2014 年北京市中学生数学竞赛高一年级复赛试题及参考解答

一、填空题(满分 40 分,每小题 8 分)

1. $S(x)$表示自然数 x 的数字和,则满足 $x+S(x)+S(S(x))=2014$ 的 x 的集合是________.

答:$\varnothing$.

解 无论自然数 x 为何值,$x+S(x)+S(S(x))$被 3 整除,而 2014 被 3 除余 1.所以等式不能成立.因此解集为$\varnothing$.

2. 记 $x^2-5x+6\leqslant 0$ 的解集为 P,$x^2-2ax+a^2-1\leqslant 0$ 的解集为 Q,已知 $P\subset Q$,则实数 a 的取值范围是________.

答:$2\leqslant a\leqslant 3$.

解 由 $x^2-5x+6\leqslant 0$ 得 $P=\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$,由 $x^2-2ax+a^2-1\leqslant 0$ 得 $Q=\{x|a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$,已知 $P\subset Q$,即$\{x|2\leqslant x\leqslant 3\}$是$\{x|a-1\leqslant x\leqslant a+1\}$的真子集,因此 $a-1\leqslant 2$ 且 $3\leqslant a+1$,解得 $2\leqslant a\leqslant 3$.即实数 a 的取值范围是 $2\leqslant a\leqslant 3$.

3. 图 1 为偶函数 $f(x)$的图像,图 2 为奇函数 $g(x)$的图像,记方程:$f(f(x))=0$,$f(g(x))=0$,$g(g(x))=0$,$g(f(x))=0$ 的实数根的个数分别为 a、b、c、d,则 $a+b+c+d=$________.

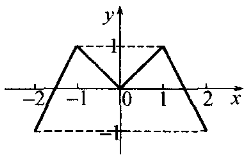

图 1

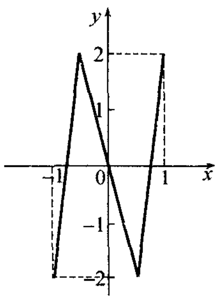

图 2

解 由图像可知:函数 $y=f(x)$的值域为$[-1,1]$,$y=g(x)$的值域为$[-2,2]$.

方程 $f(x)=0$ 的根为 0、x_1、x_2 三个,$|x_1|=|x_2|\in(1,2)$;

方程 $g(x)=0$ 的根为 0、x_3、x_4 三个,$|x_3|=|x_4|\in(0,1)$.

则方程 $f(f(x))=0$ 的根为方程 $f(x)=0$ 或 $f(x)=x_1$ 或 $f(x)=x_2$ 的根.

因为函数 $y=f(x)$的值域为$[-1,1]$,且$|x_1|=|x_2|\in(1,2)$,所以方程 $f(x)=x_1$ 和 $f(x)=x_2$ 无根,而方程 $f(x)=0$ 有 3 个根,所以方程 $f(f(x))=0$ 的根的个数为 3.

方程 $f(g(x))=0$ 的根为方程 $g(x)=0$ 或 $g(x)=x_1$ 或 $g(x)=x_2$ 的根.

因为函数 $y=g(x)$的值域为$[-2,2]$,且$|x_1|=|x_2|\in(1,2)$,所以方程 $g(x)=x_1$ 和$g(x)=x_2$ 各有 3 个根,同时方程 $g(x)=0$ 也有 3 个根,所以方程 $f(g(x))=0$ 的根的个数为 9.

同理,可得方程 $g(g(x))=0$ 和 $g(f(x))=0$ 也各有 9 个根.

所以 $a+b+c+d=3+9+9+9=30$.

4. 在$\triangle ABC$ 中 $AB=7$,$AC=5$,角平分线 AD 与中线 BM 相交于点 P,则$\dfrac{AP}{PD}=$________.

解 过 A 作 BM 的平行线交 CB 延长线于 N,根据平行截割定理,有 $NB=BC$,

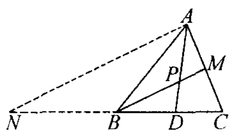

图 3

$$\frac{AP}{PD}=\frac{NB}{BD},$$

即 $$\frac{AP}{PD}=\frac{BC}{BD}=\frac{BD+DC}{BD}=1+\frac{DC}{BD}.$$

但由于 AD 是$\angle A$ 的平分线,所以 D 到 AB、AC 的距离相等,

因此 $$\frac{DC}{BD}=\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{AC}{AB}=\frac{5}{7}.$$

所以 $$\frac{AP}{PD}=1+\frac{5}{7}=\frac{12}{7}.$$

5. 设集合 $P=\{1,2,3,\cdots,2014\}$，$A\subseteq P$. 若集合 A 中任意两个数的差都不是 99 的倍数，且任意两个数的和也不是 99 的倍数，则集合 A 中最多含有________个元素.

解 设集合

$B_i=\{99\times1+i,99\times2+i,\cdots,99\times20+i\}$，$i=0,1,2,\cdots,34$；

$B_j=\{99\times1+j,99\times2+j,\cdots,99\times19+j\}$，$j=35,36,\cdots,98$；

任取 a、$b\in A$，因为集合 A 中任意两个数的差都不是 99 的倍数，所以 a、b 不同属于集合 B_i 或 B_j 中. 再由集合 A 中任意两个数的和也不是 99 的倍数，则 a、b 又不是集合 $M=\{(B_1,B_{98}),(B_2,B_{97}),\cdots,(B_{49},B_{50})\}$ 中的一个数对，所以集合 A 中最多有 50 个元素，如在集合 B_0、B_1、$\cdots$、B_{49} 中各取一个元素即可.

二、(满分 10 分)如图 4，以锐角三角形 ABC 的 BC 边为直径的圆分别交边 AC、AB 于点 D 和 E. 求证：$BE\times BA+CD\times CA=BD^2$.

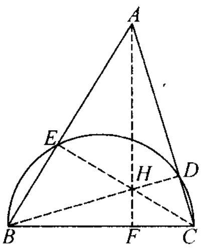

图 4

证明 连接 BD、CE 相交于点 H，则 $\angle BDC=\angle CEB=90°$.

因此，BD、CE 是 $\triangle ABC$ 的两条高线，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

连接 AH，交 BC 于点 F，则 AF 也是 $\triangle ABC$ 的高线，$AF\perp BC$.

易见，由 A、E、F、C 四点共圆，A、B、F、D 四点共圆，根据割线定理，得

$$BE\times BA=BF\times BC \quad ①$$

$$CD\times CA=CF\times CB \quad ②$$

①+②得

$$BE\times BA+CD\times CA$$
$$=BF\times BC+CF\times CB$$
$$=BC(BF+CF)=BC\times BC$$
$$=BC^2.$$

三、(满分 10 分)对 6×6 的方格表的方格中任意排布的 1 至 36 的全部整数，每个方格只有一个数. 证明：在表中的某行里存在这样两个相邻的数，如果取它们中的较小者作为二次三项式 x^2+px+q 的系数 p，较大者作为系数 q，那么得到的一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 具有两个不同的实根.

证明 如果在 6×6 的方格表的一行中相邻的这两个数都不小于 13. 我们称这个相邻的数对为"好数对"，否则为不好的数对.

下面我们证明，对 6×6 的方格表的方格中任意排布的 1 至 36 的全部整数，这样的好数对都是可以找到的.

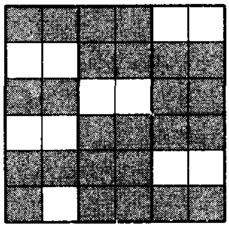

图 5

为此，我们将表中的每一行都分成 3 对，整表即分成 18 对，则在这 18 对中至少有 6 个为"好数对".

对任何好数对 p、q，其中 $p<q$，即为所求. 因为对于它们，一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 的判别式 $\Delta=p^2-4q\geqslant13^2-4\times36=25>0$，

也就是一元二次方程 $x^2+px+q=0$ 具有两个不同的实数根.

四、(满分 10 分)求满足不等式组 $\begin{cases}2x\geqslant3y,\\3x\geqslant4y,\\5x-7y\leqslant20\end{cases}$ 的整数对 (x,y) 的个数.

解 作变量替换

$\begin{cases}u=2x-3y,\\v=3x-4y,\end{cases}$ 或者

$\begin{cases}x=3v-4u,\\y=2v-3u,\end{cases}$ 正如所见，

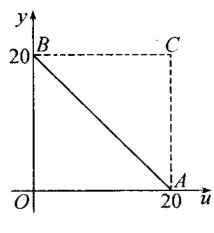

图 6

整数对 (x,y) 对应整数对 (u,v)，反之亦然. 在新的坐标系中不等式具有形式：$\begin{cases}u\geqslant0,\\v\geqslant0,\\u+v\leqslant20.\end{cases}$

只需求出满足不等式组的整数对坐标(u,v)即可.

满足条件的全部整数对(u,v)与直角坐标系u-O-v中$\triangle AOB$内和边上的所有整点(坐标为整数的点)一一对应.

在$\triangle ABO$的斜边AB上有21个整点,而$\triangle ABO$与$\triangle ABC$组成边长为20的正方形$AOBC$,它包含的整点共441个,从中除去对角线AB上的点,得到,正方形的"一半"包含210个整点,即ABO中包含的整点个数是:$21+210=231$个.

五、(满分15分)已知$\triangle ABC$中,$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,三条角平分线分别交对边于$A_1$、$B_1$和$C_1$,$\triangle ABC$的内心为$I$.求证:

(1)$BB_1=AB_1$,$BC_1=CC_1$,$IB_1=IC$,$CI=CA_1$,$BI=BC_1$;

(2)$\triangle A_1B_1C_1$是等腰三角形.

证明 (1)因为$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,所以 $\angle A=\frac{\pi}{7}$,$\angle B=\frac{2\pi}{7}$,$\angle C=\frac{4\pi}{7}$.

易知,$\angle ABB_1=\frac{\pi}{7}=\angle BAB_1\Rightarrow BB_1=AB_1$. $\angle CBC_1=\frac{2\pi}{7}=\angle BCC_1\Rightarrow BC_1=CC_1$.

$\angle ICB_1=\frac{2\pi}{7}=\angle IB_1C\Rightarrow IB_1=IC$.

$\angle CA_1I=\frac{2\pi}{7}+\frac{\pi}{14}=\frac{5\pi}{14}=\angle CIA_1\Rightarrow CI=CA_1$.

$\angle BIC_1=\frac{3\pi}{7}=\angle BC_1I\Rightarrow BI=BC_1$.

(2)由角平分线定理得 $\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{AB}{AC}$,

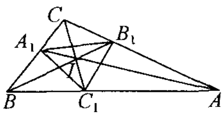

图7

因为$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:4$,易得$\triangle BCI\backsim\triangle ABC$,$\triangle BC_1C\backsim\triangle B_1IC$,于是有

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BC}{BI}=\frac{BC}{BC_1},\ \frac{BC}{BC_1}=\frac{CB_1}{CI}=\frac{CB_1}{CA_1},$$

因此,$\frac{BA_1}{CA_1}=\frac{CB_1}{CA_1}$,所以 $BA_1=CB_1$.

在$\triangle A_1BC_1$与$\triangle B_1CC_1$中,$BC_1=CC_1$,$\angle A_1BC_1=\angle B_1CC_1=\frac{2\pi}{7}$,$BA_1=CB_1$,所以$\triangle A_1BC_1\cong\triangle B_1CC_1$,因此$A_1C_1=B_1C_1$,所以$\triangle A_1B_1C_1$是等腰三角形.

六、(满分15分)已知$f(x)$是定义在实数集$\mathbf{R}$上的函数,对任意的x、$y\in\mathbf{R}$,恒有

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1 \qquad (※)$$

求$f(x)$,并计算$f(\sqrt{2014})$的值.

解 设函数$f(x)$的值域为$A\subseteq\mathbf{R}$,$f(0)=c$,则$c\in A$,对于$x=y=0$,可得

$f(-c)=f(c)+c-1$,所以 $c\neq 0$.

令$x=f(y)$,得

$f(0)=f(x)+x^2+f(x)-1$,

即 $$f(x)=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2} \qquad ①$$

将①代入(※),得

$$\begin{aligned}\text{左边}=f(x-f(y))&=\frac{c+1}{2}-\frac{(x-f(y))^2}{2}\\&=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2-2xf(y)+f^2(y)}{2}\\&=\frac{c+1}{2}-\frac{x^2}{2}+xf(y)-\frac{f^2(y)}{2}\\&=f(x)+xf(y)-\frac{f^2(y)}{2},\end{aligned}$$

$$\text{右边}=\left(\frac{c+1}{2}-\frac{f^2(y)}{2}\right)+xf(y)+f(x)-1.$$

令 左边=右边,则$f(x)+xf(y)-\frac{f^2(y)}{2}=\left(\frac{c+1}{2}-\frac{f^2(y)}{2}\right)+xf(y)+f(x)-1$,

即 $\frac{c+1}{2}=1$,因此 $c=1$.

所以,对任意$x\in\mathbf{R}$,有$f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

容易验证$1-\frac{x^2}{2}$满足题意,故所求得函数为$f(x)=1-\frac{x^2}{2}$.

$$f(\sqrt{2014})=1-\frac{2014}{2}=-1006.$$

(北京数学会普及委员会提供)