智浪教育—普惠英才文库



# 2010 年湖南省高中数学竞赛

中图分类号：G424.79　　文献标识码：A　　文章编号：1005－6416(2011)02－0031－05

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

**1.** 若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 5 的奇函数,且满足 $f(1)=8$,则

$f(2\,010)-f(2\,009)=(\quad)$.

(A)6　(B)7　(C)8　(D)9

**2.** 对于非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 有两个命题.

命题甲:$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$;

命题乙:函数 $f(x)=(x\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(x\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$ 为一次函数.

则甲是乙的(　　)条件.

(A)充分不必要

(B)必要不充分

(C)充分必要

(D)既不充分也不必要

**3.** 如图 1,$\Omega$ 是长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 $EFGH$ 截去几何体 $EFGHB_1C_1$ 后得到的几何体,其中,$E$、$F$ 分别为线段 $A_1B_1$、$BB_1$ 上异于 $B_1$ 的点,且 $EH/\!/A_1D_1$. 则下列结论中不正确的是(　　).

(A)$EH/\!/FG$

(B)四边形 $EFGH$ 是矩形

(C)$\Omega$ 是棱柱

(D)$\Omega$ 是棱台

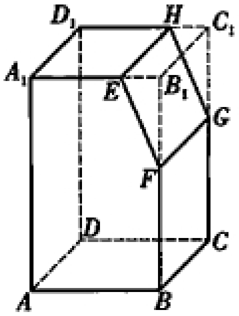


图 1

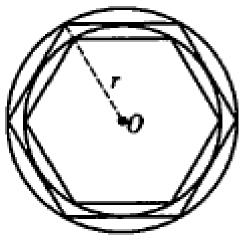


图 2

**4.** 如图 2,在半径为 $r=1$ 的圆内作内接正六边形,再作正六边形的内切圆,又在此内切圆内作内接正六边形,如此无限继续下去,设 $S_n$ 为前 $n$ 个圆的面积之和. 取正数 $\xi=3\pi\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$. 若 $|S_n-4\pi|<\xi$,则 $n$ 的取值为(　　).

(A)大于 100 的所有自然数

(B)大于 100 的有限个自然数

(C)不大于 100 的所有自然数

(D)不大于 100 的有限个自然数

**5.** 设直线 $x=2$ 与双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线交于点 $E_1$、$E_2$,记 $\overrightarrow{OE_1}=\boldsymbol{e}_1$,$\overrightarrow{OE_2}=\boldsymbol{e}_2$,任取双曲线 $\Gamma$ 上的点 $P$. 若 $\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2$ ($a$、$b\in\mathbf{R}$),则(　　).

(A)$0<a^2+b^2<1$

(B)$0<a^2+b^2<\frac{1}{2}$

(C)$a^2+b^2\geqslant 1$

(D)$a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$

**6.** 一厂家有一批长 40 cm、宽 30 cm 的矩形红布. 现该厂家要将每块矩形红布剪一次后拼成一面三角形旗子. 则红布可以拼成三角形旗子的种数是(　　).

(A)1　(B)2　(C)3　(D)4

二、填空题(每小题 7 分,共 56 分)

**7.** 已知定义在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的函数 $y=6\cos x$ 的图像与 $y=5\tan x$ 的图像的交点为 $P$,过 $P$ 作 $PP_1\perp x$ 轴于点 $P_1$,直线 $PP_1$ 与 $y=\sin x$ 的图像交于点 $P_2$. 则线段 $P_1P_2$ 的长

为______.

**8.** 在等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{2\,010}=4$，函数

$$f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\,010}).$$

则函数$y=f(x)$在点$(0,0)$处的切线方程为______.

**9.** 如果执行图3所示的程序，输入正整数$n$、$m(n\geqslant m)$，那么，输出的$p$等于______.

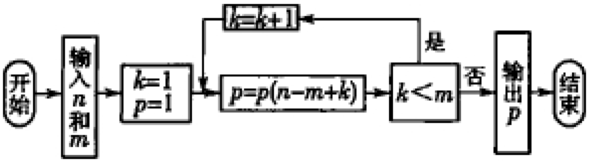


图3

**10.** 已知$y=f(x)$为区间$[0,1]$上的连续函数，且恒有$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，可以用随机模拟方法近似计算积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. 先产生两组(每组$N$个)区间$[0,1]$上的均匀随机数$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_N$和$y_1$，$y_2$，$\cdots$，$y_N$，由此得到$N$个点$(x_i,y_i)$$(i=1,2,\cdots,N)$；再数出其中满足$y_i\leqslant f(x_i)$$(i=1,2,\cdots,N)$的点数$N_1$. 那么，由随机模拟方法可得积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$的近似值为______.

**11.** 设$a_n$是$(3-\sqrt{x})^n$$(n=2,3,\cdots)$的二项展开式中$x$的系数. 则

$$\sum_{n=2}^{18}\frac{3^n}{a_n}=\_\_\_\_\_\_.$$

**12.** 若三个非零实数

$$x(y-z)、y(z-x)、z(y-x)$$

成等比数列，则其公比$q=$______.

**13.** 设函数

$$f(x)=4\sin x\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\cos 2x.$$

如果$|f(x)-m|<2$成立的充分条件是$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$，则实数$m$的取值范围是______.

**14.** 空间有五个点，任意四点不共面. 若连了若干条线段而图中不存在四面体，则图中三角形个数的最大值为______.

三、解答题(共64分)

**15.** (15分)已知当$x\in[1,\mathrm{e}]$时，不等式

$$a\ln x\leqslant-\frac{1}{2}x^2+(a+1)x$$

恒成立. 试求实数$a$的取值范围.

**16.** (15分)如图4，$\odot O_1$、$\odot O_2$在$\odot O$内滚动且始终保持与$\odot O$内切，切点分别为$P$、$Q$，$MN$是$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线. 已知$\odot O_1$、$\odot O_2$、$\odot O$的半径分别为$r_1$、$r_2$、$R$.

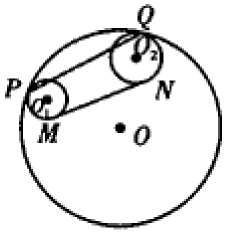


图4

求证：$\frac{MN^2}{PQ^2}$为定值.

**17.** (17分)设椭圆

$$C_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ C_2:\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1,$$

过原点$O$引射线分别与椭圆$C_1$、$C_2$交于点$A$、$B$，$P$为线段$AB$上一点.

(1)求证：$|OA|$、$|OP|$、$|OB|$成等比数列的充要条件是点$P$的轨迹方程为

$$C_3:\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)=1.$$

(2)试利用合情推理，将(1)的结论类比到双曲线得出相应的正确结论(不要求证明).

**18.** (17分)设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是整数$1,2,\cdots,n$的一个排列，且满足

(1)$a_1=1$；

(2)$|a_i-a_{i+1}|\leqslant 2(i=1,2,\cdots,n-1)$.

记上述排列的个数为$f(n)$. 试求$f(2\,010)$被3除的余数.

## 参考答案

一、**1.** C.

由$f(x)$是$\mathbf{R}$上周期为5的奇函数，则

$$f(2\,010)-f(2\,009)=f(0)-f(-1)$$

$=f(0)+f(1)=8.$

**2.** B.

注意到

$f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}x^2+(\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{a}^2)x-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$

于是，$f(x)$为一次函数$\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$

而$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$时，$f(x)$可能是常数函数，不一定为一次函数.

**3.** D.

因为 $EH/\!/A_1D_1$，所以，

$EH/\!/BC$，$EH/\!/$平面 $BCC_1B_1$，

$FG=$面 $BCC_1B_1\cap$面 $EFGH$.

因此，$EH/\!/FG$.

又易知四边形 $EFGH$ 是平行四边形，且 $A_1D_1\perp EF$，则 $EH\perp EF$.

显然，$\Omega$ 为棱柱. 所以，$\Omega$ 不是棱台.

**4.** A.

记第 $n$ 个圆的半径为 $r_n$.

易知，$r_n=\frac{\sqrt{3}}{2}r_{n-1}$，圆面积 $a_n=\frac{3}{4}a_{n-1}$，$a_1=\pi r_1^2=\pi$.

则 $S_n=\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}\cdot\pi r_1^2=4\pi\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$.

由 $|S_n-4\pi|=4\pi\left(\frac{3}{4}\right)^n<3\pi\left(\frac{3}{4}\right)^{99}$，得

$\left(\frac{3}{4}\right)^n<\left(\frac{3}{4}\right)^{100}\Rightarrow n>100.$

**5.** D.

易求得 $E_1(2,1)$，$E_2(2,-1)$. 则

$\overrightarrow{OP}=a\boldsymbol{e}_1+b\boldsymbol{e}_2=(2a+2b,a-b)$.

由点 $P$ 在双曲线上得

$\frac{(2a+2b)^2}{4}-(a-b)^2=1.$

化简得 $4ab=1$.

故 $a^2+b^2\geqslant 2ab=\frac{1}{2}$.

**6.** D.

如图 5 所示，共有四种不同的拼法.

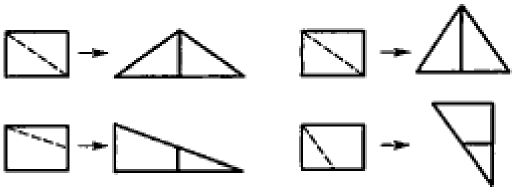

图 5

**二、7.** $\frac{2}{3}$.

设点 $P$ 的横坐标为 $x$. 则

$6\cos x=5\tan x$.

解得 $\sin x=\frac{2}{3}$.

由条件知 $P_1P_2$ 的长度为$\frac{2}{3}$.

**8.** $y=2^{2\,010}x$.

令 $g(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\,010})$.

则 $f(x)=xg(x)$.

因为 $f'(x)=g(x)+xg'(x)$，所以，

$f'(0)=g(0)=a_1a_2\cdots a_{2\,010}$

$=(a_1a_{2\,010})^{\frac{2\,010}{2}}=2^{2\,010}$.

故在点(0,0)处的切线方程为

$y=2^{2\,010}x$.

**9.** $\mathrm{A}_n^m$.

由图 3 可知

$p=(n-m+1)(n-m+2)\cdots n=\mathrm{A}_n^m$.

**10.** $\frac{N_1}{N}$.

设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=S$.

若在面积为 1 的区域 $x\in[0,1]$、$y\in[0,1]$内任意均匀地取出 $N$ 个点，在积分区域内的点的个数为 $N_1$，则$\frac{S}{1}=\frac{N_1}{N}$.

所以，$S$ 的近似值为$\frac{N_1}{N}$.

**11.** 17.

因为 $a_n=3^{n-2}\mathrm{C}_n^2$，所以，

$\frac{3^n}{a_n}=3^2\times\frac{2}{n(n-1)}=\frac{18}{n(n-1)}$.

从而，$\sum_{n=2}^{18}\frac{3^n}{a_n}=18\sum_{n=2}^{18}\frac{1}{n(n-1)}=17$.

12. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

注意到

$x(y-z)+y(z-x)=z(y-x)$.

所以，$1+q=q^2$.

解得 $q=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

13. $(1,4)$.

注意到

$$f(x)=2\sin x\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\cos 2x$$
$$=2\sin x(1+\sin x)+1-2\sin^2 x$$
$$=1+2\sin x.$$

当 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}$ 时，$|f(x)-m|<2$ 恒成立，即 $f(x)-2<m<f(x)+2$ 恒成立.

则 $(f(x)-2)_{\max}<m<(f(x)+2)_{\min}$.

易求得 $(f(x))_{\max}=3$，$(f(x))_{\min}=2$.

因此，$1<m<4$.

14. 4.

首先构造图 6. 易知其符合条件且恰有四个三角形.

下面假设存在某种情况使三角形的个数不少于五个.

若仅有两条线段未连，则这两条线段必无公共端点（如图 6），否则存在四面体. 但仅有四个三角形，矛盾.

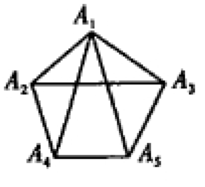


图6

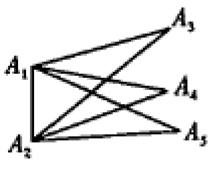


图7

若至少有三条线段未连，当有某条线段作为三个三角形的边时，如图 7 仅有三个三角形；当每条线段至多作为两个三角形的边时，则至多有 $\left[\frac{(C_5^2-3)\times 2}{3}\right]=4$ 个三角形.

三、15. 不等式可化为

$$a(x-\ln x)\geqslant\frac{x^2}{2}-x.$$

因为 $x\in[1,\mathrm{e}]$，所以，$x-\ln x>0$.

于是，不等式化为

$$a\geqslant\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x-\ln x}.$$

设 $g(x)=\frac{\frac{x^2}{2}-x}{x-\ln x}(x\in[1,\mathrm{e}])$. 注意到

$$g'(x)=\frac{(x-1)\left(\frac{x}{2}+1-\ln x\right)}{(x-\ln x)^2}>0,$$

其中，$x\in(1,\mathrm{e})$，且 $g(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=\mathrm{e}$ 处连续，所以，$g(x)$ 在 $x\in[1,\mathrm{e}]$ 上为增函数.

故 $a\geqslant g(\mathrm{e})=\frac{\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}}{2(\mathrm{e}-1)}$.

16. 易知，$O_1$、$O_2$ 分别在线段 $OP$、$OQ$ 上，且 $O_1M\perp MN$，$O_2N\perp MN$. 则

$$MN^2=O_1O_2^2-(r_1-r_2)^2. \quad ①$$

在 $\triangle O_1OO_2$ 中，由余弦定理得

$$O_1O_2^2=(R-r_1)^2+(R-r_2)^2-2(R-r_1)(R-r_2)\cos O$$
$$=(r_1-r_2)^2+2(R-r_1)(R-r_2)(1-\cos O).$$

将上式代入式①得

$$MN^2=2(R-r_1)(R-r_2)(1-\cos O).$$

又 $PQ^2=2R^2(1-\cos O)$，故

$$\frac{MN^2}{PQ^2}=\frac{(R-r_1)(R-r_2)}{R^2}$$

为定值.

17. (1) 设射线 $OA$ 的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\cos\theta,\\ y=t\sin\theta\end{cases}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, t>0).$$

设 $A(t_1\cos\theta,t_1\sin\theta)$，$B(t_2\cos\theta,t_2\sin\theta)$，$P(t_3\cos\theta,t_3\sin\theta)$.

将点 $A$ 的坐标代入 $C_1$ 的方程，整理得

$$\frac{1}{t_1^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}.$$

再将 $\sin\theta=\frac{y}{t_3}$，$\cos\theta=\frac{x}{t_3}$，代入上式化简得

$$\frac{1}{t_1^2}=\frac{1}{t_3^2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right).$$

同理，$\frac{1}{t_2^2}=\frac{1}{t_3^2}\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)$.

故 $|OA|$、$|OP|$、$|OB|$ 成等比数列

$$\Leftrightarrow t_1t_2=t_3^2\Leftrightarrow \frac{1}{t_1^2}\cdot\frac{1}{t_2^2}=\frac{1}{t_3^4}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)=1.$$

(2)设双曲线 $C_1$、$C_2$ 的方程分别为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$$

和 $$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1(m>0,n>0).$$

过原点 $O$ 引射线分别与曲线 $C_1$、$C_2$ 交于点 $A$、$B$，$P$ 为线段 $AB$ 上一点，则 $|OA|$、$|OP|$、$|OB|$ 成等比数列的充要条件是点 $P$ 的轨迹方程为

$$C_3:\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}\right)=1.$$

**18.** 可验证

$f(1)=1,f(2)=1,f(3)=2.$

设 $n\geqslant4$. 则 $a_2=2$ 或 3.

对于 $a_2=2$，排列数是 $f(n-1)$. 这是因为通过删除第一项，且以后所有项都减 1，可以建立一一对应的数列.

对于 $a_2=3$，若有 $a_3=2$，则 $a_4=4$，这样排列数为 $f(n-3)$；若 $a_3\neq2$，则 2 一定排在 4 的后面，由此得出所有奇数顺序排列的后面是所有偶数的倒序排列.

因此，$f(n)=f(n-1)+f(n-3)+1$.

设 $r(n)$ 是 $f(n)$ 除以 3 的余数. 则

$r(1)=r(2)=1,r(3)=2.$

当 $n\geqslant4$ 时，

$r(n)\equiv[r(n-1)+r(n-3)+1](\bmod 3)$.

由此得 $\{r(n)\}$ 构成周期为 8 的数列：

1,1,2,1,0,0,2,0,….

因 $2\ 010\equiv2(\bmod 8)$，所以，

$r(2\ 010)=1$，

即 $f(2\ 010)$ 被 3 除的余数为 1.

（黄元寿 提供）

# 征 稿 启 事

本刊是以报道中学数学课外活动和数学竞赛为中心内容的专业刊物。欢迎作者为**数学活动课程讲座**、**命题与解题**、**从高考到竞赛**、**赛题新解**、**初等数学研究**、**专题写作**、**学生习作**、**短论集锦**、**课外训练**、**数学奥林匹克问题**、**问题赏析**、**数海拾贝**、**缤纷广角镜**等栏目撰稿；欢迎更多的作者撰写适合初中生阅读的、内容充实的专题讲座和解题指导性文章。来稿时请注意以下各项：

1. 来稿一般不超过 3 000 字，长文不超过 4 000 字。
2. 讲座稿应附有相应的练习题（5～7 个），并随练习题给出答案或提示。
3. 文中例题最好选用国内外的竞赛试题，并请注意标出竞赛名称（全称）、届次和时间。
4. 凡为本刊**课外训练**和**数学奥林匹克问题**栏目提供的稿件，请注意：试题内容范围以中国数学会普及工作委员会制定的《数学竞赛大纲》为准；题目要有新意（不能用成题），需注明是自编或改编，改编题需注明原题出处。
5. 参考文献请用顺序编码制，在正文引用处注明。

本刊编辑部