

2014 年全国高中数学联合竞赛加试 (A 卷) 参考答案及评分标准

说明:

1. 评阅试卷时, 请严格按照本评分标准的评分档次给分.
2. 如果考生的解答方法和本解答不同, 只要思路合理、步骤正确, 在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分, 10 分为一个档次, 不要增加其他中间档次.

一、(本题满分 40 分) 设实数 a, b, c 满足 $a+b+c=1$, $abc > 0$. 求证:

$$ab+bc+ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4}.$$

证明 1 若 $ab+bc+ca \leq \frac{1}{4}$, 则命题已成立.

若 $ab+bc+ca > \frac{1}{4}$, 不妨设 $a = \max\{a, b, c\}$, 则由 $a+b+c=1$ 知 $a \geq \frac{1}{3}$. 我们

有

$$ab+bc+ca - \frac{1}{4} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \leq \frac{a}{4}, \quad \textcircled{1}$$

.....10 分

以及

$$\begin{aligned} ab+bc+ca - \frac{1}{4} &= a(b+c) - \frac{1}{4} + bc \\ &= a(1-a) - \frac{1}{4} + bc \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + bc = bc, \end{aligned} \quad \textcircled{2}$$

其中①式等号在 $a = \frac{1}{3}$ 时成立, ②式等号在 $a = \frac{1}{2}$ 时成立, 因此①, ②中等号不能

同时成立.30 分

由于 $ab+bc+ca - \frac{1}{4} > 0$, 将①, ②式相乘得

$$\left(ab+bc+ca - \frac{1}{4}\right)^2 < \frac{abc}{4},$$

即

$$ab+bc+ca - \frac{1}{4} < \frac{\sqrt{abc}}{2},$$

从而 $ab+bc+ca < \frac{\sqrt{abc}}{2} + \frac{1}{4}$40 分

证明 2 由于 $abc > 0$, 故 a, b, c 中或者一个正数, 两个负数; 或者三个都是正数. 对于前一种情形, 不妨设 $a > 0, b, c < 0$, 则

$$ab+bc+ca = b(a+c) + ca < b(a+c) = b(1-b) < 0,$$

结论显然成立.10 分

下面假设 $a, b, c > 0$, 不妨设 $a \geq b \geq c$, 则 $a \geq \frac{1}{3}, 0 < c \leq \frac{1}{3}$. 我们有

$$\begin{aligned} ab+bc+ca - \frac{\sqrt{abc}}{2} &= c(a+b) + \sqrt{ab} \left(\sqrt{ab} - \frac{\sqrt{c}}{2} \right) \\ &= c(1-c) + \sqrt{ab} \left(\sqrt{ab} - \frac{\sqrt{c}}{2} \right). \end{aligned}$$

由于 $\sqrt{ab} \geq \sqrt{\frac{b}{3}} \geq \sqrt{\frac{c}{3}} > \frac{\sqrt{c}}{2}$, 且 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = \frac{1-c}{2}$, 因此

$$\begin{aligned} c(1-c) + \sqrt{ab} \left(\sqrt{ab} - \frac{\sqrt{c}}{2} \right) &\leq c(1-c) + \frac{1-c}{2} \left(\frac{1-c}{2} - \frac{\sqrt{c}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3c^2}{4} + \frac{c\sqrt{c}}{4} + \frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c}}{4}. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 30 \text{ 分}$$

于是只需证明 $\frac{3c^2}{4} - \frac{c\sqrt{c}}{4} - \frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c}}{4} > 0$, 即

$$3c\sqrt{c} - c - 2\sqrt{c} + 1 > 0. \quad \textcircled{1}$$

由于 $0 < c \leq \frac{1}{3}$, 故

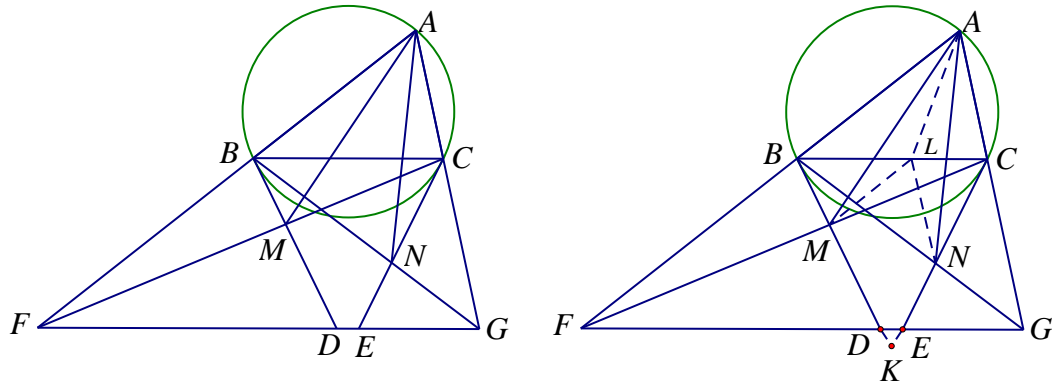
$$\frac{1}{3} - c \geq 0. \quad \textcircled{2}$$

由平均不等式

$$3c\sqrt{c} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \geq 3 \left(3c\sqrt{c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9}\sqrt{c} > 2\sqrt{c}. \quad \textcircled{3}$$

将②, ③两式相加即得①式成立, 因此原不等式成立.40 分

二、(本题满分 40 分) 如图, 在锐角三角形 ABC 中, $\angle BAC \neq 60^\circ$, 过点 B, C 分别作三角形 ABC 的外接圆的切线 BD, CE , 且满足 $BD = CE = BC$. 直线 DE 与 AB, AC 的延长线分别交于点 F, G . 设 CF 与 BD 交于点 M , CE 与 BG 交于点 N . 证明: $AM = AN$.



证明 1 如图, 设两条切线 BD, CE 交于点 K , 则 $BK = CK$. 结合 $BD = CE$ 可知 $DE \parallel BC$. 作 $\angle BAC$ 的平分线 AL 交 BC 于点 L , 连接 LM, LN .

由 $DE \parallel BC$ 知, $\angle ABC = \angle DFB$, $\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC$, 故 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DFB$ 相似.10 分

由此并结合 $DE \parallel BC$, $BD = BC$ 及内角平分线定理可得

$$\frac{MC}{MF} = \frac{BC}{FD} = \frac{BD}{FD} = \frac{AC}{AB} = \frac{LC}{LB},$$

因此 $LM \parallel BF$20 分

同理, $LN \parallel CG$. 由此推出

$$\begin{aligned} \angle ALM &= \angle ALB + \angle BLM = \angle ALB + \angle ABL = 180^\circ - \angle BAL \\ &= 180^\circ - \angle CAL = \angle ALC + \angle ACL = \angle ALC + \angle CLN \\ &= \angle ALN. \end{aligned} \quad \dots\dots\dots 30 \text{ 分}$$

再结合 $BC \parallel FG$ 以及内角平分线定理得到

$$\frac{LM}{LN} = \frac{LM}{BF} \cdot \frac{BF}{CG} \cdot \frac{CG}{LN} = \frac{CL}{BC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{BL} = \frac{CL}{BL} \cdot \frac{AB}{AC} = 1,$$

即 $LM = LN$.

故由 $AL = AL$, $\angle ALM = \angle ALN$, $LM = LN$ 得到 $\triangle ALM$ 与 $\triangle ALN$ 全等, 因而 $AM = AN$, 证毕.40 分

证明 2 由于 BD 和 EC 都是 ω 的切线, 故 $\angle DBC = \angle BAC = \angle ECB$. 再由 $BD = CE$, 可得四边形 $BCED$ 是等腰梯形, 从而 $DE \parallel BC$.

由于 $\angle BFD = \angle ABC = B$, $\angle FDB = \angle DBC = \angle BAC = A$, 故 $\triangle DFB \sim \triangle ABC$10 分

设三角形 ABC 的三内角分别为 A, B, C , 三条边长分别为 $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. 由 $\triangle DFB \sim \triangle ABC$ 有 $\frac{FD}{c} = \frac{BD}{b} = \frac{a}{b}$, 可得 $FD = \frac{ac}{b}$.

由 $BC \parallel FD$, 可得 $\frac{BM}{MD} = \frac{BC}{FD} = \frac{b}{c}$, 故由 $BD = a$ 可得

$$BM = \frac{ab}{b+c}. \quad \textcircled{1}$$

在三角形 ABM 中, $\angle ABM = B + A$, 由余弦定理得

$$\begin{aligned} AM^2 &= c^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} - \frac{2abc}{b+c} \cos(A+B) \\ &= c^2 + \frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} + \frac{2abc}{b+c} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\ &= \frac{1}{(b+c)^2} (c^2(b+c)^2 + a^2 b^2 + c(a^2 + b^2 - c^2)(b+c)) \\ &= \frac{1}{(b+c)^2} (b^2 c^2 + 2bc^3 + c^4 + a^2 b^2 + a^2 bc + a^2 c^2 + b^3 c + b^2 c^2 - bc^3 - c^4) \\ &= \frac{1}{(b+c)^2} (2b^2 c^2 + bc^3 + b^3 c + a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 bc). \quad \textcircled{2} \end{aligned}$$

.....30 分

用同样方法计算 CN 和 AN^2 时, 只需在上述 BM 与 AM^2 的表达式①, ②中将 b, c 交换. 而由②可见 AM^2 的表达式关于 b, c 对称, 因此 $AN^2 = AM^2$, 即 $AM = AN$, 结论获证.40 分

三、(本题满分 50 分) 设 $S = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$. 求最大的整数 k , 使得 S 有 k 个互不相同的非空子集, 具有性质: 对这 k 个子集中任意两个不同子集, 若它们的交非空, 则它们交集的最小元素与这两个子集中的最大元素均不相同.

解 对有限非空实数集 A , 用 $\min A$ 与 $\max A$ 分别表示 A 的最小元素与最大元素. 考虑 S 的所有包含 1 且至少有两个元素的子集, 一共 $2^{99} - 1$ 个, 它们显然满足要求, 因为 $\min(A_i \cap A_j) = 1 < \max A_i$. 故 $k_{\max} \geq 2^{99} - 1$10 分

下面证明 $k \geq 2^{99}$ 时不存在满足要求的 k 个子集. 我们用数学归纳法证明: 对整数 $n \geq 3$, 在集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的任意 $m (\geq 2^{n-1})$ 个不同非空子集 A_1, A_2, \dots, A_m 中, 存在两个子集 A_i, A_j , $i \neq j$, 满足

$$A_i \cap A_j \neq \emptyset, \quad \text{且} \quad \min(A_i \cap A_j) = \max A_i. \quad \text{①}$$

显然只需对 $m = 2^{n-1}$ 的情形证明上述结论.

当 $n = 3$ 时, 将 $\{1, 2, 3\}$ 的全部 7 个非空子集分成 3 组, 第一组: $\{3\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$; 第二组: $\{2\}$, $\{1, 2\}$; 第三组: $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$. 由抽屉原理, 任意 4 个非空子集必有两个在同一组中, 取同组中的两个子集分别记为 A_i, A_j , 排在前面的记为 A_i , 则满足①.20 分

假设结论在 $n (\geq 3)$ 时成立, 考虑 $n + 1$ 的情形. 若 $A_1, A_2, \dots, A_{2^{n-1}}$ 中至少有 2^{n-1} 个子集不含 $n + 1$, 对其中的 2^{n-1} 个子集用归纳假设, 可知存在两个子集满足①.30 分

若至多有 $2^{n-1} - 1$ 个子集不含 $n + 1$, 则至少有 $2^{n-1} + 1$ 个子集含 $n + 1$, 将其中 $2^{n-1} + 1$ 子集都去掉 $n + 1$, 得到 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的 $2^{n-1} + 1$ 个子集.

由于 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的全体子集可分成 2^{n-1} 组, 每组两个子集互补, 故由抽屉原理, 在上述 $2^{n-1} + 1$ 个子集中一定有两个属于同一组, 即互为补集. 因此, 相应地有两个子集 A_i, A_j , 满足 $A_i \cap A_j = \{n + 1\}$, 这两个集合显然满足①. 故 $n + 1$ 时结论成立.

综上所述, 所求 $k_{\max} = 2^{99} - 1$50 分

四、(本题满分 50 分) 设整数 $x_1, x_2, \dots, x_{2014}$ 模 2014 互不同余, 整数 $y_1, y_2, \dots, y_{2014}$ 模 2014 也互不同余. 证明: 可将 $y_1, y_2, \dots, y_{2014}$ 重新排列为 $z_1, z_2, \dots, z_{2014}$, 使得

$$x_1 + z_1, x_2 + z_2, \dots, x_{2014} + z_{2014}$$

模 4028 互不同余.

证明 记 $k=1007$. 不妨设 $x_i \equiv y_i \equiv i \pmod{2k}$, $1 \leq i \leq 2k$. 对每个整数 i , $1 \leq i \leq k$, 若 $x_i + y_i \not\equiv x_{i+k} + y_{i+k} \pmod{4k}$, 则令 $z_i = y_i$, $z_{i+k} = y_{i+k}$; 否则, 令 $z_i = y_{i+k}$, $z_{i+k} = y_i$20 分

如果是前一种情形, 则

$$x_i + z_i = x_i + y_i \not\equiv x_{i+k} + y_{i+k} = x_{i+k} + z_{i+k} \pmod{4k}.$$

如果是后一种情形, 则也有

$$x_i + z_i = x_i + y_{i+k} \not\equiv x_{i+k} + y_i = x_{i+k} + z_{i+k} \pmod{4k}.$$

若不然, 我们有 $x_i + y_i \equiv x_{i+k} + y_{i+k} \pmod{4k}$, $x_i + y_{i+k} \equiv x_{i+k} + y_i \pmod{4k}$,

两式相加可得 $2x_i \equiv 2x_{i+k} \pmod{4k}$, 于是 $x_i \equiv x_{i+k} \pmod{2k}$, 但 $x_1, x_2, \dots, x_{2014}$ 模 2014(=2k) 互不同余, 特别地, $x_i \not\equiv x_{i+k} \pmod{2k}$, 矛盾.30 分

由上述构造方法知 z_1, z_2, \dots, z_{2k} 是 y_1, y_2, \dots, y_{2k} 的排列. 记 $w_i = x_i + z_i$, $i=1, 2, \dots, 2k$. 下面验证 w_1, w_2, \dots, w_{2k} 模 4k 互不同余. 这只需证明, 对任意整数 i, j , $1 \leq i < j \leq k$,

$$w_i, w_j, w_{i+k}, w_{j+k} \text{ 模 } 4k \text{ 两两不同余.} \quad (*)$$

注意, 前面的构造方式已保证

$$w_i \not\equiv w_{i+k} \pmod{4k}, w_j \not\equiv w_{j+k} \pmod{4k}. \quad (**)$$

情形一: $z_i = y_i$, 且 $z_j = y_j$. 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j \pmod{2k}.$$

由于 $2i \not\equiv 2j \pmod{2k}$, 故易知 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 2k 不同余, w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 2k 不同余, 从而模 4k 更不同余, 再结合 (**) 可见 (*) 得证.

情形二: $z_i = y_{i+k}$, 且 $z_j = y_{j+k}$. 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i+k \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

同样有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余, w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余. 与情形一相同地可知 (*) 得证.40 分

情形三: $z_i = y_i$, 且 $z_j = y_{j+k}$ ($z_i = y_{i+k}$, 且 $z_j = y_j$ 的情形与此相同). 则由前面的构造方式可知

$$w_i \equiv w_{i+k} \equiv 2i \pmod{2k}, \quad w_j \equiv w_{j+k} \equiv 2j+k \pmod{2k}.$$

由于 k 是奇数, 故 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2}$, 更有 $2i \not\equiv 2j+k \pmod{2k}$, 因此仍然有 w_i 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余, w_{i+k} 与 w_j 及 w_{j+k} 模 $2k$ 不同余. 从而 (*) 得证.

因此本题得证.50 分