, 4), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

$$\text{由 } y = mx^2 + (2m + 1)x - (3m + 2)$$

$$= m(x + 3)(x - 1) + (x - 2)$$

可知, 抛物线一定过点 $A(1, -1), B(-3, -5)$.

过点 A, B 分别作 y 轴的平行线交直线 $y = -x + 1$ 于点 $C(1, 0), D(-3, 4)$.

过点 A, B 的直线与 $y = -x + 1$ 交于点

$$E\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

则 C, D, E 三点满足条件.

二、如图 3, 设 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$,

$AB = c, AC$

$= b, CB =$

a , 内切圆的

圆心为 O .

联结 OA 、

OB . 则

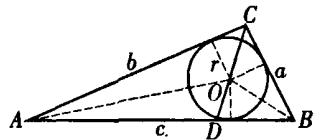


图 3

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{又 } S_{\triangle ABC} &= S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC} \\
 &= \frac{1}{2} bt \sin 45^\circ + \frac{1}{2} at \sin 45^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{4} t(a + b).
 \end{aligned}$$

$$\text{故 } ab = \frac{1}{\sqrt{2}} t(a + b). \tag{2}$$

$$\text{而 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle OBC} + S_{\triangle OAC} + S_{\triangle OAB}$$

$$= \frac{1}{2} r(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{2} r(a + b + a + b - 2r)$$

$$= r(a + b - r) = (a + b)r - r^2.$$

与式①比较得

$$ab = 2(a + b)r - 2r^2. \tag{3}$$

联立式②、③得

$$a+b = \frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t}, ab = \frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t}.$$

据韦达定理知,以 a, b 为根的一元二次方程为

$$x^2 - \frac{2\sqrt{2}r^2}{2\sqrt{2}r-t}x + \frac{2tr^2}{2\sqrt{2}r-t} = 0,$$

即 $(t-2\sqrt{2}r)x^2 + 2\sqrt{2}r^2x - 2tr^2 = 0$.

三、设函数 $f: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$, 满足题设条件.

对于正整数 n, k 有

$$f((k+1)n) = f(kn) + f(n) + kn^2.$$

令 $k=1, 2, \dots, m-1$ 并相加得

$$\begin{aligned} f(mn) &= mf(n) + [1+2+\dots+(m-1)]n^2 \\ &= mf(n) + \frac{m(m-1)}{2}n^2, \end{aligned}$$

对所有的正整数 m, n 都成立.

特别地, 当 $n=1$ 时,

$$f(m) = \frac{m(m+1)}{2}. \quad \textcircled{1}$$

式①定义了正整数集合上的函数 f .

经检验, $f(m) = \frac{m(m+1)}{2}$ 是问题的唯一解.

一解.

四、(1) 如图 4, 由题设知

$$\begin{aligned} \angle BMA &= \angle MAD \\ &= \angle BAM. \end{aligned}$$

因此,

$$BA = BM.$$

同理,

$$MC = CN.$$

联结 OC .

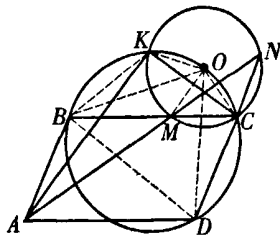


图 4

则 OC 平分 $\angle NCM$.

联结 OB, OM, OD . 设 $\angle BAD = \theta$. 则

$$\begin{aligned} \angle OCD &= \angle BCD + \angle OCM \\ &= \theta + \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ + \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

$$\angle BMO = 180^\circ - \angle OMC$$

$$= 180^\circ - \angle OCM = 90^\circ + \frac{\theta}{2}.$$

因此, $\angle BMO = \angle OCD$.

故 $\triangle OBM \cong \triangle ODC$.

从而, $\angle OBC = \angle ODC$.

于是, B, O, C, D 四点共圆, 也就是点 O 在 $\triangle CBD$ 的外接圆上.

(2) 由(1)知 $BO = OD$.

又 $KO = OC$, 由 B, K, O, C 和 D 都在同一个圆上, 则点 K, C 关于 BD 的中垂线对称, 且

$$BK = CD = AB.$$

又因 $\angle KBD = \angle CDB = \angle ABD$, 所以, 点 K 与 A 是关于 BD 的对称点, 即

$$AK \perp BD.$$

又因 $KC \parallel BD$, 所以, $AK \perp KC$, 即

$$\angle AKC = 90^\circ.$$

五、设任意给出的七个实数为 a_i

($i=1, 2, \dots, 7$), 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内存在七个实数 θ_i , 使得 $\tan \theta_i = a_i$.

将 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 等分为六个长为 $\frac{\pi}{6}$ 的区间:

$$(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}), [-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}], (-\frac{\pi}{6}, 0),$$

$$[0, \frac{\pi}{6}], (\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}), (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}).$$

根据抽屉原理, 必存在 θ_i, θ_j ($i, j=1, 2, \dots, 7$, 且 $i \neq j$) 属于同一个长为 $\frac{\pi}{6}$ 的小区.

$$\text{不妨设 } \theta_i \geq \theta_j. \text{ 则 } 0 \leq \theta_i - \theta_j \leq \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{因此, } 0 \leq \tan(\theta_i - \theta_j) \leq \tan \frac{\pi}{6}, \text{ 即}$$

$$0 \leq \frac{\tan \theta_i - \tan \theta_j}{1 + \tan \theta_i \cdot \tan \theta_j} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

令 $x = a_i, y = a_j$. 因而, 总可以从任意给出的七个实数中, 找到两个实数 x, y , 使得

$$0 \leq \frac{x-y}{1+xy} \leq \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(李廷林 提供)

2009年北京市中学生数学竞赛复赛(高一)

作者: [李延林](#)
作者单位:
刊名: [中等数学](#)
英文刊名: [HIGH-SCHOOL MATHEMATICS](#)
年, 卷(期): 2010(5)

本文读者也读过(10条)

1. [宿晓阳, SU Xiao-yang](#) [数学奥林匹克初中训练题\(129\)](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
2. [欧阳新龙](#) [2009年全国高中数学联赛湖南省预赛](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
3. [李潜, LI Qian](#) [数学奥林匹克高中训练题\(129\)](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
4. [王宇, WANG Yu](#) [用对应原理解一类几何计数问题](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
5. [胡圣团, HU Sheng-tuan](#) [关于组合数的几个整除问题](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
6. [裘宗沪, QIU Zong-hu](#) [数学奥林匹克之路——我愿意做的事](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(11)
7. [裘宗沪, QIU Zong-hu](#) [数学奥林匹克之路——我愿意做的事](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
8. [宋宝莹, 李涛, 吴远宏, 贺中杰](#) [数学奥林匹克问题](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
9. [熊斌](#) [2010年中国国家集训队选拔考试](#) [期刊论文]-[中等数学](#)2010(5)
10. [徐健顺](#) [我们为什么要吟诵?](#) [期刊论文]-[语文建设](#)2010(4)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_zdsx201005008.aspx