

2003 年北京市中学生数学竞赛(高一)

初 赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. a 为非零实数, x 为实数. 记命题 $M: x \in \{-a, a\}$, 记命题 $N: \sqrt{x^2} = a$ 有解. 则 M 是 N 的 ().

- (A) 充分非必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分且必要条件
(D) 既非充分又非必要条件

2. $[a]$ 表示不超过 a 的最大整数, 则函数 $y = x - \left[\frac{x}{2} \right] - |\sin x|$ 的最大值是 ().

- (A) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 不存在

3. 已知 $f(x)$ 是定义在实数集上的函数, 且 $f(x+5) = -f(x)$, 当 $x \in (5, 10)$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$. 则 $f(2003)$ 的值等于 ().

- (A) $-\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $-\frac{1}{3}$

4. 满足不等式 $9^x - 2 \times 3^x - 3 < 0$ 的 x 的最小实数值是 ().

- (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 3

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 5, AC = 3, BC = 7$. 则 $\angle CAB$ 的最小值为 ().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{5}{6}$

6. 如果满足 $|x^2 - 4x - 5| - 6| = a$ 的实数 x 恰有 6 个值, 则实数 a 的取值范围是 ().

- (A) $-6 < a < 0$ (B) $0 < a < 3$
(C) $3 < a < 6$ (D) $6 < a < 9$

二、填空题(每小题 8 分,共 64 分)

1. 正方形 $ABCD$ 中, M 是边 BC 的中点, N 是边 CD 的中点. 则 $\sin \angle MAN$ 的值是_____.

2. 记 $\min\{a, b, c\}$ 为 a, b, c 中的最小值. 若 x, y 是任意正实数, 则 $M = \min\left\{x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x}\right\}$ 的最大值是_____.

3. 已知函数 $f(x) = \frac{2+x}{1+x}$. 记

$$f(1) + f(2) + \dots + f(1000) = m,$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{1000}\right) = n.$$

则 $m + n$ 的值是_____.

4. 如果 x_1 与 x_2 是方程 $\sqrt{x+4} + \sqrt{9-3x} = 5$ 的两个不等的实根, 那么, $x_1^2 + x_2^2$ 的值为_____.

5. $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 36^\circ, \angle ACB = 42^\circ$, 在边 BC 上取一点 D , 使得 BD 恰等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径. 则 $\angle DAC =$ _____度.

6. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_{n+1} = 4a_n + 4\sqrt{a_n} + 1, n = 1, 2, \dots$ 则该数列的通项公式为_____.

7. n 是正整数, $f(n) = \sin \frac{n}{2}$. 则 $f(1991) + f(1992) + \dots + f(2003) =$ _____.

8. 一个三角形的三条边成等比数列, 那么, 公比 q 的取值范围是_____.

复 赛

一、填空题(每小题 8 分,共 40 分)

1. 已知 x, y 是正整数, 且满足 $xy + x + y = 71, x^2y + xy^2 = 880$. 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

2. 如图 1, 两圆交于 A, B 两点, S 为两圆外一点, 直线 SA 交第一圆于点 C , 交第二圆于点 D , 直线 SB 交第一圆于点 E , 交第二圆于点 F . 已知 $CE = a, DF = b$, 四边形 $ABEC$ 的面积与四边形 $ABFD$ 的面积相等. 则 $AB =$ _____.

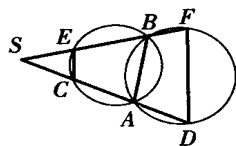


图 1

3. 定义在正整数集合上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \text{ 为奇数,} \\ \frac{x}{2}, & x \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

令 $x_1 = 12, x_{n+1} = f(x_n), n \in \mathbb{N}$, 则集合 $\{x | x = x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 中的元素共有_____个.

4. 已知各项均为正数的等比数列 $\{b_n\}$ 和一个等差数列 $\{a_n\}$, 满足 $b_3 - b_1 = 9, b_5 - b_3 = 36$, 且 $b_1 = a_1, b_2 = a_3$. 记该等比数列前 6 项的和等于 G_6 , 该等差数列前 12 项的和等于 A_{12} , 则 $G_6 + A_{12} =$ _____.

5. $M = \{-2, 0, 1\}, N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. 映射 $f: M \rightarrow N$, 使得对任意 $x \in M$, 都有 $x + f(x) + xf(x)$ 是奇数. 则这样的不同映射共有_____个.

二、(15 分) 如果 a, b, c 是正数, 求证:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}.$$

三、(15 分)如图 2,动点 P 在以 $AB=1$ 为弦,且含弓形角为 $\frac{2}{3}$ 的弓形弧

(含端点)上. 设 $AP=x$, $BP=y$, 试确定 $k=3x+2y$ 的最大值和最小值.

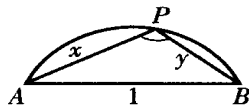


图 2

四、(15 分)已知半径分别为 R, r 的两个圆外切于点 P , 点 P 到这两圆的一条外公切线的距离等于 d . 求证: $\frac{1}{R} + \frac{1}{r} = \frac{2}{d}$.

五、(15 分)设有两两不等的 n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n . 则在形如 $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n$ (其中 t_i 取 1 或 $-1, i=1, 2, \dots, n$) 的整数中, 存在 $\frac{n^2+n+2}{2}$ 个不同的整数, 要么同时为奇数, 要么同时为偶数.

参考答案

初赛

一、1. B.

设 a 为正数, 当 $x = -a$ 时, $x \in \{-a, a\}$, M 真. 但 $\sqrt{(-a)^2} = a \notin \{-a, a\}$, N 不真. 所以, M 不是 N 的充分条件.

若 N 真, $\sqrt{x^2} = a$, 显然应有 a 为非负数. 但 a 不为 0, 所以 a 为正数. 于是, $x = a \in \{-a, a\}$, 故 M 真. 因此, M 是 N 的必要条件.

综上分析, M 是 N 的必要非充分条件.

2. D.

因为 $0 < \frac{x}{1-x} < 1, 0 < |\sin x| < 1$,

$$y = \frac{x}{1-x} - |\sin x| > 0 - 1 = -1,$$

所以 $y = \frac{x}{1-x} - |\sin x|$ 的最大值可能是 1.

下面说明不能达到 1.

因 y 是以 2π 为周期的周期函数, 故只须考虑 $x \in (0, \pi]$ 时函数的变化. 在 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 上, 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $\frac{x}{1-x} > 0, \sin x > 0$, 则 $y = \frac{x}{1-x} - \sin x < 1 - \sin x < 1$.

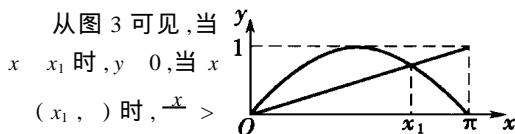


图 3

从图 3 可见, 当 $x = x_1$ 时, $y = 0$; 当 $x = \pi$ 时, $y = \frac{\pi}{1-\pi} > 0$. 且 $\frac{x}{1-x}$ 单调增, $\sin x$ 单调减, 则 $y = \frac{x}{1-x} - \sin x$ 单调增;

当 $x = \pi$ 时, $y = 0$. 所以, y 无最大值.

3. A.

因为 $f(x+10) = -f(x+5) = f(x)$, 所以,

$$f(2003) = f(200 \times 10 + 3) = f(3) = -f(8) = -\frac{1}{8}.$$

4. C.

设 $3^x = t$, 原不等式变形为 $t^2 - 2t - 3 < 0$.

解得 $t \in (-1, 3)$.

因为 t 是正数, 所以, $3^x = t < 3$. 故 $x < 1$.

因此, 满足 $9^x - 2 \times 3^x - 3 < 0$ 的最小实数值是 1.

5. B.

由余弦定理得

$$\cos CAB = \frac{AC^2 + 5^2 - BC^2}{2 \times 5 \times AC} = \frac{3^2 + 25 - 7^2}{10 \times AC}$$

$$= -\frac{15}{10 \times AC} = -\frac{3}{2 \times AC}.$$

由于余弦函数在区间 $(0, \pi)$ 是减函数, 所以,

$$CAB = \frac{2\pi}{3}.$$

6. C.

作出函数 $y = ||x^2 - 4x - 5| - 6|$ 的草图, 看直线 $y = a$ 与该图像的交点个数, 确定实数 a 的取值范围是 $3 < a < 6$.

二、1. $\frac{3}{5}$.

如图 4, 设正方形边长为 2, 连结 MN , 则 $S_{\text{正方形}ABCD} = 4$,

$S_{\triangle ABM} = S_{\triangle ADN} = 1, S_{\triangle CMN} = 0.5$. 所以, $S_{\triangle AMN} = 4 - 1 - 1 - 0.5 = 1.5$. 又 $AM = AN = \sqrt{5}$,

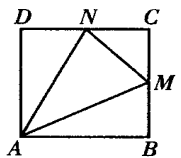


图 4

$$S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN \sin \angle MAN,$$

$$\text{得 } \sin \angle MAN = \frac{2 \times 1.5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5}.$$

2. $\sqrt{2}$.

依题设 $\frac{1}{y} = M, x = M, y + \frac{1}{x} = M$, 则

$$y = \frac{1}{M}, \frac{1}{x} = \frac{1}{M}, M = y + \frac{1}{x} = \frac{2}{M}.$$

于是, $M^2 = 2, M = \sqrt{2}$.

当 $x = \sqrt{2}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $\frac{1}{y} = \sqrt{2}, y + \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. 所以, $M = \sqrt{2}$, M 的最大值是 $\sqrt{2}$.

3. 2 998.5

易知 $x = -1$. 由于

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2+x}{1+x} + \frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 3, f(1) = \frac{3}{2},$$

所以, $m + n = 3 \times 999 + \frac{3}{2} = 2998.5$.

4. $14\frac{1}{16}$.

原方程两边平方并整理得

$$\sqrt{x+4} \cdot \sqrt{9-3x} = x+6,$$

再两边平方得

$$9x+36-3x^2-12x = x^2+12x+36,$$

合并可得 $4x^2+15x=0$, 即 $x(4x+15)=0$.

解得 $x_1=0, x_2=-\frac{15}{4}$.

检验知均为原方程的根. 所以,

$$x_1^2+x_2^2=0+\frac{225}{16}=14\frac{1}{16}.$$

5. 54° .

设 O 是 ABC 的外接圆圆心, 易知 $BAC = 102^\circ$ 是钝角. 所以, O 在 ABC 的外部. 连结 OA 交边 BC 于 D_1 . 下面证明 D_1 与 D 重合.

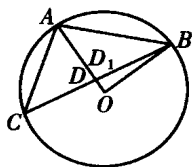


图 5

由图 5 可见,

$$\angle AOB = 84^\circ,$$

$$\angle OAB = 48^\circ,$$

$$\angle BD_1O = 36^\circ + 48^\circ = 84^\circ.$$

所以, $BD_1 = BO$, 即 D_1 与 D 重合. 因此,

$$\angle DAC = 102^\circ - 48^\circ = 54^\circ.$$

6. $2^{2^n} - 2^{n+1} + 1$.

由已知条件得 $\sqrt{a_{n+1}} = 2\sqrt{a_n} + 1$, 所以,

$$\sqrt{a_{n+1}} + 1 = 2(\sqrt{a_n} + 1).$$

因此, $\{\sqrt{a_{n+1}} + 1\}$ 是首项为 2、公比为 2 的等比数列. $\sqrt{a_n} + 1 = 2^n$, 即 $\sqrt{a_n} = 2^n - 1$. 从而,

$$a_n = 2^{2^n} - 2^{n+1} + 1.$$

7. -1.

易知 $f(1991) = -1, f(1992) = 0, f(1993) = 1, f(1994) = 0, \dots, f(2003) = -1$. 所以,

$$f(1991) + f(1992) + \dots + f(2003) = -1.$$

$$8. \frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

设三边按递增顺序排列为 a, aq, aq^2 , 其中 $a > 0, q > 1$. 则 $a + aq > aq^2$, 即 $q^2 - q - 1 < 0$. 解得

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

由 $q > 1$ 知 q 的取值范围是 $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

设三边按递减顺序排列为 a, aq, aq^2 , 其中 $a > 0, 0 < q < 1$. 则 $aq^2 + aq > a$, 即 $q^2 + q - 1 > 0$. 解得

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < 1.$$

综上所述, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

复赛

一、1. 146.

设 $a = x + y, b = xy, xy + x + y = a + b = 71, x^2y + xy^2 = xy(x + y) = ab = 880$.

所以, a, b 是 $t^2 - 71t + 880 = 0$ 的两个根.

解得 $a = x + y, b = xy$ 分别等于 16 和 55.

若 $x + y = 55, xy = 16$, 显然无正整数解. 所以, 只有 $x + y = 16, xy = 55$.

因此, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 146$.

$$2. \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

易知 $\frac{SCE}{SCE} = \frac{SBA}{SBA} = \frac{SDF}{SDF}$. 所以,

设 $AB = x, S_{SCE} = S_0, S_{\text{四边形}ABEC} = S_{\text{四边形}ABFD} = S$, 则

$$\frac{S_0 + S}{S_0} = \frac{x^2}{a^2},$$

$$\frac{S_0 + 2S}{S_0} = \frac{b^2}{a^2}.$$

由得 $\frac{S}{S_0} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$, 由得 $\frac{2S}{S_0} = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$, 故

$$\frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{b^2 - a^2}{2a^2}.$$

$$\text{解得 } x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

3. 7.

由 $x_1 = 12$ 得 $x_2 = 6$, 进而 $x_3 = 3, x_4 = 8, x_5 = 4, x_6 = 2, x_7 = 1, x_8 = 2, x_9 = 1, \dots$, 以下均为 2, 1, 2, 1, .. 的循环. 所以, x_n 共取 7 个不同的值, 即集合 $\{x | x = x_n, n \in \mathbb{N}\}$ 中共有 7 个元素.

4. 324.

设公比为 $q (q > 0)$, 则

$$\text{即 } \begin{cases} b_1 q^2 - b_1 = 9, \\ b_1 q^4 - b_1 q^2 = 36, \\ b_1 q^2 - b_1 = 9, \\ q^2 (b_1 q^2 - b_1) = 36. \end{cases}$$

将代入得 $q^2 = 4$. 故 $q = 2$ 或 $q = -2$. 由于 $q > 0$, 则 $q = 2$. 此时 $b_1 = 3$.

$$\text{所以, } G_6 = \frac{b_1(1 - q^6)}{1 - q} = \frac{3(1 - 64)}{1 - 2} = 189.$$

设 d 是等差数列 $\{a_n\}$ 的公差, 则依题设条件有

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ a_1 + 2d = 6. \end{cases} \text{ 由此得 } d = \frac{3}{2}. \text{ 所以,}$$

$$a_{12} = a_1 + 11d = \frac{39}{2}.$$

$$\text{因此, } A_{12} = \frac{(a_1 + a_{12}) \times 12}{2} = \left(3 + \frac{39}{2}\right) \times 6 = 135.$$

