2006 年南昌市高中数学竞赛

说明:题号后标高一(高二)的为参赛高一(高二)学生解答题,未标的为参赛学生共同解答题.

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. (i)(高一)设集合

$A=\{a^2+8|a\in\mathbf{N}\}$, $B=\{b^2+29|b\in\mathbf{N}\}$.

若 $A\cap B=P$,则 P 中有(　　)个元素.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D) 至少 3

(ii)(高二)三个互不重合的平面,能把空间分成 n 部分. 则 n 的所有可能的值是(　　).

(A) 4,6,8　(B) 4,6,7

(C) 4,5,7,8　(D) 4,6,7,8

2. (i)(高一)若三角形的三条高线长分别为 12,15,20,则此三角形的形状为(　　).

(A) 锐角三角形　(B) 直角三角形

(C) 钝角三角形　(D) 形状不确定

(ii)(高二)抛物线顶点在原点,对称轴为 x 轴,焦点在直线 $3x-4y=12$ 上. 则抛物线方程为(　　).

(A) $y^2=-12x$　(B) $y^2=12x$

(C) $y^2=-16x$　(D) $y^2=16x$

3. (i)(高一)设 $f(x)=\frac{1+x}{1-x}$,记 $f_1(x)=f(x)$. 若 $f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$,则 $f_{2006}(x)=$(　　).

(A) x　(B) $-\frac{1}{x}$　(C) $\frac{1+x}{1-x}$　(D) $\frac{x-1}{x+1}$

(ii)(高二)四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是单位正方形(A、B、C、D 按逆时针方

$\frac{CE}{4\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{CE+3}$.

解得 $CE=5$ 或 $CE=-8$(舍去).

在 Rt△ACG 中,由勾股定理得

$AG=\sqrt{CG^2-AC^2}=\sqrt{(4\sqrt5)^2-(3+5)^2}=4$.

由割线定理得 $GA\cdot GB=GD\cdot GC$,即

$4(AB+4)=2\sqrt5\times4\sqrt5$.

解得 $AB=6$.

在 Rt△ABC 中,由勾股定理得

$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{6^2+(3+5)^2}=10$.

14. 设 $A(x_1,0)$、$B(x_2,0)$,其中,x_1、x_2 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

又 a、b、c 是正整数,则有

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}<0$, $x_1x_2=\frac{c}{a}>0$.

故方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个负实数根,即

$x_1<0$, $x_2<0$.

由已知得 $\Delta=b^2-4ac>0$.

解得 $b>2\sqrt{ac}$.

因为 $|OA|=|x_1|<1$, $|OB|=|x_2|<1$,所以,

$-1<x_1<0$, $-1<x_2<0$.

于是,$\frac{c}{a}=x_1x_2<1$, $c<a$.

由于 a 是正整数,知抛物线开口向上,且当 $x=-1$ 时,对应的二次函数值大于 0,即

$a-b+c>0$, $a+c>b$.

又 a、b、c 是正整数,有

$a+c\geq b+1>2\sqrt{ac}+1$.

从而,$a+c>2\sqrt{ac}+1$.

则 $(\sqrt a-\sqrt c)^2>1$, $\sqrt a-\sqrt c>1$, $\sqrt a>\sqrt c+1\geq2$.

于是,$a>4$,即 $a\geq5$.

故 $b>2\sqrt{ac}\geq2\sqrt{5\times1}=2\sqrt5$,即 $b\geq5$.

因此,取 $a=5$, $b=5$, $c=1$,故 $y=5x^2+5x+1$ 满足条件.

所以,$a+b+c$ 的最小值为 11.

(李果民　提供)

向排列)，侧棱 PB 垂直于底面，且 $PB=\sqrt{3}$，记 $\angle APD=\theta$. 则 $\sin\theta=$ (　　).

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$　(B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$　(C) $\frac{\sqrt{5}}{5}$　(D) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

4. 若 $a=\sin\theta+\tan\theta$, $b=\cos\theta+\cot\theta$，则下列各式中错误的是(　　).

(A) $\sin\theta=\frac{ab-1}{b+1}$

(B) $\cos\theta=\frac{1-ab}{a+1}$

(C) $\tan\theta+\cot\theta=\frac{(a+b+1)^2+1-2ab}{(a+1)(b+1)}$

(D) $\tan\theta-\cot\theta=\frac{(a-b)(a+b+2)}{(a+1)(b+1)}$

5. $1\,003^{2\,006}$ 的末位数字是(　　).

(A) 1　(B) 3　(C) 7　(D) 9

6. 设 a、b、$c\in\mathbf{R}_+$，且 $ab+bc+ca=108$. 则 $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$ 的最小值是(　　).

(A) 6　(B) 12　(C) 18　(D) 36

二、填空题(每小题 9 分，共 54 分)

7. (i)(高一)设 $M=\{1,2,\cdots,100\}$，A 是 M 的子集，且 A 中至少含有一个立方数. 则这种子集 A 的个数是______.

(ii)(高二)甲、乙两人进行乒乓球单打决赛，采用五局三胜制(即先胜三局者获冠军). 对于每局比赛，甲获胜的概率为 $\frac{2}{3}$，乙获胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 则爆出冷门(乙获冠军)的概率为______.

8. (i)(高一)等腰直角三角形的直角顶点 $A(1,0)$，重心 $G(2,0)$. 则三角形另两个顶点 B、C 对应的坐标为______.

(ii)(高二)棱长为 1 的正四面体在水平面上的正投影面积为 S. 则 S 的最大值为______.

9. (i)(高一)已知 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{5}$ $\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$. 则 $\tan\theta-\cot\theta=$______.

(ii)(高二)函数 $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{2}{\cos^2 x}$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的最小值是______.

10. 若曲线 $y=|x^2-3|$ 与直线 $y=2x+k$ 恰有三个公共点，则 k 的值为______.

11. 数列 $\{a_n\}$ 的各项为正数，其前 n 项和 $S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$. 则 $a_n=$______.

12. 在一次晚会上，9 位明星共上演 n 个“三人舞”节目. 若在这些节目中，任两人都曾合作过一次，且仅合作一次，则 $n=$______.

三、解答题(每小题 20 分，共 60 分)

13. (i)(高一)将等差数列 $\{a_n\}$：$a_n=4n-1$ $(n\in\mathbf{N}_+)$ 中所有能被 3 或 5 整除的数删去后，剩下的数自小到大排成一个数列 $\{b_n\}$. 求 $b_{2\,006}$ 的值.

(ii)(高二)给定 $\odot P$：$x^2+y^2=2x$ 及抛物线 S：$y^2=4x$，过圆心 P 作直线 l 与上述两曲线的四个交点，自上而下顺次记为 A、B、C、D. 如果线段 AB、BC、CD 的长按此顺序构成一个等差数列，求直线 l 的方程.

14. 如图 1，四边形 $ABCD$ 内接于圆，P 是 AB 的中点，$PE\perp AD$，$PF\perp BC$，$PG\perp CD$，M 是线段 PG 和 EF 的交点. 求证：

$ME=MF$.

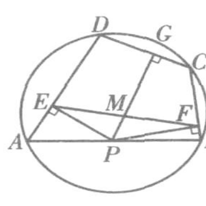

图 1

15. 若正整数 m、n、k 满足 $mn=k^2+1$，证明：存在 a、b、c、$d\in\mathbf{N}$，使

$m=a^2+b^2$，$n=c^2+d^2$，$k=ac+bd$

同时成立.

参 考 答 案

一、**1.** (i) C.

由 $a^2+8=b^2+29$,得 $a^2-b^2=21$,即

$(a-b)(a+b)=21$.

由 $\begin{cases}a-b=1,\\a+b=21,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=11,\\b=10.\end{cases}$

由 $\begin{cases}a-b=3,\\a+b=7,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=5,\\b=2.\end{cases}$

故 $P=\{129,33\}$,共 2 个元素.

(ii) D.

三个平行平面分空间为 4 个部分;当三个平面过同一直线时,分空间为 6 个部分;三棱柱的三个侧面所在面分空间为 7 个部分;空间三个坐标平面分空间为 8 个部分(8 个卦限).

2. (i) B.

三角形三边长之比为 $\frac{1}{12}:\frac{1}{15}:\frac{1}{20}=5:4:3$. 故为直角三角形.

(ii) D.

抛物线焦点为直线 $3x-4y=12$ 与 x 轴交点,即 $(4,0)$. 设抛物线方程为 $y^2=2px$. 由 $\frac{p}{2}=4$,得 $p=8$.

3. (i) B.

易求得 $f_{4n+1}(x)=\frac{1+x}{1-x}$, $f_{4n+2}(x)=-\frac{1}{x}$,

$f_{4n+3}(x)=\frac{x-1}{x+1}$, $f_{4n+4}(x)=x$.

所以, $f_{2\,006}(x)=-\frac{1}{x}$.

(ii) C.

$PA=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$,

$PD=\sqrt{BD^2+PB^2}=\sqrt{2+3}=\sqrt{5}$.

因 $PA\perp AD$,则 $\sin\theta=\frac{AD}{PD}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

4. B.

由已知得

$$\sin\theta\cdot\cos\theta=a\cos\theta-\sin\theta, \quad ①$$

$$\sin\theta\cdot\cos\theta=b\sin\theta-\cos\theta, \quad ②$$

则 $a\cos\theta-\sin\theta=b\sin\theta-\cos\theta$.

所以, $(b+1)\sin\theta=(a+1)\cos\theta$,得

$\tan\theta=\frac{a+1}{b+1}$, $\cot\theta=\frac{b+1}{a+1}$.

故 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{a+1}$

$=\frac{(a+b+1)^2+1-2ab}{(a+1)(b+1)}$,

$\tan\theta-\cot\theta=\frac{a+1}{b+1}-\frac{b+1}{a+1}$

$=\frac{(a-b)(a+b+2)}{(a+1)(b+1)}$.

因此,选项(C)、(D)正确.

将 $\tan\theta=\frac{a+1}{b+1}$ 代入条件式 $\sin\theta=a-\tan\theta=a-\frac{a+1}{b+1}=\frac{ab-1}{b+1}$,知选项(A)正确.

将 $\cot\theta=\frac{b+1}{a+1}$ 代入条件式 $\cos\theta=b-\cot\theta=\frac{ab-1}{a+1}$,若与选项(B)中的值比较将导致 $ab-1=0$,使 $\cos\theta=0$,这时, $\tan\theta$ 无意义.

5. D.

易知,$1\,003^n$ 与 3^n 的末位数相同,而 3^{4k}, 3^{4k+1}, 3^{4k+2}, 3^{4k+3} 的末位数是 1,3,9,7,由 2 006 为 $4n+2$ 型的数即解.

6. C.

$S=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{abc}$

$\geq\frac{ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab}{abc}$

$=a+b+c=\sqrt{(a+b+c)^2}$

$\geq\sqrt{3(ab+bc+ca)}=\sqrt{324}=18$.

二、**7.** (i) $2^{100}-2^{96}$ (即 15×2^{96}).

M 中有立方数 4 个,为 1^3、2^3、3^3、4^3; M 的全部子集有 2^{100} 个,其中,不含立方数的子集有 2^{96} 个,故含立方数的子集为 $2^{100}-2^{96}$ 个.

(ii) $\frac{17}{81}$.

如某方以 3∶1 或 3∶0 获胜,则将未比的一局或两局补上,并不影响比赛结果. 于是,问题转化为:

求乙在五局中至少赢三局的概率.

乙胜 5 局的概率为 $\left(\frac{1}{3}\right)^5$;

乙胜 4 局负 1 局的概率为 $C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\frac{2}{3}$;

乙胜 3 局负 2 局的概率为 $C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

相加,其和为 $\frac{17}{81}$.

8. (i) $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

设斜边中点为 D.

由 $|AG| = 2|GD|$,得 $D\left(\frac{5}{2},0\right)$.

设另两个顶点为 B、C,则 BD 垂直且等于 AD.

故得 $B\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$、$C\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$.

(ii) $\frac{1}{2}$.

投影图形只能是三角形或四边形,且线段投影长不大于原线段长. 当投影为三角形时,$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$;当投影为四边形时,对角线长小于或等于 1,则 $S \leq \frac{1}{2}$,且 $\frac{1}{2}$ 可取到(当对角线互相垂直时).

9. (i) $-\frac{8\sqrt{6}}{23}$.

将条件 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{5}$ 平方得

$1 + 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{2}{25}$.

所以,$\sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{23}{50}$,

$(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta \cdot \cos\theta = \frac{48}{25}$.

因 θ 在第二象限,所以,$\sin\theta - \cos\theta = \frac{4\sqrt{3}}{5}$.

则 $\tan\theta - \cot\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin\theta \cdot \cos\theta}$

$= \frac{(\sin\theta + \cos\theta)(\sin\theta - \cos\theta)}{\sin\theta \cdot \cos\theta} = -\frac{8\sqrt{6}}{23}$.

(ii) $3 + 2\sqrt{2}$.

$f(x) = \cot^2 x + 1 + 2\tan^2 x + 2$

$= 3 + (2\tan^2 x + \cot^2 x) \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

当 $2\tan^2 x = \cot^2 x$,即 $\cot x = \sqrt[4]{2}$ 时,上式等号成立.

10. $4, 2\sqrt{3}$.

(1) 若直线 $y = 2x + k$ 与曲线 $y = -(x^2 - 3)$ 相切于点 P(图略),则 $2x + k = 3 - x^2$,即 $x^2 + 2x + k - 3 = 0$ 的判别式为 0. 从而,

$2^2 = 4(k - 3)$.

解得 $k = 4$.

(2) 若直线 $y = 2x + k$ 通过 $Q(-\sqrt{3},0)$,则 $0 = -2\sqrt{3} + k$. 此时,$k = 2\sqrt{3}$.

11. $\sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

由 $a_1 = S_1 = \frac{1}{2}\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)$,得 $a_1 = \frac{1}{a_1}$.

由 $a_1 > 0$,得 $a_1 = 1$,$S_1 = 1$.

当 $n > 1$ 时,由

$$S_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right), \quad ①$$

知 $S_{n-1} + a_n = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)$,即

$$S_{n-1} = \frac{1}{2}\left(-a_n + \frac{1}{a_n}\right). \quad ②$$

① + ②得 $S_n + S_{n-1} = \frac{1}{a_n}$.　③

又 $S_n - S_{n-1} = a_n$,　④

③×④得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$.

故 $\{S_n^2\}$ 成等差数列,其首项和公差都是 1.

所以,$S_n^2 = n$. 从而,$S_n = \sqrt{n}$.

故当 $n > 1$ 时,$a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$.

当 $n = 1$ 时,也满足上式.

12. 12.

将 9 个人看成 9 个点. 若两人同组演出过,则相应两点间连一条线段,于是,两两间都要连线,共得 36 条线段. 而每个三人舞都对应于一个三角形,都有三条边,当所有的边都出现,且不重复使用时,共得 $n = \frac{36}{3} = 12$ 个三角形,即 12 个节目. 这样的 12 个三人舞可以安排,例如:

(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9);(1,4,7),(2,5,8),(3,6,9);

(1,5,9),(2,6,7),(3,4,8);(1,6,8),(2,4,9),(3,5,7).

三、**13.** (i) 由于 $a_{n+15} - a_n = 60$,故 a_n 是 3 或 5 的倍数当且仅当 a_{n+15} 是 3 或 5 的倍数.

现将数轴正向分成一系列长为 60 的区间段:

$(0,+\infty) = (0,60] \cup (60,120] \cup (120,180] \cup \cdots$.

注意第一个区间段中含有 $\{a_n\}$ 的项 15 个,即 3,7,11,15,19,23,27,31,35,39,43,47,51,55,59,其中,属于 $\{b_n\}$ 的项 8 个:$b_1 = 7$,$b_2 = 11$,$b_3 = 19$,$b_4 = 23$,$b_5 = 31$,$b_6 = 43$,$b_7 = 47$,$b_8 = 59$. 于是,每个区间段中恰有 15 个 $\{a_n\}$ 的项,8 个 $\{b_n\}$ 的项,且有 $b_{8k+r} - b_r = 60k$ ($k \in \mathbf{N}$,$1 \leq r \leq 8$).

由于 $2\,006 = 8 \times 250 + 6$,而 $b_6 = 43$,所以,

$b_{2\,006} = 60 \times 250 + b_6 = 60 \times 250 + 43 = 15\,043$.

(ii) $\odot P$的方程为$(x-1)^2+y^2=1$,其直径为$|BC|=2$,圆心为$P(1,0)$.

设$l:ky=x-1$,即$x=ky+1$,代入抛物线方程得$y^2=4ky+4$.

设$A(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$,有

$$\begin{cases} y_1+y_2=4k, \\ y_1y_2=-4. \end{cases}$$

则$(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2$.

故$|AD|^2=(y_1-y_2)^2+(x_1-x_2)^2$

$$=(y_1-y_2)^2+\left(\frac{y_1^2-y_2^2}{4}\right)^2$$

$$=(y_1-y_2)^2\left[1+\left(\frac{y_1+y_2}{4}\right)^2\right]=16(k^2+1)^2.$$

所以,$|AD|=4(k^2+1)$.

据题意有

$2|BC|=|AB|+|CD|=|AD|-|BC|$,

所以,$|AD|=3|BC|=6$,即

$4(k^2+1)=6$.

解得$k=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故l的方程为$x=\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$或$x=-\frac{\sqrt{2}}{2}y+1$.

14.如图2,作$AF_1\perp BC$,$BE_1\perp AD$(E_1、F_1为垂足).则

$$PE_1=\frac{1}{2}AB=PF_1.$$

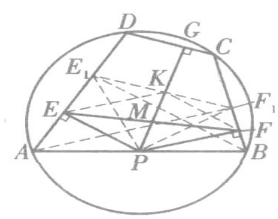

图2

设$PG\cap E_1F_1=K$.

因A、B、F_1、E_1四点共圆,则

$$\angle CF_1E_1=\angle A=\pi-\angle C.$$

故$E_1F_1\parallel CD$,知$PK\perp E_1F_1$.

因$\triangle PE_1F_1$为等腰三角形,所以,K是E_1F_1的中点.而点P、E、K、F又为四边形ABF_1E_1各边中点,所以,四边形$PEKF$为平行四边形.故$ME=MF$.

15.不妨设$m\leq n$.对k用数学归纳法.

当$k=1$时,由于$mn=2$,则$m=1$,$n=2$.此时,有$m=0^2+1^2$,$n=1^2+1^2$,$k=0\times1+1\times1$,结论成立.

设当$k<r(r\geq2)$时结论成立.

当$k=r$时,由于

$$mn=r^2+1, \quad ①$$

则$n\geq r+1$,$m=\frac{r^2+1}{n}\leq\frac{r^2+1}{r+1}<\frac{r^2+r}{r+1}=r$.

故可令$n=r+s$,$m=r-t$(s、$t\in\mathbf{N}_+$).

式①成为

$$(r-t)(r+s)=r^2+1, \quad ②$$

即$rs-ts-tr=1$.

两边同加t^2得

$$(r-t)(s-t)=t^2+1. \quad ③$$

因为$r-t=m>0$,故$s-t>0$,$t<r$.

由归纳假设知,存在a_1、b_1、c_1、$d_1\in\mathbf{N}$,使

$$r-t=a_1^2+b_1^2,\ s-t=c_1^2+d_1^2,\ t=a_1c_1+b_1d_1,$$

即$m=r-t=a_1^2+b_1^2$,

$n=r+s=(r-t)+(s-t)+2t$

$=(a_1+c_1)^2+(b_1+d_1)^2$,

$r=(r-t)+t=a_1(a_1+c_1)+b_1(b_1+d_1)$.

若记$a=a_1$,$b=b_1$,$c=a_1+c_1$,$d=b_1+d_1$,则在式①中有

$m=a^2+b^2$,$n=c^2+d^2$,

$k=r=ac+bd$(a、b、c、$d\in\mathbf{N}$),

即$k=r$时,结论成立.

由数学归纳法,证得结论成立.

(陶平生 提供)

更 正

1.本刊2006年第五期《数学奥林匹克初中训练题(88)》第二试的第二题中的条件“$a\neq0$”应改为“$a<0$”.

2.本刊2007年第一期《数学奥林匹克初中训练题(3)》第二试的第三题应去掉“一元二次”四个字;《数学奥林匹克初中训练题(8)》选择题1的答案应为(B);《2006年北京市中学生数学竞赛(初二)》的第7题少了一个附图(同图5).

3.本刊2007年第二期《数学奥林匹克初中训练题(95)》的选择题5的条件应为“设a、b、c、d为互不相等的正实数,……”.

由于编校的疏忽,给读者带来不便,特此致歉.