维普资讯 http://www.cqvip.com
智浪教育—普惠英才文库



# 2007年北京市中学生数学竞赛(高一)

一、选择题(每小题5分,共25分)

**1.** 已知 $f(x)$ 是定义在 **R** 上的奇函数.则 $f\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)+f(\sin\pi)+f\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)=$(　　).

(A) $-0.5$　(B)0　(C)0.5　(D)1

**2.** 函数

$y=|k_1x+b_1|+|k_2x+b_2|-|k_3x+b_3|$

(其中,$k_1$、$k_2$、$k_3$ 为正常数,$b_1$、$b_2$、$b_3$ 均为非0常数)的图像可能是图1中的(　　).

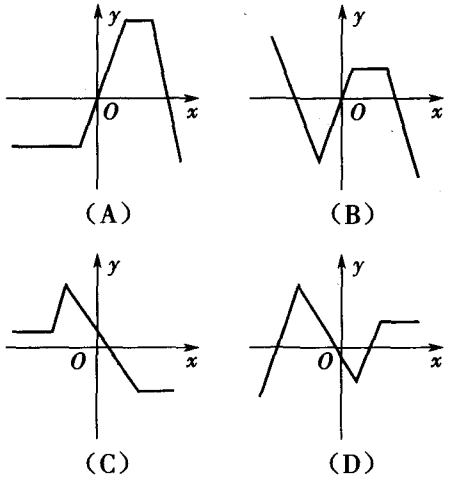


图1

**3.** 若 $O$ 是锐角△$ABC$ 内一点,满足

$|\boldsymbol{OA}|^2+|\boldsymbol{BC}|^2=|\boldsymbol{OB}|^2+|\boldsymbol{CA}|^2$

$=|\boldsymbol{OC}|^2+|\boldsymbol{AB}|^2$.

则点 $O$ 是△$ABC$ 的(　　).

(A)垂心　(B)内心　(C)重心　(D)外心

**4.** 若 $f(x)=(k-1)x^2+2kx+2\,007$ 是 **R** 上的偶函数,则在$(-\infty,2\,007)$上 $f(x)$(　　).

(A)是增函数　(B)是减函数

(C)先减后增　(D)先增后减

**5.** 在△$ABC$ 中,如果

$ab\cos C+bc\cos A+ca\cos B=c^2$,

其中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的对边分别为 $a$、$b$、$c$.则△$ABC$ 的面积是(　　).

(A)$\frac{1}{2}ab$　(B)$\frac{1}{2}bc$

(C)$\frac{1}{2}ca$　(D)$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$

二、填空题(每小题7分,共35分)

**1.** 已知 $a>1$,$b>1$,$c>1$.则 $\log_a b+2\log_b c+4\log_c a$ 的最小值是_____.

**2.** 如图2,$MN$ 是半圆⊙$O$ 的直径,$A$ 是半圆的一个三等分点,$B$ 是$\overset{\frown}{AN}$的中点,$P$ 是直径 $MN$ 上的点.

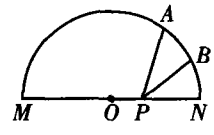


图2

若 $AP+PB$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$ cm,则半圆⊙$O$ 的面积是_____ $cm^2$.

**3.** 一个等差数列的首项为非0实数 $a$,且对每个正整数 $n$,数列的前 $n$ 项和都等于 $an^2$.则这个数列的公差为_____.

**4.** 将一副学生用三角板拼成如图3所示的四边形 $ABCD$,其中,$\angle CBD=\angle CDB=45°$,$\angle BAD=2\angle BDA=60°$,设对角线 $CA$ 与边 $CB$ 所成的角为 $\theta$.则 $\tan\theta=$_____.

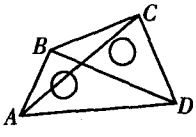


图3

**5.** 在一张平面上画了2 007条互不重合的直线 $l_1,l_2,\cdots,l_{2\,007}$,始终遵循垂直、平行交替的规则进行($l_2\perp l_1$,$l_3/\!/l_2$,$l_4\perp l_3$,$l_5/\!/l_4$,…).这2 007条互不重合的直线共有_____个交点.

三、(15分)已知一次函数 $f(x)=ax+b$

维普资讯 http://www.cqvip.com



对任意的$x$、$y\in[0,1]$都满足

$$|f(x)+f(y)-xy|\leqslant\frac{1}{4}.$$

试确定这样的$f(x)$.

**四**、(10分)如图4,圆内接四边形$ABCD$的一组对边$AB$、$DC$的延长线交于点$P$,另一组对边$AD$、$BC$的延长线交于点$Q$,自$P$、$Q$分别作该圆的切线$PE$、$QF$,其中,$E$、$F$是切点,联结$PQ$.求证:以线段$PE$、$QF$、$PQ$为边构成的三角形是直角三角形.

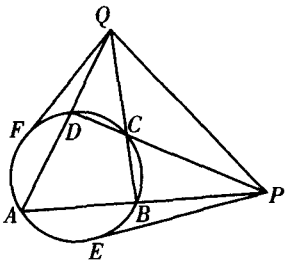

图4

**五**、(15分)已知实数序列$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$的构成规律由递推关系

$$x_0=5,x_n=x_{n-1}+\frac{1}{x_{n-1}}(n=1,2,\cdots)$$

给出.求证:$45<x_{1000}<45.1$.

## 参考答案

**一**、**1.B 2.C 3.A 4.D 5.A**

**二**、**1.6 2.2π 3.2a 4.$\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ 5.** 1 007 012

**三**、对一次函数$f(x)=ax+b$,设

$$F(x,y)=ax+b+ay+b-xy.$$

据已知有$F(0,0)=2b\geqslant-\frac{1}{4}$,即

$$b\geqslant-\frac{1}{8}. \quad ①$$

$$F(0,1)=a+2b\leqslant\frac{1}{4}. \quad ②$$

又$F(1,1)=2a+2b-1\geqslant-\frac{1}{4}$,即

$$a+b\geqslant\frac{3}{8}. \quad ③$$

②-③得

$$a+2b-(a+b)\leqslant\frac{1}{4}-\frac{3}{8}=-\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow b\leqslant-\frac{1}{8}.$$

结合式①得$b=-\frac{1}{8}$.

将$b=-\frac{1}{8}$代入式②、③,分别得

$$a\leqslant\frac{1}{2},a\geqslant\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}.$$

故所求的一次函数为$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$.

当$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}$时,

$$F(x,y)=\left|\frac{1}{2}(x+y)-\frac{1}{4}-xy\right|$$

$$=\left|x-\frac{1}{2}\right|\cdot\left|\frac{1}{2}-y\right|\leqslant\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

对任意的$x$、$y\in[0,1]$都成立.

**四**、只须证明:$PQ^2=PE^2+PF^2$即可.

如图5,过$Q$、$D$、$C$三点作辅助圆交$PQ$于点$G$,联结$CG$.

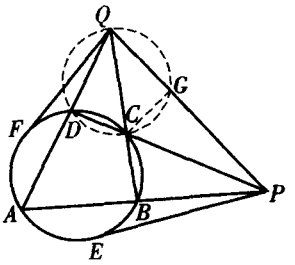

图5

因为$D$、$C$、$G$、$Q$四点共圆,所以,

$$\angle PGC=\angle QDC$$

$$=\angle ABC.$$

故$P$、$G$、$C$、$B$四点共圆.

则$QF^2=QC\cdot QB=QG\cdot QP$.

又$PE^2=PC\cdot PD=PG\cdot PQ$,相加得

$$PE^2+PF^2=PG\cdot PQ+QG\cdot QP$$

$$=PQ(PG+GQ)=PQ^2.$$

因此,根据勾股定理的逆定理得,以线段$PE$、$QF$、$PQ$为边构成的三角形是直角三角形.

**五**、不难看出,数列的各项都是正数且是递增的,即

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots.$$

维普资讯 http://www.cqvip.com



# 2007 中国西部数学奥林匹克

## 第一天

一、(15 分)已知 $T=\{1,2,\cdots,8\}$.对于 $A\subseteq T$, $A\neq\varnothing$,定义 $S(A)$为 $A$ 中所有元素之和.问:$T$ 有多少个非空子集 $A$,使得 $S(A)$是 3 的倍数,但不是 5 的倍数?

(陈永高　提供)

二、(15 分)如图 1,$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于点 $C$、$D$,过 $D$ 的一条直线分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$ 交于点 $A$、$B$,点 $P$ 在$\odot O_1$ 的$\overset{\frown}{AD}$上,$PD$ 与线段 $AC$ 的延长线交于点 $M$,点 $Q$ 在$\odot O_2$ 的$\overset{\frown}{BD}$上,$QD$ 与线段 $BC$ 的延长线交于点 $N$,$O$ 是 $\triangle ABC$ 的外心.求证:$OD\perp MN$ 的充要条件为 $P$、$Q$、$M$、$N$ 四点共圆.

(边红平　提供)

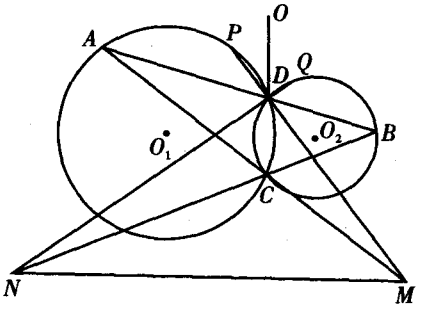


图 1

三、(15 分)设实数 $a$、$b$、$c$ 满足 $a+b+c=3$.求证:

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{1}{4}.$$

(王建伟　提供)

四、(15 分)设 $O$ 是 $\triangle ABC$ 内部一点.证明:存在正整数 $p$、$q$、$r$,使得

$$|p\boldsymbol{OA}+q\boldsymbol{OB}+r\boldsymbol{OC}|<\frac{1}{2\,007}.$$

---

而 $x_n^2=\left(x_{n-1}+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)^2=x_{n-1}^2+\dfrac{1}{x_{n-1}^2}+2$,

$x_{n-1}^2=\left(x_{n-2}+\dfrac{1}{x_{n-2}}\right)^2=x_{n-2}^2+\dfrac{1}{x_{n-2}^2}+2$,

$x_{n-2}^2=\left(x_{n-3}+\dfrac{1}{x_{n-3}}\right)^2=x_{n-3}^2+\dfrac{1}{x_{n-3}^2}+2$,

……

$x_2^2=\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)^2=x_1^2+\dfrac{1}{x_1^2}+2$,

$x_1^2=\left(x_0+\dfrac{1}{x_0}\right)^2=x_0^2+\dfrac{1}{x_0^2}+2$.

上述 $n$ 个式子相加得

$$x_n^2=\frac{1}{x_{n-1}^2}+\frac{1}{x_{n-2}^2}+\frac{1}{x_{n-3}^2}+\cdots+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_0^2}+x_0^2+2n. \quad ①$$

当 $n=1\,000$ 时,由式①得

$x_{1\,000}^2>x_0^2+2\times1\,000=5^2+2\,000=2\,025$.

故 $x_{1\,000}>45$.

又当 $n=100$ 时,由式①得

$x_{100}^2>x_0^2+2\times100=225=15^2$.

则 $x_{1\,000}^2=\dfrac{1}{x_{999}^2}+\dfrac{1}{x_{998}^2}+\dfrac{1}{x_{997}^2}+\dfrac{1}{x_{996}^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_1^2}+\dfrac{1}{x_0^2}+x_0^2+2\times1\,000$

$<\underbrace{\dfrac{1}{x_{100}^2}+\dfrac{1}{x_{100}^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_{100}^2}}_{900\text{个}}+\underbrace{\dfrac{1}{x_0^2}+\dfrac{1}{x_0^2}+\cdots+\dfrac{1}{x_0^2}}_{100\text{个}}+2\,025$

$\leqslant\dfrac{900}{15^2}+\dfrac{100}{5^2}+2\,025=4+4+2\,025$

$<45^2+9<45^2+2\times45\times0.1+0.1^2$

$=(45+0.1)^2=45.1^2$.

故 $x_{1\,000}<45.1$.

综上,$45<x_{1\,000}<45.1$.

(李延林　提供)