证 ☞ 假设某一段均匀导线被折成三角形的形状.根据 9.116 题的对称原则.质心必须在每条中线上.所以三条中线交于质心.

9.118 如图 9-28 所示的均匀固体球内有一球形洞.求质心的位置.

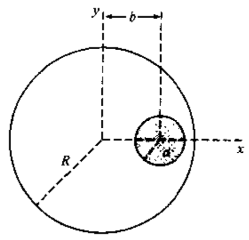

图 9-28

解 ☞ 根据对称性, $y_c = z_c = 0$. 为求出 x_c, 假设洞内也填有物质使整个球成为半径为 R 密度为 ρ 的均匀球.填充所成的球可以由质量为 $\frac{4}{3}\pi a^3\rho$ 且位于 $(b,0,0)$ 的质点所代表.剩下的部分等效于位于 $(x_c,0,0)$ 的质量为 $\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)\rho$ 的质点.这两个质点的质心即为整个球的质心(0,0,0).所以,

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - a^3)\rho x_c + \frac{4}{3}\pi a^3\rho b = \frac{4}{3}\pi R^3\rho(0)$$

即

$$x_c = -\frac{a^3 b}{R^3 - a^3}$$

9.119 一固定的物体由两个质量分别为 3 kg 和 2 kg 的物体通过一质量不计的杆相连而成.3 kg的物体位于 $\boldsymbol{r}_1 = 2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}$m 处,2 kg 的物体位于 $\boldsymbol{r}_2 = 4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$m 处.求杆的长度和质心的坐标.

解 ☞

$$\boldsymbol{R}_c = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{3}{5}(2\boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j}) + \frac{2}{5}(4\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) = \frac{14}{5}\boldsymbol{i} + \frac{19}{5}\boldsymbol{j}(\text{m})$$

杆的长度为 $l = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, 即

$$l = \sqrt{[(2-4)^2 + (5-2)^2]} = \sqrt{13} = 3.61\ (\text{m})$$

9.120[c] 一根长为 L 的直杆一端放在原点,另一端放在 $x = L$ 处.如果杆单位长度的质量为 Ax,其中 A 为常数.求质心的位置.

解 ☞

$$x_c = \frac{\int x\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^L x(Ax)\,\mathrm{d}x}{\int_0^L Ax\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x}{\int_0^L x\,\mathrm{d}x} = \frac{L^3/3}{L^2/2} = \frac{2}{3}L$$

9.121[c] 当单位长度的质量为 $Ax + B$ 时重新求解 9.120 题.

解 ☞ 与 9.120 题中的积分范围相同,求得

$$x_c = \left[\int x(Ax + B)\,\mathrm{d}x\right] / \left[\int (Ax + B)\,\mathrm{d}x\right] = [L(2AL + 3B)]/(3AL + 6B)$$

9.122 证明三角形的均匀金属板的质心是中线的交点.(该点亦称为重心).

证 ☞ 根据图 9-29.三角形中窄条 DE(平行于 AB 边)的质心为中点 F,在中线 CM 上.根据质心的定义,容易证明若体系每个组成部分的质心在一条线上,则整个体系的质心一定也在这一条线上.因为三角形可以看成由类似 DE 的窄条组成,整个三角形的质心在中线 CM 上的某个位置.根据这一论述.可以看出三角形的质心应在它的每条中线上.所以,质心就是三条中线的交点.

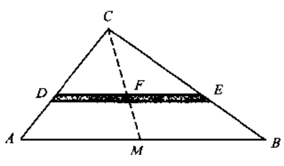

图 9-29

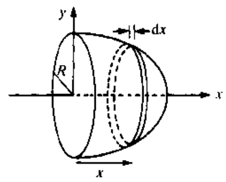

图 9-30

第十章　刚体静力学

10.1　刚体的平衡

10.1　重 200 N 的均匀杠杆上挂一个 450 N 的重物，如图 10-1 所示．求两杠杆两端所受支持力的大小．

解 ☞　研究对象(杆)受到的力如图 10-1 所示．因为杠杆是均匀的，重心就是其几何中心．所以杠杆的重力(200 N)作用在杆的中心．(见题 10.80)F_1、F_2 为杠杆受到的支持力．

我们可以写出两个平衡方程：$\sum F_y = 0$ 和 $\sum \tau = 0$．杠杆在 x 方向不受力，$\sum F_y = 0$ 就写成 $F_1 + F_2 - 200\ \mathrm{N} - 450\mathrm{N} = 0$．根据 10.66 题知转动轴可以任意选择．以 A 点为转动点，则 F_1 通过 A 点而不产生力矩．力矩方程写成 $-(200\ \mathrm{N})(L/2) - (450\mathrm{N})(3L/4) + (F_2)(L) = 0$．方程两边同时除以 L 解出 $F_2 = 438\ \mathrm{N}$．

把 F_2 的值代入到第一个方程得到 $F_1 = 212\mathrm{N}$．

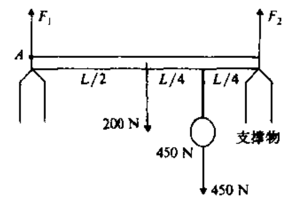

图 10-1

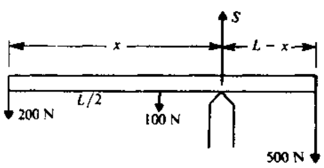

图 10-2

10.2　一根重为 100 N 的均匀直管作为杠杆使用，如图 10-2 所示．如果杠杆的一端挂 500 N 的重物而另一端挂 200 N 的重物时达到平衡，则支点应如何放置？支点承受多重的力？

解 ☞　作用力如图 10-2 所示．我们假设支点距离杠杆的一端为 x 并取支点为转动点．于是力矩方程 $\sum\tau = 0$ 就写成

$$(200\ \mathrm{N})(x) + (100\ \mathrm{N})\left(x - \frac{L}{2}\right) - (500\mathrm{N})(L - x) = 0$$

化简为 $(800\ \mathrm{N})(x) = (550\mathrm{N})(L)$，得到 $x = 0.69L$．所以支点应放在距较轻端 $0.69\,L$ 处．

根据 $\sum Fy = 0$，即 $S - 200\mathrm{N} - 100\mathrm{N} - 500\mathrm{N} = 0$，从而得到支点承受的力 $S = 800\mathrm{N}$．

10.3　重 800 N 的物体应挂在 100 N 的均匀杆上什么位置能使杆一端的小孩承受的力是另一端大人承受力的三分之一？

解 ☞　在图 10-3 中，设小孩受到的力为 P，成人承受的力为 $3P$．以左端为转动点，则力矩方程写成

$$-(800\mathrm{N})(x) - (100\mathrm{N})(L/2) + (P)(L) = 0$$

第二个方程可以写成

$\sum F_y = 0$　即　$3P - 800\mathrm{N} - 100\mathrm{N} + P = 0$

从而得 $P = 225\mathrm{N}$．将该值代入到力矩方程得到 $(800\mathrm{N})(x) = (225\mathrm{N})(L) - (100\mathrm{N})(L/2)$ 从而解得 $x = 0.22L$．重物应挂在距成人 $0.22\,L$ 处．

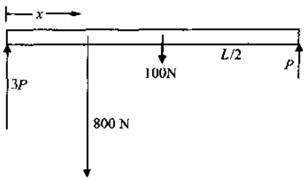

图 10-3

10.4　一重为 200 N 的均匀板长为 L，在上面挂有两重物，300 N 的物体距一端 $L/3$，400 N 的物体距同一端为 $3L/4$(见图 10-4)．要使木板平衡应另外施加多大的力？

9.123[c]　一密度均匀的半球体半径为 R. 通过积分证明其质心在对称轴上并距离平面的中心 $3R/8$.

证　☞ 如图 9-30 所示，选取坐标系使原点位于平面的中心，半球面的平面位于 yz 面. 设把半球面分成平行于平面的圆盘，圆盘在距平面 x 处的厚度为 $\mathrm{d}x$，半径为 $\sqrt{R^2-x^2}$. 所以圆盘的质量 $\mathrm{d}m=\pi\rho(R^2-x^2)\mathrm{d}x$ 其中 ρ 是半球的密度. 半球的质心在 x 轴上坐标 x_c 为

$$x_c=\frac{\int_0^R x\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{\int_0^R\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^R\pi\rho x(R^2-x^2)\mathrm{d}x}{\int_0^R\pi\rho(R^2-x^2)\mathrm{d}x}=\frac{\left(\frac{x^2R^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^R}{\left(xR^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R}=\frac{\frac{R^4}{4}}{\frac{2R^3}{3}}=\frac{3R}{8}$$

根据 9.116 题，$y_c=z_c=0$.

9.124[c]　证明 N 个微粒组成体系的动量与一个以体系质心速度运动且其质量等于体系质量的粒子的动量相等.（接下去就可证明如果体系的动量恒定时则质心的速度也恒定.）

证　☞ 因为

$$\sum_{i=1}^{N}m_i=M$$

根据定义，

$$M\boldsymbol{R}_c=\sum_{i=1}^{N}m_i\boldsymbol{r}_i$$

方程两边对时间微分：

$$M\dot{\boldsymbol{R}}_c=\sum_{i=1}^{N}m_i\dot{\boldsymbol{r}}_i\quad 即\quad M\boldsymbol{V}_c=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{p}_i=\boldsymbol{p}$$

9.125　一个 1 kg 的物体和一个 2 kg 的物体组成的系统开始时静止且两物体中心间距离为 1 m. 2kg 的物体在 1 kg 物体的右侧.（a）体系的质心距离 1 kg 物体的质心多远？（b）从 $t=0$s 起，有一个向右的大小为 2 N 的力作用在 2 kg 的物体上. 求最终加速度，（c）2kg 的物体在 $t=0$s 与 $t=1$ s 内移动了多远？（d）$t=1$s 时质心距离 1 kg 的物体多远？（e）质心在 $t=0$ s 和 $t=1$ s 时相距多远？（f）从 $t=0$s 起，质心的加速度是多大？（g）如果两物体的质量集中在质心，让向右的大小为 2 N 的力作用在此质心上. 求系统的加速度.（h）说明由（f）和（g）的结论所得出的一般规律.

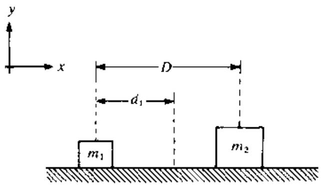

图 9-31

解　☞（a）开始时的位置如图 9-31 所示. 系统的质心在物体 1 和物体 2 之间，距离物体 1 的距离为 d_1，从而得到 $m_1d_1=m_2(D-d_1)$. 因为 $D=1$ m，$m_1=1$ kg，$m_2=2$ kg，得到 $d_1=\frac{2}{3}$m.（b）运用牛顿第二定律，得到 $a_2=F_2/m_2=(2\text{N})\div(2\text{ kg})=1.00\text{ m/s}^2$ 向右.（c）由匀加速运动方程得 $s_2=\frac{1}{2}a_2t^2=0.5(1.00)(1.00^2)=0.50$ m.（d）与前面一样，可得到 $m_1d'_1=m_2(D'-d'_1)$，所以 $d'_1=2D'/3=[2(1.5\text{m})]/3=1.00$ m.（e）质心向右移动 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$m.（f）质心在 x 轴上的坐标 $x_c=(m_1x_1+m_2x_2)/(m_1+m_2)=(x_1+2x_2)/3$. 所以 $a_c=(a_1+2a_2)/3$. 因为 $a_1=0$，$a_c=2a_2/3=\frac{2}{3}$m/s^2 向右.（g）该题中 $a=F/(m_1+m_2)=2\text{N}/3\text{ kg}=\frac{2}{3}$m/s^2 向右.（h）系统质心运动的加速度为 $\boldsymbol{a}_c=\boldsymbol{F}/M$. 其中 $\boldsymbol{F}\equiv\sum\boldsymbol{F}_{外}$为所有作用在系统上的外力之和. $M\equiv\sum_n m_n$ 是系统的总质量.