2010 年浙江省高中数学竞赛

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005－6416(2011)07－0029－05

一、选择题(每小题 5 分，共 50 分)

1. 化简三角有理式

$$\frac{\cos^4 x+\sin^4 x+\sin^2 x\cdot\cos^2 x}{\sin^6 x+\cos^6 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$$

的值为(　　).

(A) 1　　(B) $\sin x+\cos x$

(C) $\sin x\cdot\cos x$　　(D) $1+\sin x\cdot\cos x$

2. 设 $p:(x^2+x+1)\sqrt{x+3}\geqslant 0$，

$q:x\geqslant -2$.

则 p 是 q 的(　　)条件.

(A) 充分而不必要

(B) 必要而不充分

(C) 充要

(D) 既不充分也不必要

3. 设集合

$P=\{x\mid x\in\mathbf{R},|x+3|+|x+6|=3\}$.

则集合 $\complement_{\mathbf{R}}P$ 为(　　).

(A) $\{x\mid x<6$，或 $x>3\}$

(B) $\{x\mid x<6$，或 $x>-3\}$

(C) $\{x\mid x<-6$，或 $x>3\}$

(D) $\{x\mid x<-6$，或 $x>-3\}$

4. 设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个相互垂直的单位向量. 已知 $\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OQ}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OR}=r\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$. 若 $\triangle PQR$ 为等边三角形，则 k、r 的取值为(　　).

(A) $k=r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

(B) $k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$，$r=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

(C) $k=r=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

(D) $k=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$，$r=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

5. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1$，则 CA_1 与 C_1B 所成的角的大小是(　　).

(A) 60°　(B) 75°　(C) 90°　(D) 105°

6. 设 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 分别为等差数列与等比数列，且 $a_1=b_1=4$，$a_4=b_4=1$. 则以下结论正确的是(　　).

(A) $a_2>b_2$　　(B) $a_3<b_3$

(C) $a_5>b_5$　　(D) $a_6>b_6$

7. 若 $x\in\mathbf{R}_+$，则 $(1+2x)^{15}$ 的二项展开式中系数最大的项为(　　).

(A) 第 8 项　　(B) 第 9 项

(C) 第 8 项和第 9 项　(D) 第 11 项

8. 设 $f(x)=\cos\dfrac{x}{5}$，$a=f\left(\log_e\dfrac{1}{\pi}\right)$，

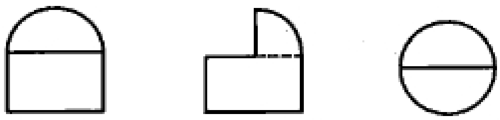
$b=f\left(\log_\pi\dfrac{1}{e}\right)$，$c=f\left(\log_{\frac{1}{e}}\dfrac{1}{\pi^2}\right)$.

则下述关系式正确的是(　　).

(A) $a>b>c$　　(B) $b>c>a$

(C) $c>a>b$　　(D) $b>a>c$

9. 图 1 为某一立体的三视图. 则该立体的体积为(　　).



正视图：半径为1的半圆以及高为1的矩形　侧视图：半径为1的$\frac{1}{4}$圆以及高为1的矩形　俯视图：半径为1的圆

图 1

(A) $\dfrac{3\pi}{2}$　(B) $\dfrac{2\pi}{3}$　(C) $\dfrac{4\pi}{3}$　(D) $\dfrac{3\pi}{4}$

10. 设有算法如图 2 所示：

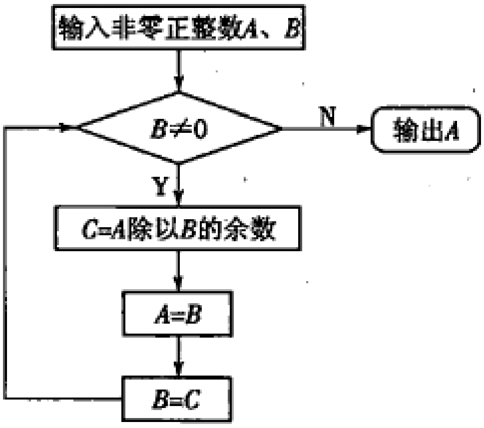


图2

若输入 $A=144$，$B=39$，则输出的结果是(　　).

(A)144　(B)3　(C)0　(D)12

二、填空题(每小题7分，共49分)

11. 满足方程

$$\sqrt{x-2\,009-2\sqrt{x-2\,010}}+\sqrt{x-2\,009+2\sqrt{x-2\,010}}=2$$

所有实数解为______.

12. 若 $x\in\mathbf{R}$，则函数

$$f(x)=2\sin\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{3}$$

的最小正周期为______.

13. 设 P 是圆 $x^2+y^2=36$ 上一动点，点 $A(20,0)$. 当 P 在圆上运动时，线段 PA 的中点 M 的轨迹方程为______.

14. 设锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC 上有一点 D，使得 AD 把 $\triangle ABC$ 分成两个等腰三角形. 则 $\triangle ABC$ 的最小内角的取值范围为______.

15. 设 z 是虚数，$w=z+\frac{1}{z}$，且 $-1<w<2$. 则 z 的实部取值范围为______.

16. 设 $f(x)=k(x^2-x+1)-x^4(1-x)^4$. 若对任何 $x\in[0,1]$，都有 $f(x)\geqslant0$，则 k 的最小值为______.

17. 设 $p、q\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2+p|x|+q$. 当函数 $f(x)$ 的零点多于1个时，$f(x)$ 在以其最小零点与最大零点为端点的闭区间上的最大值为______.

三、解答题(每小题17分，共51分)

18. 设数列

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{2}{1},\frac{1}{3},\frac{2}{2},\frac{3}{1},\cdots,\frac{1}{k},\frac{2}{k-1},\cdots,\frac{k}{1},\cdots$$

问：(1)这个数列第2 010项的值是多少？

(2)在这个数列中，第2 010个值为1的项的序号是多少？

19. 设有红、黑、白三种颜色的球各10个. 现将它们全部放入甲、乙两个袋子中，要求每个袋子里三种颜色球都有，且甲、乙两个袋子中三种颜色球数之积相等. 问：共有多少种放法？

20. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$，Rt$\triangle ABC$ 以 $A(0,1)$ 为直角顶点，边 AB、BC 与椭圆交于两点 B、C. 若 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 $\frac{27}{8}$，求 a 的值.

四、附加题(每小题25分，共50分)

21. 设 D、E、F 分别为 $\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上的点. 记

$$\alpha=\frac{BD}{BC},\ \beta=\frac{CE}{CA},\gamma=\frac{AF}{AB}.$$

证明：$S_{\triangle DEF}\geqslant\alpha\beta\gamma S_{\triangle ABC}$.

22. (1)设 $a>0$. 如果平面上的点其坐标都是整数，则称为"格点". 已知曲线 $y=ax^3$ 过格点 (n,m)，记 $1\leqslant x\leqslant n$ 对应的曲线段上的格点数为 N. 证明：

$$N=\sum_{k=1}^{n}[ak^3]+\sum_{k=1}^{m}\left[\sqrt[3]{\frac{k}{a}}\right]-mn.$$

(2)设 a 是一个正整数. 证明：

$$\sum_{k=1}^{an^3}\left[\sqrt[3]{\frac{k}{a}}\right]=n+\frac{a}{4}(n-1)n^2(3n+1),$$

其中，$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数.

参 考 答 案

1. A.

$$\begin{aligned}&\sin^6x+\cos^6x+2\sin^2x\cdot\cos^2x\\&=(\sin^2x+\cos^2x)(\sin^4x+\cos^4x-\\&\quad\sin^2x\cdot\cos^2x)+2\sin^2x\cdot\cos^2x\end{aligned}$$

$=\sin^4x+\cos^4x+\sin^2x\cdot\cos^2x$.

2. B.

注意到

$(x^2+x+1)\sqrt{x+3}\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant -3$.

所以,p 成立,推不出 q 一定成立.

3. D.

画数轴,由绝对值的几何意义得

$-6\leqslant x\leqslant -3$.

则 $P=\{x\mid -6\leqslant x\leqslant -3\}$.

故 $\complement_{\mathbf{R}}P=\{x\mid x<-6,或 x>-3\}$.

4. C.

注意到

$|PQ|=|QR|=|PR|$

$\Rightarrow\sqrt{r^2+(k-1)^2}=\sqrt{(r-1)^2+k^2}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow r=k=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$.

5. C.

以 A_1B_1 所在的直线为 x 轴、平面 $A_1B_1C_1$ 上垂直于 A_1B_1 的直线为 y 轴、BB_1 所在的直线为 z 轴建立空间直角坐标系. 则

$A_1(\sqrt{2},0,0)$、$C_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$、

$C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$、$B(0,0,1)$.

故 $\overrightarrow{CA_1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2},-1\right)$,

$\overrightarrow{C_1B}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2},1\right)$.

因此,$\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0$.

6. A.

设等差数列的公差为 d,等比数列公比为 q.

由 $a_1=b_1=4,a_4=b_4=1$,得

$d=-1,q=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

于是,$a_2=3,b_2=2\sqrt[3]{2}$; $a_3=2,b_3=\sqrt[3]{4}$;

$a_5=0,b_5=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$; $a_6=-1,b_6=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}$.

7. D.

$T_{r+1}=2^rC_{15}^r$.

由 $T_r\leqslant T_{r+1},T_{r+2}\leqslant T_{r+1}$

$\Rightarrow\frac{29}{3}\leqslant r\leqslant\frac{32}{3}\Rightarrow r=10$.

所以,第 11 项最大.

8. D.

函数 $f(x)=\cos\frac{x}{5}$ 为偶函数,$g(x)=\cos x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上为减函数.

而 $\log_e\frac{1}{\pi}=-\log_e\pi,\log_\pi\frac{1}{e}=-\frac{1}{\log_e\pi}$,

$\log_{\frac{1}{e}}\frac{1}{\pi^2}=2\log_e\pi$,

因此,$0<\frac{1}{5\log_e\pi}<\frac{\log_e\pi}{5}<\frac{2\log_e\pi}{5}<\frac{\pi}{2}$.

所以,$b>a>c$.

9. C.

根据题意,该立体为圆柱和一个 $\frac{1}{4}$ 的球的组合体.

10. B.

(1)$A=144,B=39,C=27$;

(2)$A=39,B=27,C=12$;

(3)$A=27,B=12,C=3$;

(4)$A=12,B=3,C=0$.

所以,输出 $A=3$.

二、**11.** $2\,010\leqslant x\leqslant 2\,011$.

将原方程变形得

$\sqrt{(\sqrt{x-2\,010}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-2\,010}+1)^2}=2$

$\Rightarrow 0\leqslant\sqrt{x-2\,010}\leqslant 1$

$\Rightarrow 2\,010\leqslant x\leqslant 2\,011$.

12. 12π.

因为 $2\sin\frac{x}{2}$ 的周期为 4π,$3\cos\frac{x}{3}$ 的周期为 6π,所以,函数 $f(x)$ 的周期为 12π.

13. $(x-10)^2+y^2=9$.

设 $M(x,y)$、$P(x_0,y_0)$. 则

$x=\dfrac{x_0+20}{2},y=\dfrac{y_0}{2}$

$\Rightarrow x_0=2x-20,y_0=2y$.

因为点 P 在圆上,所以,

$(2x-20)^2+(2y)^2=36$.

故点 M 轨迹为 $(x-10)^2+y^2=9$.

14. $30°<x<45°$或 $22.5°<x<30°$.

(1)如图 3,$AD=AC=BD$;

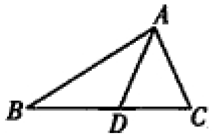


图3

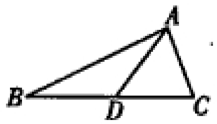


图4

(2)如图 4,$DC=AC,AD=BD$.

在(1)中,设最小的角为 x. 则

$2x<90°\Rightarrow x<45°$.

又 $x+180°-4x<90°\Rightarrow x>30°$.

故 $30°<x<45°$.

在(2)中,设最小的角为 x. 则

$3x<90°\Rightarrow x<30°$.

又 $180°-4x<90°\Rightarrow x>22.5°$.

故 $22.5°<x<30°$.

15. $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$.

设 $z=a+b\,\mathrm{i}$. 则

$-1<a+b\,\mathrm{i}+\dfrac{a-b\,\mathrm{i}}{a^2+b^2}<2$

$\Rightarrow b-\dfrac{b}{a^2+b^2}=0$

$\Rightarrow b=0$ 或 $a^2+b^2=1$.

当 $b=0$ 时,无解;

当 $a^2+b^2=1\Rightarrow -\dfrac{1}{2}<a<1$,符合条件.

16. $\dfrac{1}{192}$.

易知 $k\geqslant\dfrac{x^4(1-x)^4}{x^2-x+1}$.

注意到

$x^2-x+1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant\dfrac{3}{4}$.

故当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,x^2-x+1 取最小值 $\dfrac{3}{4}$.

此时,$x^4(1-x)^4$ 取最大值 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$,所以,$k$ 的最小值为 $\dfrac{1}{192}$.

17. 0 或 q.

注意到函数 $f(x)=x^2+p|x|+q$ 为偶函数,由对称性以及图像知,$f(x)$ 在以其最小零点与最大零点为端点的闭区间上的最大值为 0 或 q.

三、**18.** (1)将数列分组:

$\left(\dfrac{1}{1}\right),\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{1}\right),\cdots,\left(\dfrac{1}{k},\dfrac{2}{k-1},\cdots,\dfrac{k}{1}\right),\cdots$

注意到

$1+2+\cdots+62=1\ 953$,

$1+2+\cdots+63=2\ 016$.

故数列的第 2 010 项属于第 63 组倒数第 7 个数,即为 $\dfrac{57}{7}$.

(2)由(1)的分组知,每个奇数组中出现一个 1,于是,第 2 010 个 1 出现在第 4 019 组,而第 4 019 组中的 1 位于该组第 2 010 位,故第 2 010 个值为 1 的项的序号为

$(1+2+\cdots+4\ 018)+2\ 010=8\ 076\ 181$.

19. 设甲袋中的红、黑、白三种颜色的球数分别为 x、y、z. 则 $1\leqslant x$、y、$z\leqslant9$,且

$xyz=(10-x)(10-y)(10-z)$, ①

即 $xyz=500-50(x+y+z)+5(xy+yz+zx)$.

于是,$5\mid xyz$.

因此,x、y、z 中必有一个取 5.

不妨设 $x=5$,代入式①得 $y+z=10$.

此时,y 可取 $1,2,\cdots,9$(相应地 z 取 $9,8,\cdots,1$),共 9 种放法.

同理,当 $y=5$ 或 $z=5$ 时,也各有 9 种放法.

但 $x=y=z$ 时两种放法重复,因此,共有 $9\times3-2=25$ 种放法.

20. 设 $l_{AB}:y=kx+1(k>0)$. 则

$l_{AC}: y=-\frac{1}{k}x+1.$

由$\begin{cases} y=kx+1, \\ \frac{x^2}{a^2}+y^2=1, \end{cases}$得

$(1+a^2k^2)x^2+2a^2kx=0$

$\Rightarrow x_B=\frac{-2a^2k}{1+a^2k^2}.$

从而，$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}.$

同理，$|AC|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{2a^2k}{a^2+k^2}.$

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB||AC|$

$=2a^4\frac{k(1+k^2)}{(1+a^2k^2)(a^2+k^2)}$

$=2a^4\frac{k+\frac{1}{k}}{a^2\left(k^2+\frac{1}{k^2}\right)+a^4+1}.$

令 $t=k+\frac{1}{k}\geqslant 2$. 则

$S_{\triangle ABC}=\frac{2a^4t}{a^2t^2+(a^2-1)^2}$

$=\frac{2a^4}{a^2t+\frac{(a^2-1)^2}{t}}.$

而 $a^2t+\frac{(a^2-1)^2}{t}\geqslant 2a(a^2-1)$，当 $t=\frac{a^2-1}{a}$ 时，等号成立.

故当 $t=\frac{a^2-1}{a}$时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\frac{a^3}{a^2-1}.$

由$\frac{a^3}{a^2-1}=\frac{27}{8}$

$\Rightarrow (a-3)(8a^2-3a-9)=0$

$\Rightarrow a=3, a=\frac{3+\sqrt{297}}{16}.$

由$\frac{a^2-1}{a}>2\Rightarrow a>1+\sqrt{2}.$

所以，$a=\frac{3+\sqrt{297}}{16}$不合题意，舍去.

因此，$a=3$.

四、21. 注意到

$$\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BD\cdot BF\sin B}{BC\cdot BA\sin B}=\alpha(1-\gamma).$$

同理，$\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}}=\beta(1-\alpha)$，

$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\gamma(1-\beta).$

则$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{S_{\triangle ABC}-S_{\triangle BFD}-S_{\triangle DEC}-S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}$

$=1-\alpha(1-\gamma)-\beta(1-\alpha)-\gamma(1-\beta)$

$=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+\alpha\beta\gamma$

$\geqslant\alpha\beta\gamma.$

当且仅当 $\alpha=1$ 或 $\beta=1$ 或 $\gamma=1$ 时，上式等号成立.

因此，$S_{\triangle DEF}\geqslant\alpha\beta\gamma S_{\triangle ABC}$当且仅当点 D 与 C 重合，或点 E 与 A 重合，或点 F 与 B 重合时，等号成立.

22. (1)考虑区域 $0<x\leqslant n, 0<y\leqslant m$，且该区域上的格点数为 nm. 又该区域由区域 E: $0<x\leqslant n, 0<y\leqslant ax^3$，以及区域 F:

$0<y\leqslant m, 0<x\leqslant\sqrt[3]{\frac{y}{a}}$

组成.

在区域 E 上，因为直线段

$x=k(k\in\mathbf{N}, 1\leqslant k\leqslant n)$

上的格点数为$[ak^3]$，所以，区域 E 上的格点数为$\sum_{k=1}^{n}[ak^3]$.

同理，区域 F 上的格点数为$\sum_{k=1}^{m}\left[\sqrt[3]{\frac{k}{a}}\right]$.

由容斥原理

$$N=\sum_{k=1}^{n}[ak^3]+\sum_{k=1}^{m}\left[\sqrt[3]{\frac{k}{a}}\right]-mn. \quad ①$$

(2)当 a 是一个正整数时，曲线 $y=ax^3$ 上的点$(k, ak^3)(k\in\mathbf{N}, 1\leqslant k\leqslant n)$都是格点，从而，(1)中的 $N=n$. 同时，$m=an^3$.

将以上数据代入式①得

$$\sum_{k=1}^{an^3}\left[\sqrt[3]{\frac{k}{a}}\right]=an^4-a\sum_{k=1}^{n}k^3+n$$

$$=n+\frac{a}{4}(n-1)n^2(3n+1).$$

(越 君 提供)