第 21 届全国中学生物理竞赛复赛题参考解答

一、开始时 U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2 = HA \qquad (1)$$

$$p_2 = p_1$$

经过 2 小时，U 形管右管中空气的体积和压强分别为

$$V_2' = (H - \Delta H)A \qquad (2)$$

$$p_2' = \frac{p_2 V_2}{V_2'} \qquad (3)$$

渗透室下部连同 U 形管左管水面以上部分气体的总体积和压强分别为

$$V_1' = V_1 + \Delta HA \qquad (4)$$

$$p_1 = p_2' + 2\rho g \Delta H \qquad (5)$$

式中 ρ 为水的密度，g 为重力加速度．由理想气体状态方程 $pV = nRT$ 可知，经过 2 小时，薄膜下部增加的空气的摩尔数

$$\Delta n = \frac{p_1' V_1'}{RT} - \frac{p_1 V_1}{RT} \qquad (6)$$

在 2 个小时内，通过薄膜渗透过去的分子数

$$N = \Delta n N_{\mathrm{A}} \qquad (7)$$

式中 N_{A} 为阿伏伽德罗常量．

渗透室上部空气的摩尔数减少，压强下降．下降了 Δp

$$\Delta p = \frac{\Delta n RT}{V_0} \qquad (8)$$

经过 2 小时渗透室上部分中空气的压强为

$$p_0' = p_0 - \Delta p \qquad (9)$$

测试过程的平均压强差

$$\overline{\Delta p} = \frac{1}{2}\left[(p_0 - p_1) + (p_0' - p_1')\right] \qquad (10)$$

根据定义，由以上各式和有关数据，可求得该薄膜材料在 0℃时对空气的透气系数

$$k = \frac{Nd}{\overline{\Delta p} tS} = 2.4 \times 10^{11}\,\mathrm{Pa^{-1}m^{-1}s^{-1}} \qquad (11)$$

评分标准：

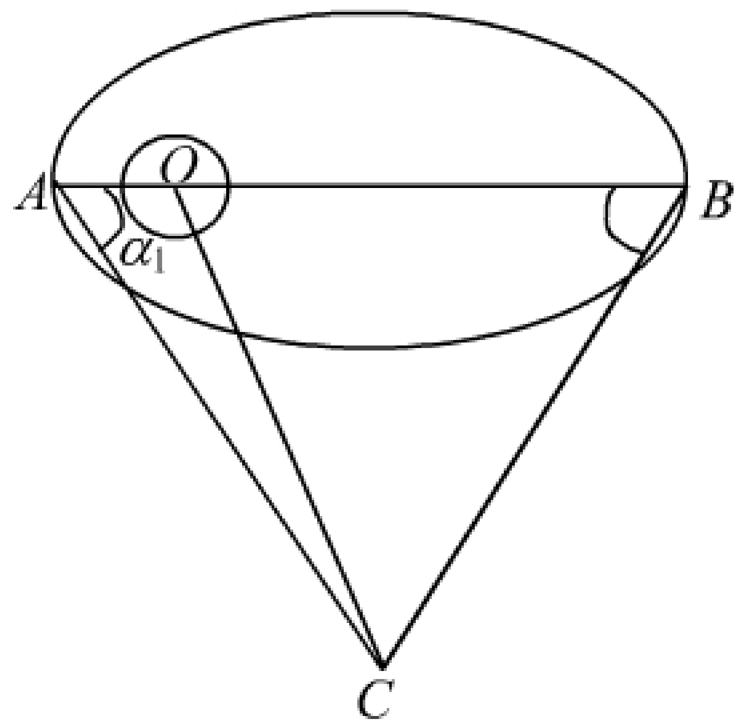
本题 20 分．(1)、(2)、(3)、(4)、(5)式各 1 分，(6)式 3 分，(7)、(8)、(9)、(10) 式各 2 分，(11) 式 4 分．

二、如图，卫星绕地球运动的轨道为一椭圆，地心位于轨道椭圆的一个焦点 O 处，设待测量星体位于 C 处．根据题意，当一个卫星运动到轨道的近地点 A 时，另一个卫星恰好到达远地点 B 处，只要位于 A 点的卫星用角度测量仪测出 AO 和 AC 的夹角 α_1，位于 B 点的卫星用角度测量仪测出 BO 和 BC 的夹角 α_2，就可以计算出此时星体 C 与地心的距离 OC.

因卫星椭圆轨道长轴的长度

$$\overline{AB}=r_{近}+r_{远} \tag{1}$$

式中 $r_{近}$、与 $r_{远}$分别表示轨道近地点和远地点到地心的距离．由角动量守恒



$$mv_{近}r_{近}=mv_{远}r_{远} \tag{2}$$

式中 m 为卫星的质量．由机械能守恒

$$\frac{1}{2}mv_{近}^2-\frac{GMm}{r_{近}}=\frac{1}{2}mv_{远}^2-\frac{GMm}{r_{远}} \tag{3}$$

已知

$$r_{近}=2R, \qquad v_{近}=\sqrt{\frac{3}{4}\frac{GM}{R}}$$

得

$$r_{远}=6R \tag{4}$$

所以

$$\overline{AB}=2R+6R=8R \tag{5}$$

在△ABC 中用正弦定理

$$\frac{\sin\alpha_1}{\overline{BC}}=\frac{\sin(\pi-\alpha_1-\alpha_2)}{\overline{AB}} \tag{6}$$

所以

$$\overline{BC}=\frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\overline{AB} \tag{7}$$

地心与星体之间的距离为 $\overline{OC}$，在△BOC 中用余弦定理

$$\overline{OC}^2=r_{远}^2+\overline{BC}^2-2r_{远}\cdot\overline{BC}\cos\alpha_2 \tag{8}$$

由式(4)、(5)、(7)得

$$\overline{OC}=2R\sqrt{9+16\frac{\sin^2\alpha_1}{\sin^2(\alpha_1+\alpha_2)}-24\frac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}} \tag{9}$$

评分标准：

本题 20 分．(1)式 2 分，(2)、(3)式各 3 分，(6) 、(8)式各 3 分， (9) 式 6 分．

三、因μ子在相对自身静止的惯性系中的平均寿命

$$\tau_0\approx 2.0\times10^{-6}\,\text{s}$$

根据时间膨胀效应，在地球上观测到的μ子平均寿命为τ，

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{1}$$

代入数据得

$$\tau=1.4\times10^{-5}\,\text{s} \tag{2}$$

相对地面，若μ子到达地面所需时间为 t，则在 t 时刻剩余的μ子数为

$$N(t)=N(0)\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{3}$$

根据题意有

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \mathrm{e}^{-t/\tau} = 5\% \tag{4}$$

对上式等号两边取 e 为底的对数得

$$t = -\tau \ln \frac{5}{100} \tag{5}$$

代入数据得

$$t = 4.19 \times 10^{-5}\,\mathrm{s} \tag{6}$$

根据题意，可以把μ子的运动看作匀速直线运动，有

$$h = vt \tag{7}$$

代入数据得

$$h = 1.24 \times 10^{4}\,\mathrm{m} \tag{8}$$

评分标准：

本题 15 分． (1)式或(2)式 6 分，(4)式或(5)式 4 分，(7) 式 2 分，(8) 式 3 分．

四、1．考虑到使 3 个点光源的 3 束光分别通过 3 个透镜都成实像于 P 点的要求，组合透镜所在的平面应垂直于 z 轴，三个光心 O_1、O_2、O_3 的连线平行于 3 个光源的连线，O_2 位于 z 轴上，如图 1 所示．图中 MM' 表示组合透镜的平面，S_1'、S_2'、S_3' 为三个光束中心光线与该平面的交点． $\overline{S_2O_2} = u$ 就是物距．根据透镜成像公式

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{L-u} = \frac{1}{f} \tag{1}$$

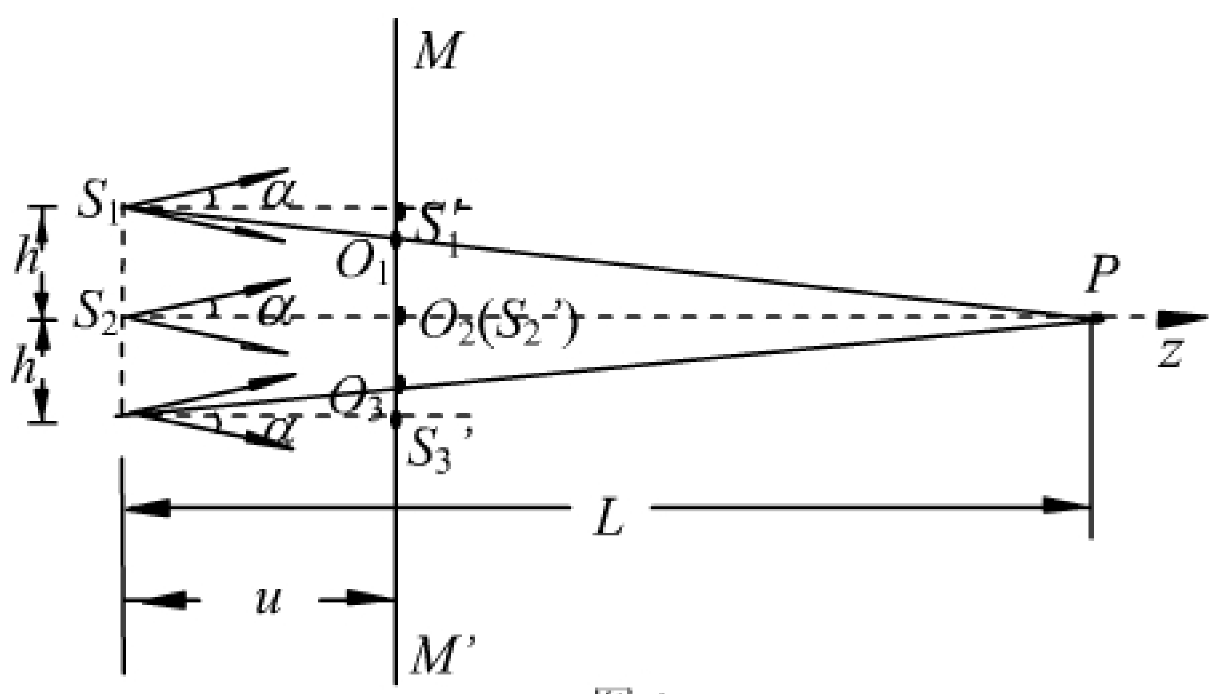


图 1

可解得

$$u = \frac{1}{2}[L \pm \sqrt{L^2 - 4fL}]$$

因为要保证经透镜折射后的光线都能全部会聚于 P 点，来自各光源的光线在投射到透镜之前不能交叉，必须有 $2u\tan\alpha \leqslant h$ 即 $u \leqslant 2h$．在上式中取“－”号，代入 f 和 L 的值，算得

$$u = (6 - 3\sqrt{2})h \approx 1.757h \tag{2}$$

此解满足上面的条件．

分别作 3 个点光源与 P 点的连线．为使 3 个点光源都能同时成像于 P 点，3 个透镜的光心 O_1、O_2、O_3 应分别位于这 3 条连线上（如图 1）．由几何关系知，有

$$\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = \frac{L-u}{L}h = (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2})h \approx 0.854h \tag{3}$$

即光心 O_1 的位置应在 S_1' 之下与 S_1' 的距离为

$$\overline{S_1'O_1} = h - \overline{O_1O_2} = 0.146h \tag{4}$$

同理，O_3 的位置应在 S_3' 之上与 S_3' 的距离为 $0.146h$ 处．由(3)式可知组合透镜中相邻薄透镜中心之间距离必须等于 $0.854h$，才能使 S_1、S_2、S_3 都能成像于 P 点．

2．现在讨论如何把三个透镜 L_1、L_2、L_3 加工组装成组合透镜．

因为三个透镜的半径 $r = 0.75h$，将它们的光心分别放置到 O_1、O_2、O_3 处时，由于 $\overline{O_1O_2} = \overline{O_2O_3} = 0.854h < 2r$，透镜必然发生相互重叠，必须对透镜进行加工，各切去一部分，然后再将它们粘起来，才能满足(3)式的要求．由于对称关系，我们只需讨论上半部分的情况．

图 2 画出了 L_1、L_2 放在 MM' 平面内时相互交叠的情况（纸面为 MM' 平面）．图中 C_1、C_2 表示 L_1、L_2 的边缘，S_1'、S_2' 为光束中心光线与透镜的交点，W_1、W_2 分别为 C_1、C_2 与 O_1O_2 的交点．

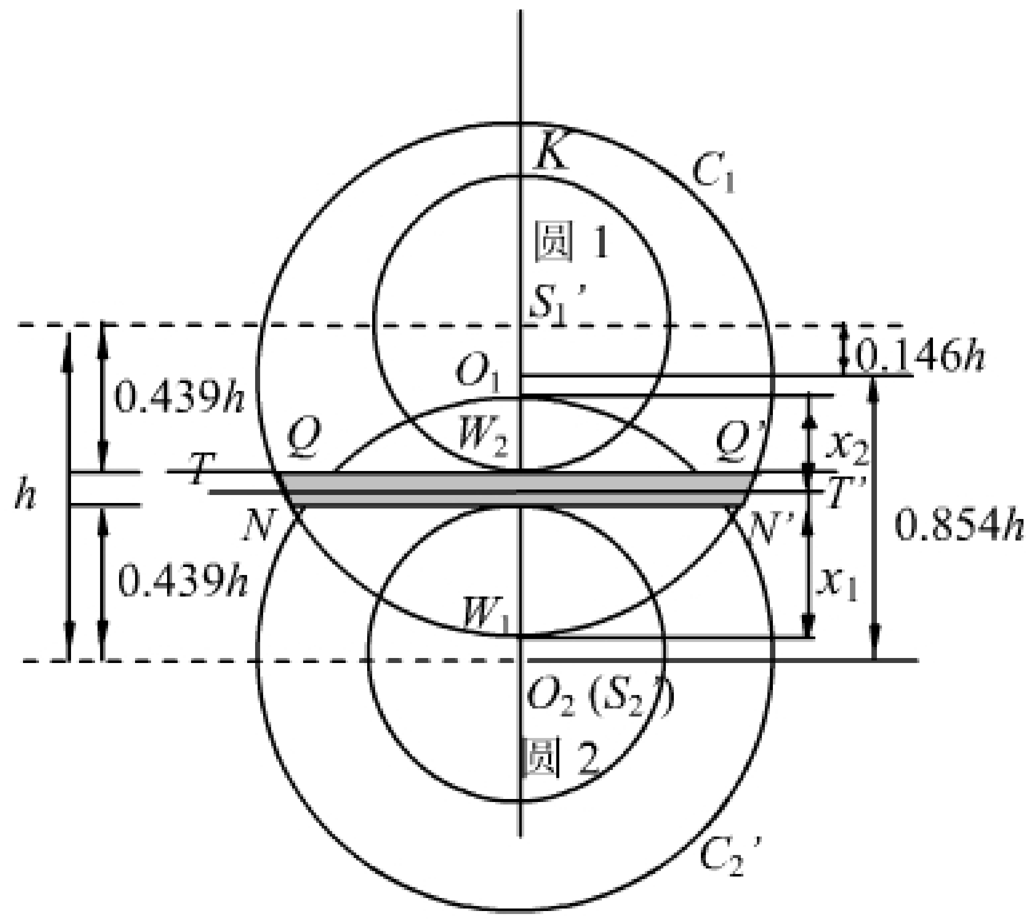


图 2

S_1' 为圆心的圆 1 和以 S_2'（与 O_2 重合）为圆心的圆 2 分别是光源 S_1 和 S_2 投射到 L_1 和 L_2 时产生的光斑的边缘，其半径均为

$$\rho = u\tan\alpha = 0.439h \tag{5}$$

根据题意，圆 1 和圆 2 内的光线必须能全部进入透镜．首先，圆 1 的 K 点（见图 2）是否落在 L_1 上？由几何关系可知

$$\overline{O_1K} = \rho + \overline{O_1S_1'} = (0.439 + 0.146)h = 0.585h < r = 0.75h \tag{6}$$

故从 S_1 发出的光束能全部进入 L_1．为了保证全部光束能进入透镜组合，对 L_1 和 L_2 进行加工时必须保留圆 1 和圆 2 内的透镜部分．

下面举出一种对透镜进行加工、组装的方法．在 O_1 和 O_2 之间作垂直于 O_1O_2 且分别与圆 1 和圆 2 相切的切线 QQ' 和 NN'．若沿位于 QQ' 和 NN' 之间且与它们平行的任意直线 TT' 对透镜 L_1 和 L_2 进行切割，去掉两透镜的弓形部分，然后把它们沿此线粘合就得到符合所需组合透镜的上半部．同理，对 L_2 的下半部和 L_3 进行切割，然后将 L_2 的下半部和 L_3 粘合起来，就得到符合需要的整个组合透镜．这个组合透镜可以将 S_1、S_2、S_3 发出的全部光线都会聚到 P 点．

现在计算 QQ' 和 NN' 的位置以及对各个透镜切去部分的大小应符合的条件．设透镜 L_1 被切去部分沿 O_1O_2 方向的长度为 x_1，透镜 L_2 被切去部分沿 O_1O_2 方向的长度为 x_2，如图 2 所示，则对任意一条切割线 TT'，x_1、x_2 之和为

$$d = x_1 + x_2 = 2r - \overline{O_1O_2} = 0.646h \tag{7}$$

由于 TT' 必须在 QQ' 和 NN' 之间，从图 2 可看出，沿 QQ' 切割时，x_1 达最大值(x_{1M})，x_2 达最小值(x_{2m})，

$$x_{1M} = r + \overline{S_1'O_1} - \rho$$

代入 r，ρ 和 $\overline{S_1'O_1}$ 的值，得

$$x_{1M} = 0.457h \tag{8}$$

代入(7)式，得

$$x_{2m} = d - x_{1M} = 0.189h \tag{9}$$

由图 2 可看出，沿 NN' 切割时，x_2 达最大值(x_{2M})，x_1 达最小值(x_{1m})，

$$x_{2M} = r - \rho$$

代入 r 和 ρ 的值，得

$$x_{2M} = 0.311h \tag{10}$$

$$x_{1m} = d - x_{2M} = 0.335h \tag{11}$$

由对称性，对 L_3 的加工与对 L_1 相同，对 L_2 下半部的加工与对上半部的加工相同．

评分标准：

本题 20 分．第 1 问 10 分，其中（2）式 5 分，（3）式 5 分，
第 2 问 10 分，其中(5)式 3 分，(6)式 3 分，(7)式 2 分，(8)式、(9)式共 1 分，(10)式、(11)式共 1 分．

如果学生解答中没有(7)—(11)式，但说了“将图 2 中三个圆锥光束照射到透镜部分全部保留，透镜其它部分可根据需要磨去（或切割掉）”给 3 分，再说明将加工后的透镜组装成透镜组合时必须保证 O_1O_2=O_1O_2=0.854h，再给 1 分，即给(7)—(11)式的全分（4 分）．

五、1．解法Ⅰ：

如图 1 所示，S 为原空腔内表面所在位置，q_1' 的位置应位于 $\overline{OP_1}$ 的延长线上的某点 B_1 处，q_2' 的位置应位于 $\overline{OP_2}$ 的延长线上的某点 B_2 处．设 A_1 为 S 面上的任意一点，根据题意有

$$k\frac{q_1}{\overline{A_1P_1}}+k\frac{q_1'}{\overline{A_1B_1}}=0 \qquad (1)$$

$$k\frac{q_2}{\overline{A_1P_2}}+k\frac{q_2'}{\overline{A_1B_2}}=0 \qquad (2)$$

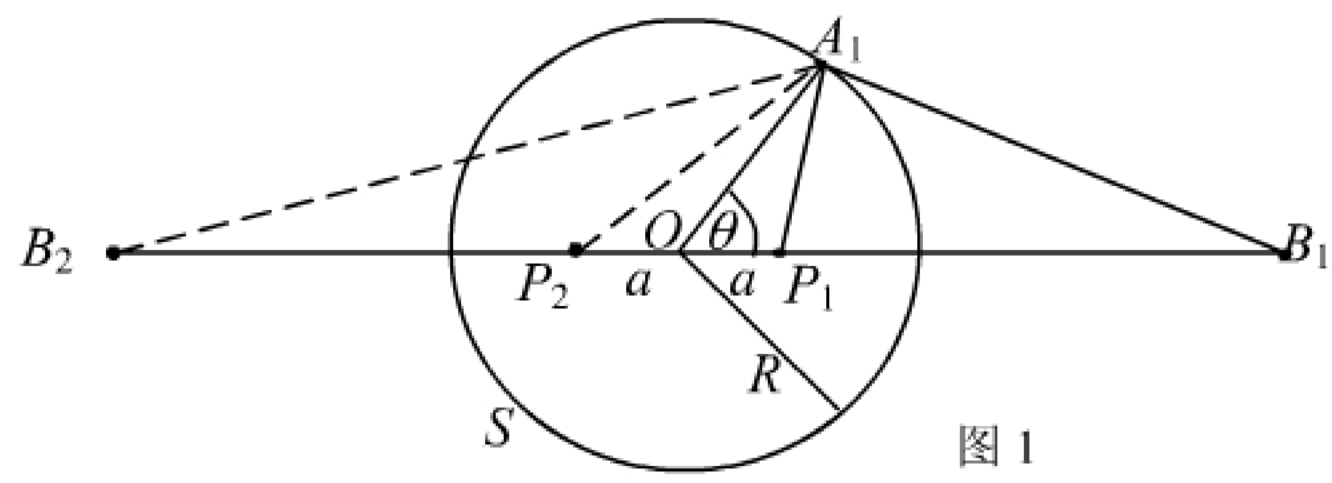


图 1

怎样才能使 (1) 式成立呢？下面分析图 1 中 ΔOP_1A_1 与 ΔOA_1B_1 的关系．

若等效电荷 q_1' 的位置 B_1 使下式成立，即

$$\overline{OP_1}\cdot\overline{OB_1}=R^2 \qquad (3)$$

即
$$\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}}=\frac{\overline{OA_1}}{\overline{OB_1}} \qquad (4)$$

则
$$\triangle OP_1A_1 \backsim \triangle OA_1B_1$$

有
$$\frac{\overline{A_1P_1}}{\overline{A_1B_1}}=\frac{\overline{OP_1}}{\overline{OA_1}}=\frac{a}{R} \qquad (5)$$

由 (1)式和 (5)式便可求得等效电荷 q_1'

$$q_1'=-\frac{R}{a}q_1 \qquad (6)$$

由 (3) 式知，等效电荷 q_1' 的位置 B_1 到原球壳中心位置 O 的距离

$$\overline{OB_1}=\frac{R^2}{a} \qquad (7)$$

同理，B_2 的位置应使 $\triangle OP_2A_1 \backsim \triangle OA_1B_2$，用类似的方法可求得等效电荷

$$q_2'=-\frac{R}{a}q_2 \qquad (8)$$

等效电荷 q_2' 的位置 B_2 到原球壳中心 O 位置的距离

$$\overline{OB_2}=\frac{R^2}{a} \qquad (9)$$

解法Ⅱ：

在图 1 中，设 $\overline{A_1P_1}=r_1$，$\overline{A_1B_1}=r_1'$，$\overline{OB_1}=d$．根据题意，q_1 和 q_1' 两者在 A_1 点产生的电势和为零．有

$$k\frac{q_1}{r_1}+k\frac{q_1'}{r_1'}=0 \qquad (1')$$

式中

$$r_1=(R^2+a^2-2Ra\cos\theta)^{1/2} \tag{2′}$$

$$r_1'=(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)^{1/2} \tag{3′}$$

由（1′）、（2′）、（3′）式得

$$q_1^2(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)=q_1'^2(R^2+a^2-2Ra\cos\theta) \tag{4′}$$

（4′）式是以$\cos\theta$为变量的一次多项式，要使（4′）式对任意θ均成立，等号两边的相应系数应相等，即

$$q_1^2(R^2+d^2)=q_1'^2(R^2+a^2) \tag{5′}$$

$$q_1^2 d=q_1'^2 a \tag{6′}$$

由（5′）、（6′）式得

$$ad^2-(a^2+R^2)d+aR^2=0 \tag{7′}$$

解得

$$d=\frac{(a^2+R^2)\pm(a^2-R^2)}{2a} \tag{8′}$$

由于等效电荷位于空腔外部，由（8′）式求得

$$d=\frac{R^2}{a} \tag{9′}$$

由（6′）、（9′）式有

$$q_1'^2=\frac{R^2}{a^2}q_1^2 \tag{10′}$$

考虑到（1′）式，有

$$q_1'=-\frac{R}{a}q_1 \tag{11′}$$

同理可求得

$$\overline{OB_2}=\frac{R^2}{a} \tag{12′}$$

$$q_2'=-\frac{R}{a}q_2 \tag{13′}$$

2．A点的位置如图2所示．A的电势由q_1、q_1'、q_2、q_2'共同产生，即

$$U_A=kq\left(\frac{1}{\overline{P_1A}}-\frac{R}{a}\frac{1}{\overline{B_1A}}+\frac{1}{\overline{P_2A}}-\frac{R}{a}\frac{1}{\overline{B_2A}}\right) \tag{10}$$

因

$$\overline{P_1A}=\sqrt{r^2-2ra\cos\theta+a^2}$$

$$\overline{B_1A}=\sqrt{r^2-2r\left(\frac{R^2}{a}\right)\cos\theta+\left(\frac{R^2}{a}\right)^2}$$

$$\overline{P_2A}=\sqrt{r^2+2ra\cos\theta+a^2}$$

$$\overline{B_2A}=\sqrt{r^2+2r\left(\frac{R^2}{a}\right)\cos\theta+\left(\frac{R^2}{a}\right)^2}$$

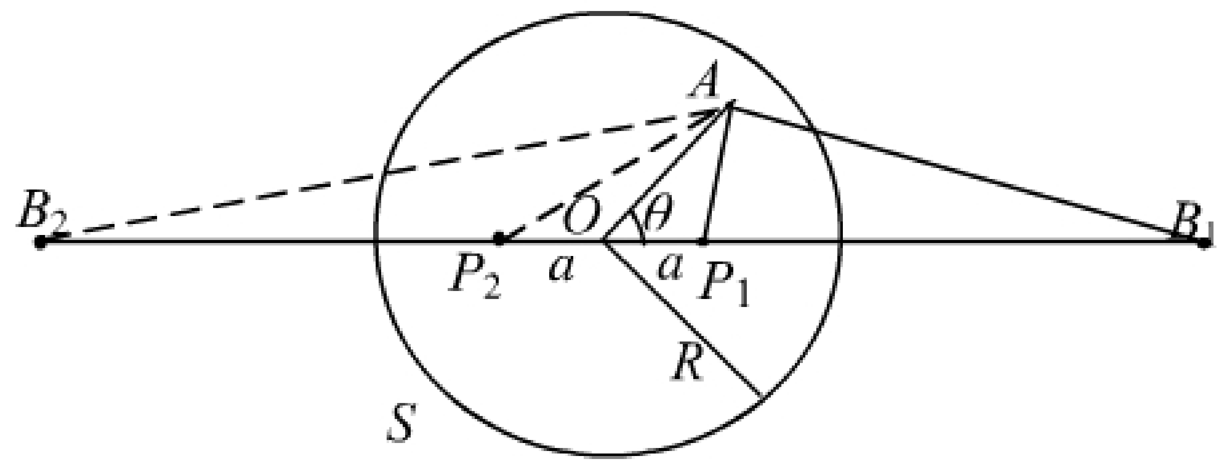


图 2

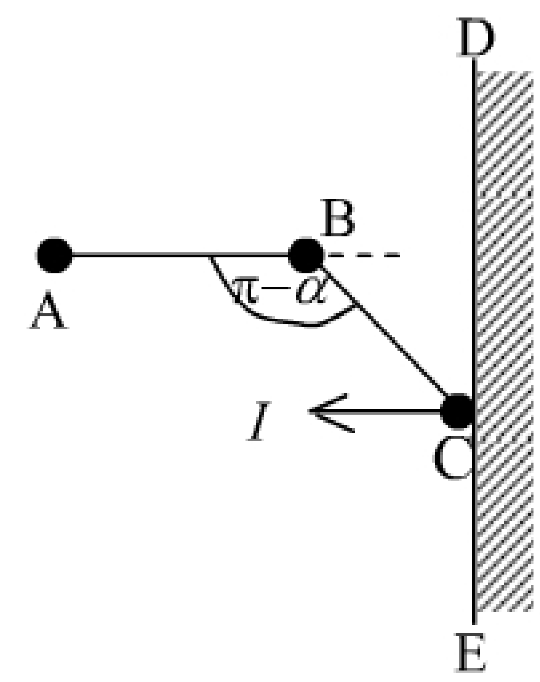
代入 (10) 式得

$$U_A=kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2ra\cos\theta+a^2}}-\frac{R}{\sqrt{a^2r^2-2raR^2\cos\theta+R^4}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{r^2+2ra\cos\theta+a^2}}-\frac{R}{\sqrt{a^2r^2+2raR^2\cos\theta+R^4}}\right) \tag{11}$$

评分标准：

本题 20 分．第 1 问 18 分，解法 I 中(1)、(2)、(6)、(7)、(8)、(9) 式各 3 分．解法Ⅱ的评分可参考解法 I．第 2 问 2 分，即(11)式 2 分．

六、令 I 表示题述极短时间Δt 内挡板对 C 冲量的大小，因为挡板对 C 无摩擦力作用，可知冲量的方向垂直于 DE，如图所示；I' 表示 B、C 间的杆对 B 或 C 冲量的大小，其方向沿杆方向，对 B 和 C 皆为推力；$v_{C\parallel}$ 表示Δt 末了时刻 C 沿平行于 DE 方向速度的大小，$v_{B\parallel}$ 表示Δt 末了时刻 B 沿平行于 DE 方向速度的大小，$v_{B\perp}$ 表示Δt 末了时刻 B 沿垂直于 DE 方向速度的大小．由动量定理，



对 C 有

$$I'\sin\alpha=mv_{C\parallel} \tag{1}$$
$$I-I'\cos\alpha=mv \tag{2}$$

对 B 有

$$I'\sin\alpha=mv_{B\parallel} \tag{3}$$

对 AB 有

$$I'\cos\alpha=2m(v-v_{B\perp}) \tag{4}$$

因为 B、C 之间的杆不能伸、缩，因此 B、C 沿杆的方向的分速度必相等．故有

$$v_{C\parallel}\sin\alpha=v_{B\perp}\cos\alpha-v_{B\parallel}\sin\alpha \tag{5}$$

由以上五式，可解得

$$I=\frac{3+\sin^2\alpha}{1+3\sin^2\alpha}mv \tag{6}$$

评分标准：

本题 20 分． (1)、(2)、(3)、(4)式各 2 分． (5)式 7 分，(6)式 5 分．

七、解法Ⅰ：

当金属杆 ab 获得沿 x 轴正方向的初速 v_0 时，因切割磁力线而产生感应电动势，由两金属杆与导轨构成的回路中会出现感应电流．由于回路具有自感系数，感应电流的出现，又会在回路中产生自感电动势，自感电动势将阻碍电流的增大，所以，虽然回路的电阻为零，但回路的电流并不会趋向无限大，当回路中一旦有了电流，磁场作用于杆 ab 的安培力将使 ab 杆减速，作用于 cd 杆的安培力使 cd 杆运动．

设在任意时刻 t，ab 杆和 cd 杆的速度分别为 v_1 和 v_2（相对地面参考系 S），当 v_1、v_2 为正时，表示速度沿 x 轴正方向；若规定逆时针方向为回路中电流和电动势的正方向，则因两杆作切割磁力线的运动而产生的感应电动势

$$\mathcal{E} = Bl(v_1 - v_2) \tag{1}$$

当回路中的电流 i 随时间的变化率为 $\Delta i/\Delta t$ 时，回路中的自感电动势

$$\mathcal{E}_L = -L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{2}$$

根据欧姆定律，注意到回路没有电阻，有

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = 0 \tag{3}$$

金属杆在导轨上运动过程中，两杆构成的系统受到的水平方向的合外力为零，系统的质心作匀速直线运动．设系统质心的速度为 V_C，有

$$mv_0 = 2mV_C \tag{4}$$

得

$$V_C = \frac{v_0}{2} \tag{5}$$

V_C 方向与 v_0 相同，沿 x 轴的正方向．

现取一新的参考系 S'，它与质心固连在一起，并把质心作为坐标原点 O'，取坐标轴 $O'x'$ 与 x 轴平行．设相对 S' 系，金属杆 ab 的速度为 u，cd 杆的速度为 u'，则有

$$v_1 = V_C + u \tag{6}$$

$$v_2 = V_C + u' \tag{7}$$

因相对 S' 系，两杆的总动量为零，即有

$$mu + mu' = 0 \tag{8}$$

由(1)、(2)、(3)、(5)、(6) 、(7) 、(8)各式，得

$$2Blu = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{9}$$

在 S' 系中，在 t 时刻，金属杆 ab 坐标为 x'，在 $t+\Delta t$ 时刻，它的坐标为 $x' + \Delta x'$，则由速度的定义

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \tag{10}$$

代入 (9) 式得

$$2Bl\Delta x' = L\Delta i \tag{11}$$

若将 x' 视为 i 的函数，由（11）式知 $\Delta x'/\Delta i$ 为常数，所以 x' 与 i 的关系可用一直线方程表示

$$x' = \frac{L}{2Bl}i + b \tag{12}$$

式中 b 为常数，其值待定．现已知在 $t=0$时刻，金属杆 ab 在 S' 系中的坐标 $x'=\frac{1}{2}x_0$，这时 $i=0$，故得

$$x'=\frac{L}{2Bl}i+\frac{1}{2}x_0 \tag{13}$$

或

$$i=\frac{2Bl}{L}\left(x'-\frac{1}{2}x_0\right) \tag{14}$$

$\frac{1}{2}x_0$ 表示 $t=0$时刻金属杆 ab 的位置．x' 表示在任意时刻 t，杆 ab 的位置，故$\left(x'-\frac{1}{2}x_0\right)$就是杆 ab 在 t 时刻相对初始位置的位移，用 X 表示，

$$X=x'-\frac{1}{2}x_0 \tag{15}$$

当 $X>0$ 时，ab 杆位于其初始位置的右侧；当 $X<0$ 时，ab 杆位于其初始位置的左侧．代入(14)式，得

$$i=\frac{2Bl}{L}X \tag{16}$$

这时作用于 ab 杆的安培力

$$F=-iBl=-\frac{2B^2l^2}{L}X \tag{17}$$

ab 杆在初始位置右侧时，安培力的方向指向左侧；ab 杆在初始位置左侧时，安培力的方向指向右侧，可知该安培力具有弹性力的性质．金属杆 ab 的运动是简谐振动，振动的周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(2B^2l^2/L\right)}} \tag{18}$$

在任意时刻 t， ab 杆离开其初始位置的位移

$$X=A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \tag{19}$$

A 为简谐振动的振幅，φ 为初相位，都是待定的常量．通过参考圆可求得 ab 杆的振动速度

$$u=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right) \tag{20}$$

(19)、(20)式分别表示任意时刻 ab 杆离开初始位置的位移和运动速度．现已知在 $t=0$ 时刻，ab 杆位于初始位置，即

$$X=0$$

速度

$$u=v_0-V_C=v_0-\frac{1}{2}v_0=\frac{1}{2}v_0$$

故有

$$0=A\cos\varphi$$

$$\frac{v_0}{2}=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\varphi$$

解这两式，并注意到(18)式得

$$\varphi=3\pi/2 \tag{21}$$

$$A=\frac{v_0}{4\pi}T=\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}} \tag{22}$$

由此得 ab 杆的位移

$$X=\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{23}$$

由 (15) 式可求得 ab 杆在 S' 系中的位置

$$x'_{\mathrm{ab}}=\frac{1}{2}x_0+\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{24}$$

因相对质心，任意时刻 ab 杆和 cd 杆都在质心两侧，到质心的距离相等，故在 S' 系中，cd 杆的位置

$$x'_{\mathrm{cd}}=-\frac{1}{2}x_0-\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t \tag{25}$$

相对地面参考系 S，质心以 $V_C=\frac{1}{2}v_0$ 的速度向右运动，并注意到（18）式，得 ab 杆在地面参考系中的位置

$$x_{\mathrm{ab}}=x_0+\frac{1}{2}v_0t+\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{26}$$

cd 杆在 S 系中的位置

$$x_{\mathrm{cd}}=\frac{1}{2}v_0t-\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{27}$$

回路中的电流由 (16) 式得

$$i=\frac{2Bl}{L}\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\frac{2\pi}{T}t=v_0\sqrt{\frac{m}{2L}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{28}$$

解法Ⅱ：

当金属杆在磁场中运动时，因切割磁力线而产生感应电动势，回路中出现电流时，两金属杆都要受到安培力的作用，安培力使 ab 杆的速度改变，使 cd 杆运动．设任意时刻 t，两杆的速度分别为 v_1 和 v_2（相对地面参考系 S），若规定逆时针方向为回路电动势和电流的正方向，则由两金属杆与导轨构成的回路中，因杆在磁场中运动而出现的感应电动势为

$$E=Bl(v_1-v_2) \tag{1'}$$

令 u 表示 ab 杆相对于 cd 杆的速度，有

$$E_L=Blu \tag{2'}$$

当回路中的电流 i 变化时，回路中有自感电动势 E_L，其大小与电流的变化率成正比，即有

$$E_L=-L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{3'}$$

根据欧姆定律，注意到回路没有电阻，有

$$E+E_L=0$$

由式(2')、(3')两式得

$$Blu = L\frac{\Delta i}{\Delta t} \tag{4'}$$

设在 t 时刻，金属杆 ab 相对于 cd 杆的距离为 x'，在 $t+\Delta t$ 时刻，ab 相对于 cd 杆的距离为 $x'+\Delta x'$，则由速度的定义，有

$$u = \frac{\Delta x'}{\Delta t} \tag{5'}$$

代入（4′）式得

$$Bl\Delta x' = L\Delta i \tag{6'}$$

若将 x' 视为 i 的函数，由(6′)式可知，$\Delta x'/\Delta i$ 为常量，所以 x' 与 i 的关系可以用一直线方程表示，即

$$x' = \frac{L}{Bl}i + b \tag{7'}$$

式中 b 为常数，其值待定．现已知在 $t=0$时刻，金属杆 ab 相对于 cd 杆的距离为 x_0，这时 $i=0$，故得

$$x' = \frac{L}{Bl}i + x_0 \tag{8'}$$

或

$$i = \frac{Bl}{L}\left(x' - x_0\right) \tag{9'}$$

x_0 表示 $t=0$时刻金属杆 ab 相对于 cd 杆的位置．x' 表示在任意时刻 t 时 ab 杆相对于 cd 杆的位置，故 $\left(x'-x_0\right)$ 就是杆 ab 在 t 时刻相对于 cd 杆的相对位置相对于它们在 $t=0$时刻的相对位置的位移，即从 $t=0$到 $t=t$ 时间内 ab 杆相对于 cd 杆的位移

$$X = x' - x_0 \tag{10'}$$

于是有

$$i = \frac{Bl}{L}X \tag{11'}$$

任意时刻 t，ab 杆和 cd 杆因受安培力作用而分别有加速度 a_{ab} 和 a_{cd}，由牛顿定律有

$$-iBl = ma_{\text{ab}} \tag{12'}$$

$$iBl = ma_{\text{cd}} \tag{13'}$$

两式相减并注意到(9′)式得

$$m\left(a_{\text{ab}} - a_{\text{cd}}\right) = -2iBl = -\frac{2B^2l^2}{L}X \tag{14'}$$

式中 $\left(a_{\text{ab}} - a_{\text{cd}}\right)$ 为金属杆 ab 相对于 cd 杆的加速度，而 X 是 ab 杆相对 cd 杆相对位置的位移．$\dfrac{2B^2l^2}{L}$ 是常数，表明这个相对运动是简谐振动，它的振动的周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(2B^2l^2/L\right)}} \tag{15'}$$

在任意时刻 t，ab 杆相对 cd 杆相对位置相对它们初始位置的位移

$$X = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \tag{16'}$$

A 为简谐振动的振幅，φ 为初相位，都是待定的常量．通过参考圆可求得 X 随时间的变化率即速度

$$V = A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{T} + \varphi\right) \tag{17'}$$

现已知在 $t=0$ 时刻，杆位于初始位置，即 $X=0$，速度 $V=v_0$

故有

$$0=A\cos\varphi$$

$$v_0=-A\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sin\varphi$$

解这两式，并注意到(15’) 式得

$$\varphi=3\pi/2$$

$$A=\frac{v_0}{2\pi}T=\frac{v_0}{Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}$$

由此得

$$X=\frac{v_0}{Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{v_0}{Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{18'}$$

因 $t=0$ 时刻，cd 杆位于 $x=0$ 处，ab 杆位于 $x=x_0$ 处，两者的相对位置由 x_0 表示；设 t 时刻，cd 杆位于 $x=x_{cd}$ 处，ab 杆位于 $x=x_{ab}$ 处，两者的相对位置由 $x_{ab}-x_{cd}$ 表示，故两杆的相对位置的位移又可表示为

$$X=x_{ab}-x_{cd}-x_0 \tag{19'}$$

所以

$$x_{ab}-x_{cd}=x_0+\frac{v_0}{Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{20'}$$

(12’)和(13’)式相加，

$$m\left(a_{ab}+a_{cd}\right)=-iBl+iBl=0$$

得

$$\left(a_{ab}+a_{cd}\right)=0$$

由此可知，两杆速度之和为一常数即 v_0，所以两杆的位置 x_{ab} 和 x_{cd} 之和应为

$$x_{ab}+x_{cd}=x_0+v_0t \tag{21'}$$

由(20’)和(21’)式相加和相减，注意到(15’)式，得

$$x_{ab}=x_0+\frac{1}{2}v_0t+\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{22'}$$

$$x_{cd}=\frac{1}{2}v_0t-\frac{v_0}{2Bl}\sqrt{\frac{mL}{2}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{23'}$$

由(11’)、（19’）(22’)、(23’)式得回路中电流

$$i=v_0\sqrt{\frac{m}{2L}}\sin\left(Bl\sqrt{\frac{2}{mL}}\right)t \tag{24'}$$

评分标准：本题 25 分．

解法Ⅰ 求得(16)式 8 分，(17)、(18)、(19)三式各 2 分． (23)式 4 分，(24)、(25)二式各 2 分，(26)、(27)、(28)三式各 1 分．

解法Ⅱ的评分可参照解法Ⅰ评分标准中的相应式子给分.