

精解第 27 届全国中学生物理竞赛预赛试卷

一、选择题。本题共 7 小题，每小题 6 分，每小题给出的 4 个选项中，有的小题只有一项是符合题意的，有的小题有多项是符合题意的，把符合题意的选项前面的英文字母写在每小题后面的方括号内，全部选对的得 6 分，选对但不全的得 3 分，有选错或不答的得 0 分。

1. 若质点做直线运动的速度 v 随时间 t 变化的图线如图 1 所示，则质点的位移 s (从 $t=0$ 开始) 随时间 t 变化的图线可能是图 2 中的哪一个？

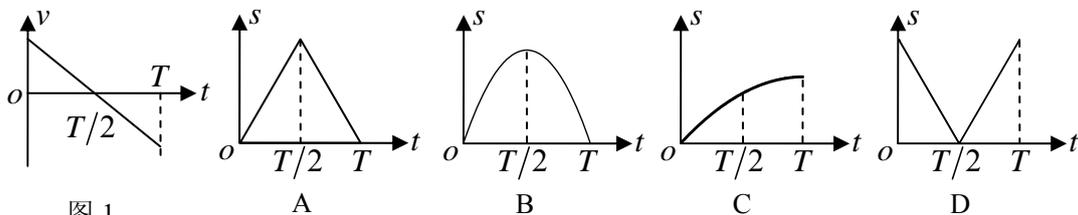


图 1

图 2

[]

解 1: 由图 1 可知质点做匀变速直线运动，在时间 T 内，设质点初速度为 v_0 ，加速度为 a ，易知 a 的方向与 v_0 方向相反。以初速度方向为正方向，由匀变速直线运动的位移时间公式可得 $s = v_0 t + 0.5 a t^2$ ，即是 $s(t) = (0.5 a) t^2 + v_0 t$ ，显然，(1)位移 s 是时间 t 的二次函数，是抛物线；因为以 v_0 方向为正方向时，位移公式中的加速度 a 应为负值，(2)所以函数 $s(t)$ 开口方向向下；另外，由 $v-t$ 图像中面积与位移的关系可知，(3)质点在时间 T 的末时刻位移为零。综上三点可知，B 选项正确。

参考答案：B.

2. 烧杯内盛有 0°C 的水，一块 0°C 的冰浮在水面上，水面正好在杯口处，最后冰全部熔解成 0°C 的水，在这个过程中

- A. 无水溢出杯口，但最后水面下降了
- B. 有水溢出杯口，但最后水面仍在杯口处
- C. 无水溢出杯口，水面始终在杯口处
- D. 有水溢出杯口，但最后水面低于杯口

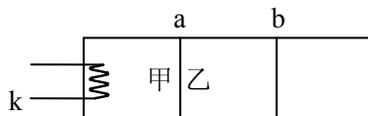
[]

解 2: 冰块浮在水面上保持静止时，冰块受到的重力 $m_{\text{冰}} g$ 等于冰块受到的浮力 $\rho_{\text{水}} g v_{\text{排}} = (\rho_{\text{水}} v_{\text{排}}) g = m_{\text{水,排}} g$ ，可见，冰块的质量等于冰块排开水的质量，所以，冰块全部熔解成 0°C 的水后的体积，正好等于冰块未熔解时排开水的体积，这样，冰块未熔解时排开水的体积正好被熔解后的水的体积完全填充，所以冰在熔解过程中水面高度不变。

参考答案：C.

3. 如图所示，a 和 b 是绝热气缸内的两个活塞，它们把气缸分成甲和乙两部分，两部分中都封有等量的理想气体。a 是导热的，其热容量可不计，与气缸壁固连；b 是绝热的，可在气缸内无摩擦滑动，但不漏气，其右方为大气。图中 k 为加热用的电炉丝，开始时，系统处于平衡状态，两部分中气体的温度和压强皆相同。现接通电源，缓慢加热一段时间后停止加热，系统又达到新的平衡。则

- A. 甲、乙中气体的温度有可能不变
- B. 甲、乙中气体的压强都增加了
- C. 甲、乙中气体的内能的增加量相等
- D. 电炉丝放出的总热量等于甲、乙中气体增加内能的总和



[]

解 3: 题设中明确了甲、乙中封的气体是等量的，且 a 是导热的，b 是绝热的，所以，加热后再次达到新的平衡时，(1)甲、乙中气体的温度一定相同(a 是导热)，另外，由热力学第二定律(不可能从单一热源吸取热量，使之完全变为有用的功而不产生其它影响。简而

言之：在两个孤立系统之间传递的热量不可能完全变为机械功)可知，由甲乙组成的系统在吸收了电炉丝传来的热量后，这一总热量必然有一部分用来增加了系统的内能，(2)使得甲乙中的气体温度升高(故 A 选项错误)(由(1)和(2)可知，甲、乙中气体的内能的增加量相等，C 选项正确)，另一部分则通过 b 活塞对外做功。所以，电炉丝放出的总热量等于甲、乙中气体增加内能的总和再加上 b 活塞对外界大气所做的功，故 D 选项错误；因 b 活塞可在气缸内无摩擦滑动，故乙中气体的压强始终等于外界大气压强，故 B 选项错误。

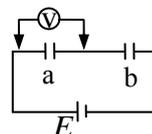
参考答案：C。

4. 一杯水放在炉上加热烧开后，水面上方有“白色气”；夏天一块冰放在桌面上，冰的上方也有“白色气”。
- A. 前者主要是由杯中水变来的“水的气态物质”
 B. 前者主要是由杯中水变来的“水的液态物质”
 C. 后者主要是由冰变来的“水的气态物质”
 D. 后者主要是由冰变来的“水的液态物质” []

解 4：水面上方的“白色气”是杯中水蒸发而来的液态小水滴，而冰上方的“白色气”是冰上方的气态水分子液化凝结而来的小水滴。

参考答案：B。

5. 如图所示，电容量分别为 C 和 $2C$ 的两个电容器 a 和 b 串联接在电动势为 E 的电池两端充电，达到稳定后，如果用多用电表的直流电压档 V 接到电容器 a 的两端(如图)，则电压表的指针稳定后的读数是



- A. $E/3$ B. $2E/3$ C. E D. 0 []

解 5：利用直流电压档来测量电容器两端的电压时，因为电容器在“测量回路”中处于断路状态，所以“测量回路”中不可能有“测量电流”通过表头，所以电压表的读数为零。

参考答案：D。

6. 已知频率为 ν 、波长为 λ 的光子的能量 $E = h\nu$ ，动量 $P = h/\lambda$ ，式中 h 为普朗克常量，则光速 c 可表示为
- A. P/E B. E/P C. EP D. E^2/P^2 []

解 6： $E = h\nu = h \frac{1}{T} = h \left(\frac{\lambda}{T} \right) \frac{1}{\lambda} = hc \frac{1}{\lambda} = c \left(\frac{h}{\lambda} \right) = cp \Rightarrow c = \frac{E}{p}$ ，B 选项正确。

参考答案：B。

7. 某种核 X 经过 α 衰变后变为核 Y，再经过 β 衰变后变为核 Z，即 ${}^a_bX \xrightarrow{\alpha} {}^c_dY \xrightarrow{\beta} {}^e_fZ$ ，下列关系中正确的是
- A. $a = e + 4$ B. $c = e$ C. $d = f - 1$ D. $b = f + 2$ []

解 7： α 衰变一般表示为 ${}^a_bX \rightarrow {}^{a-4}_{b-2}Y + {}^4_2\text{He}$ ，即 ${}^a_bX \rightarrow {}^{a-4}_{b-2}Y + \alpha$ ，故在 ${}^a_bX \rightarrow {}^c_dY$ 中有 $c = a - 4$ ， $d = b - 2$ (1)；

β 衰变是核电荷改变而核子数不变的核衰变，它主要包括三大类型，即是 β^- 衰变， β^+ 衰变和轨道电子俘获(EC)。

β^- 衰变一般表示为 ${}^c_dY \xrightarrow{\beta^-} {}^c_{d+1}Z + e^- + \bar{\nu}_e$ ($\bar{\nu}_e$ 表示反中微子)，故在 ${}^c_dY \xrightarrow{\beta^-} {}^e_fZ$ 中有 $c = e$ ， $f = d + 1$ (2)；

β^+ 衰变一般表示为 ${}^c_dY \xrightarrow{\beta^+} {}^c_{d-1}Z + e^+ + \nu_e$ (ν_e 表示中微子)，故在 ${}^c_dY \xrightarrow{\beta^+} {}^e_fZ$ 中有 $c = e$ ， $f = d - 1$ (3)；

轨道电子俘获一般表示为 ${}^c_d\text{Y} + e^- \xrightarrow{\text{EC}} {}^c_{d-1}\text{Z} + \nu_e$ (e^- 表示原子核从第 k 层轨道上俘获的电子, ν_e 表示中微子), 故在 ${}^c_d\text{Y} \xrightarrow{\text{EC}} {}^e_f\text{Z}$ 中有

$$c = e, f = d - 1 \quad (4);$$

由以上(1)–(4)四式可知选项 **A** 和 **B** 正确; $d = f - 1$ 或 $d = f + 1$, 故选项 **C** 错误; $b = f + 1$ 或 $b = f + 3$, 故选项 **D** 错误。

参考答案: **A, B.**

二、填空题。把答案填在题中的横线上或题中指定的地方。只要给出结果, 不需要写出求得结果的过程。

8. (12 分)选择合适的卫星发射地发射卫星, 对提高运载效率、节省燃料等方面都有影响(特别是对同步卫星的发射)。

如果在地球表面纬度为 φ 处发射一颗绕地球表面运行的人造卫星, 假设地球可视为质量均匀分布的球体, 已知地球自转的角速度为 ω , 地球半径为 R , 地球表面处的重力加速度为 g , 卫星质量为 m , 则至少要给卫星的能量为_____。

设重力加速度 $g=9.80\text{m/s}^2$, 地球半径 $R=6.40\times 10^6\text{m}$, 卫星质量 $m=1.00\times 10^3\text{kg}$, 若发射地在酒泉, 其纬度为北纬 40 度 58 分, 则所需的能量为_____J; 若发射地在文昌, 其纬度为北纬 19 度 19 分, 则所需的能量为_____J。

解 8: 在地心参考系中, 对于在地表附近环绕的卫星, 由 $F_{\text{引}}=F_{\text{向}}$ 可得: $GMm/R^2 = mv^2/R$,

即得 $v = \sqrt{GM/R}$ (1), 另外, 由 $F_{\text{引}}=mg$ 可得: $GMm/R^2 = mg$, 即得 $GM = gR^2$ (2),

由(1)和(2)可得 $v = \sqrt{gR}$ (3)。

在发射卫星时, 因为地球自转而使得卫星相对地心参考系存在某一初速度 $v_0 = \omega R \cos \varphi$,

所以, 当沿着地球自转的方向发射时耗能最少, 这时, 只需要在初速度 $v_0 = \omega R \cos \varphi$ 的

基础上加速到 $v = \sqrt{gR}$, 卫星就能在地表附近绕地球运行。这时, 所消耗的最小能量为

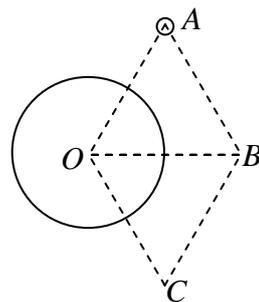
$E = \frac{1}{2}m(\sqrt{gR} - \omega R \cos \varphi)^2$; 当发射地纬度为北纬 40 度 58 分时, 把 $m=1.00\times 10^3\text{kg}$,

$g=9.80\text{m/s}^2$, $R=6.40\times 10^6\text{m}$, $\omega = \frac{2\pi}{24\times 3600}\text{rad/s}$, $\varphi = 40^\circ + \left(\frac{58}{60}\right)^\circ$ 代入 E 的表达式

计算可得 $E=2.86\times 10^{10}\text{J}$, 同理, 当发射地纬度为北纬 19 度 19 分时, $E=2.80\times 10^{10}\text{J}$ 。

参考答案: $0.5m(\sqrt{gR} - \omega R \cos \varphi)^2$ (6 分); 2.86×10^{10} (3 分); 2.80×10^{10} (3 分)。

9. (18 分)图中所示为一球心在 O 点的不带电的固定的导体球, A 、 B 、 C 是球外三点, 与球心 O 在同一平面内, 三点的位置使 OAB 和 OBC 皆为等边三角形。当把一表面均匀带正电的塑料小球的球心放在点 A 时(如图所示), 已知此时 A 、 B 、 C 三点的电势分别为 U_A 、 U_B 、 U_C 。现把另外两个与放在 A 点的小球完全相同的带正电的塑料小球的球心分别放在 B 点和 C 点, 已知导体球上感应电荷的分布可看作是各塑料小球单独存在时所产生感应电荷分布



的叠加。此时， BA 两点间的电势差 $U'_B - U'_A =$ _____， BC 两点间的电势差 $U'_B - U'_C =$ _____， AC 两点间的电势差 $U'_A - U'_C =$ _____。如果在上面的情况下，把导体球移到电场以外，则 BA 两点间的电势差将(填增大、减小或不变)_____， BC 两点间的电势差将(填增大、减小或不变)_____， AC 两点间的电势差将(填增大、减小或不变)_____。

解 9: 题设间接强调了电势的叠加原理(由多个点电荷组成的系统，其电场中某点的电势等于各个点电荷单独存在时的电场在该点电势的代数和)。由题设，放在 A 处的带电小球与因该带电小球而具有一定电荷分布的导体球在 A 处产生的电势为 U_A ，在 B 处产生的电势为 U_B ，在 C 处产生的电势为 U_C 。同理，由对称性和叠加原理可得如图 9-2 所示结果。

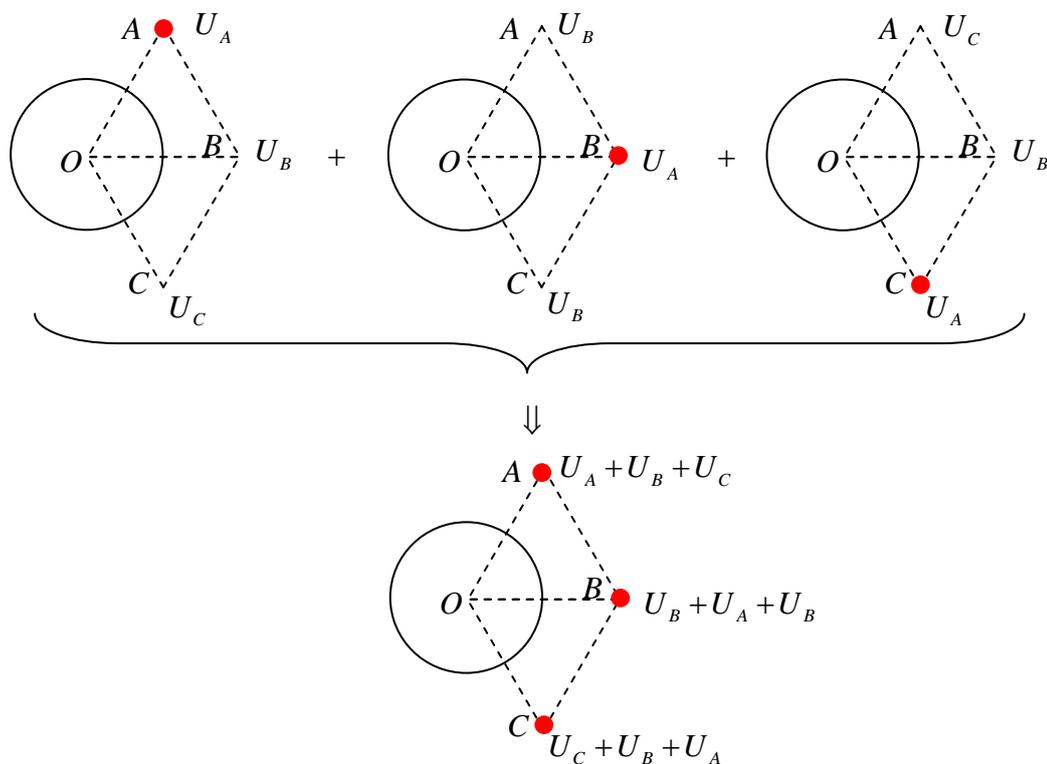


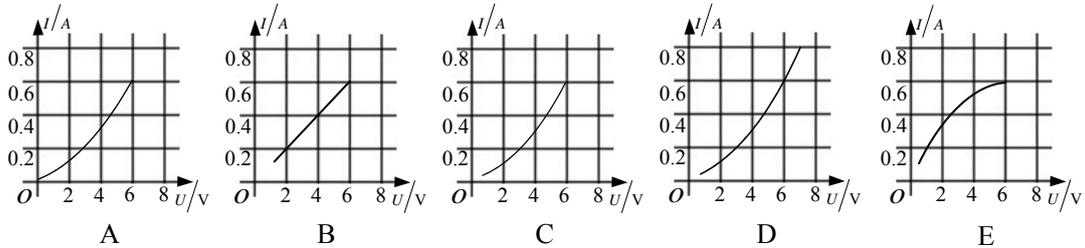
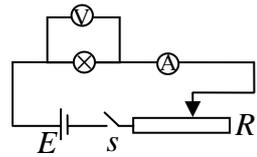
图 9-2

由图 9-2 可得 i、ii 和 iii 三条可得 $U'_B - U'_A = U_B - U_C$ ， $U'_B - U'_C = U_B - U_C$ ， $U'_A - U'_C = 0$ 。

没有把导体球移走时，导体球上正电荷主要集中在左侧，负电荷主要集中在右侧，而导体球左侧(正电荷)到 A 点的距离小于到 B 的距离，右侧(负电荷)到 A 点的距离大于到 B 点的距离，所以，未移走导体球时，导体球上的全部感应电荷在 A 点贡献的电势大于在 B 点贡献的电势，所以，当移走导体球后， BA 两点间的电势差 $U''_B - U''_A$ 将增大；同理， BC 两点间的电势差 $U''_B - U''_C$ 也将增大；由对称性可知导体球的电荷分布对 A 与 C 两点的电势贡献相同，所以移走导体球后 AC 两点间的电势差 $U''_A - U''_C$ 不变(还是等于零的)。

参考答案: $U_B - U_C$ (4分); $U_B - U_C$ (4分); 0 (4分); 增大(2分); 增大(2分); 不变(2分)。

10. (10分)用题图所示电路测得的数据可画出小灯泡的伏安特性图线。小灯泡L的额定功率为3.6W，额定电压为6V，电源E的电动势为10V，内阻忽略不计。滑动电阻器R的全电阻约为200Ω。通过调节滑动变阻器，可以调节通过L的电流，电流I由电流表A读出，灯泡两端的电压U由电压表V读出。根据测量数据可在方格纸上画出在测量范围内小灯泡灯丝的伏安特性图线，所画出的图线可能是下图中的哪一个？答：_____ (用图线下面的英文字母表示)



参考答案: C (10分)

11. (12分)图1中的M、N为处在匀强磁场中的两条位于同一水平面内的平行长导轨，一端串联电阻R，磁场沿竖直方向。ab为金属杆，可在导轨上无摩擦滑动，滑动时保持与导轨垂直。杆和导轨的电阻都不计。现于导轨平面内沿垂直于ab方向对杆施一恒力F，使杆从静止出发向右运动。在以后的过程中，杆速度的大小v、加速度的大小a、力F冲量的大小I、以及R上消耗的总能量E随时间t变化的图线，分别对应于图2中哪一条图线？把代表该物理量的符号填在你所选定图线纵坐标处的方框中。

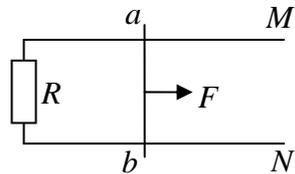
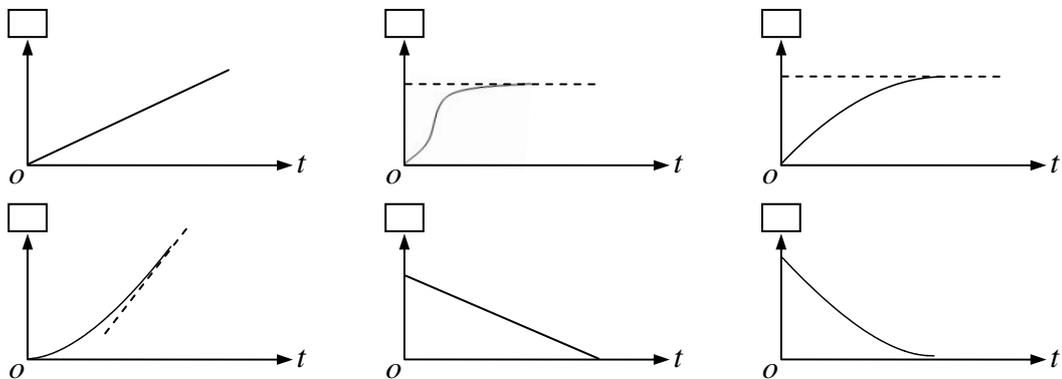


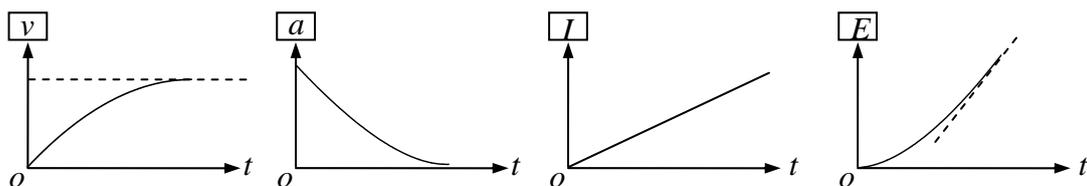
图-1



解 11: 由安培力公式可知 $F_{安} = BIL = BL\varepsilon/R$ ，由动生电动势公式可知 $\varepsilon = BLv$ ，故 $F_{安}(v) = B^2L^2v/R$ ；对金属杆 ab，由牛顿第二定律有 $F - F_{安} = ma$ ，即是 $F - B^2L^2v/R = ma$ (1)，由(1)式可知，金属杆 ab 运动的模型类似于雨滴下落的模型，它是加速度逐渐减小至零而速度逐渐增大至某最大值的运动模型，还可由(1)式知道， $v(t)$ 与 $a(t)$ 的函数关系是类似的，其曲线类型相同，仅数值和方向不相同，所以可以看出题设中的上排第三个图应为 $v-t$ 图像，下排第三个图应为 $a-t$ 图像。

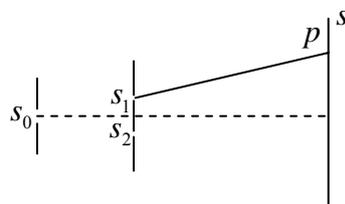
由冲量的定义 $I = Ft$ 可得，力 F 冲量的大小 $I(t) = Ft$ ，因 F 是恒力，故 I 是 t 的一次函数，所以 I-t 图像应为题设图像中上排的第一个图；R 上消耗的总能量 E 等于电流通过电阻 R 所做的功，即是 $E(t) = UIt = (BLv)(BLv/R)t = B^2L^2 [v(t)]^2 t/R$ ，显然，E 是 t 的增函数，且当 v 增大到最大值 v_m ， v_m 将是某一恒定值，这之后 E 是 t 的一次函数，所以 E-t 图像应为题设图像中下排的第一个图。

参考答案: (答对每个图得 3 分).



12. (9 分)右图为“用双缝干涉测量光的波长”实验装置的示意图。

图中 s_0 为狭缝, s_1 、 s_2 为双狭缝, s 为观察屏。当用单色光(以 λ 表示其波长)从左方照射狭缝 s_0 时, 由双缝 s_1 、 s_2 射出的光是相干光, 可在观察屏 s 上出现明暗相间的干涉条纹。若屏 s 上的 p 点是某一暗条纹的中心, 已知 p 点到缝 s_1 的距离为 r_1 , 则 p 点到缝 s_2 的距离 $r_2 =$ _____。为了求出波长 λ , 实验中应测量的物理量是 _____。



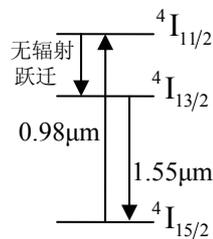
若实验装置中的单缝、双狭缝和屏的位置都不变, 只是入射光第一次为红光, 第二次为蓝光, 则第二次观察到的干涉条纹与第一次比, 不同之处除了条纹的颜色外, 还有 _____。

解 12: 双缝到暗条纹中心的光程差必为相干光半波长的整数倍, 故 $r_2 = r_1 + (k + 0.5)\lambda$, $k=0,1,2,3\cdots$; 由干涉条纹间距公式 $\Delta y = \lambda D/d$ (相邻亮条纹或暗条纹的间距)可知, 为了求出波长 λ , 实验中应测量的物理量还有狭缝 s_1 中心到狭缝 s_2 中心的距离 d 、观察屏到双缝的距离 D 和相邻亮条纹或暗条纹的间距 Δy ; 由 $\Delta y = \lambda D/d$ 可知, 其它条件相同时, 红光干涉条纹的间距比绿光干涉条纹的间距大。

参考答案: $r_1 + (k + 0.5)\lambda$, $k=0,1,2\cdots$ (3 分); 狭缝 s_1 中心到狭缝 s_2 中心的距离 d 、观察屏到双缝的距离 D 和相邻亮条纹或暗条纹的间距 Δy (3 分); 条纹间距变小(3 分)。

13. (8 分)光通过光纤长距离传输时, 因损耗而要衰减, 故必须在途中设立“中继站”进行放大。现代采用直接放大即全光型放大, 它可使传输效率大大提高。其办法是在光纤中掺入铒。铒粒子的能级如图所示。

其中标为 ${}^4I_{13/2}$ 的能级是亚稳态能级, 粒子可以持续地处在该能级上一段时间而不立即向较低能级跃迁。我们可以用半导体激光器产生波长为 $0.98\mu\text{m}$ 的激光照射掺铒光纤, 使处于基态能级 ${}^4I_{15/2}$ 的粒子激发到标为 ${}^4I_{11/2}$ 的能级, 再通过“无辐射跃迁”跃迁到亚稳态能级 ${}^4I_{13/2}$, 从而使该能级积聚粒子数远超过处于基态的粒子数。当波长为 $1.55\mu\text{m}$ 的光波在掺铒的光纤中传输时, 能使大量处在亚稳态能级的粒子向基态跃迁, 发出波长为 $1.55\mu\text{m}$ 的光波, 于是输出的光便大大加强, 从而实现了全光型中继放大。若普朗克常量 h 与光速 c 的乘积 $hc=1.99\times 10^{-25}\text{J}\cdot\text{m}$, 则“无辐射跃迁”中一个铒粒子放出的能量等于 _____ J。



解 13: 粒子从高能级跃迁到低能级时要辐射光子, 其能量为 $\varepsilon = h\nu$ (ν 表示光子的频率),

即是 $\varepsilon = \frac{h}{T} = \frac{h\lambda}{\lambda T} = \frac{hc}{\lambda}$, 所以, 铒粒子从高能级 ${}^4I_{11/2}$ 跃迁到基态能级 ${}^4I_{15/2}$ 时辐射光子的

能量可以表示为 $\varepsilon_1 = \frac{hc}{\lambda_1}$, 铒粒子从较高能级 ${}^4I_{13/2}$ 跃迁到基态能级 ${}^4I_{15/2}$ 时辐射光子的能

量可以表示为 $\varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_2}$, “无辐射跃迁”过程是指铒粒子从能级 ${}^4I_{11/2}$ 跃迁到能级 ${}^4I_{13/2}$ 的

过程, 在该过程中辐射光子的能量可表示为 ε_3 , 由能量守恒可知, $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{hc}{\lambda_1} - \frac{hc}{\lambda_2}$,

代入数据计算可得 $\varepsilon_3 = 7.47 \times 10^{-20} \text{ J}$ (用公式 $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$ 还可进一步计算该光子的波长).

参考答案: 7.47×10^{-20} (8 分).

三、计算题。解答应写出必要的文字说明、方程式和重要的演算步骤。只写出最后结果的不能得分。有数值计算的, 答案中必须明确写出数值和单位。

14. (13 分) 假设把地球大气等效于一个具有一定厚度折射率均匀的透光气体球壳, 其折射率取 $n = 1.00028$, 把地球看作为圆球。当太阳在地球某处正上方时, 该处的观察者看太阳时的视角比太阳对观察者所在处的张角相差多少? 已知太阳半径 $R_s = 6.96 \times 10^8 \text{ m}$, 日地距离 $r_E = 1.50 \times 10^{11} \text{ m}$ 。

解 14: 如图 14-1 所示, 令太阳对观察者所在处的张角为 $2\theta_z$, 观察者看太阳时的视角为 $2\theta_s$, 太阳边缘发出的光线相对观察者眼睛的入射角为 θ_i , 地球厚度为 h 。

因 $r_E \gg R_s$, $r_E \gg h$, 故 θ_i 和 θ_s 均很小, 且有

$$\theta_i \doteq \theta_z, \quad (1)$$

由折射定律 $n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_s}$ 和极限 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = \theta$ 可得

$$n = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_s} \doteq \frac{\theta_i}{\theta_s}, \quad (2)$$

由(1)和(2)可得

$$n \doteq \frac{\theta_z}{\theta_s}, \quad (3)$$

又因 $\tan \theta_z = \frac{R_s}{r_E}$, $\lim_{\theta \rightarrow 0} \tan \theta = \theta$, 且 θ_z 很小, 故

$$\theta_z \doteq \frac{R_s}{r_E}, \quad (4)$$

由(3)和(4)可得

$$\theta_s \doteq \frac{R_s}{nr_E}, \quad (5)$$

所以, 观察者看太阳时的视角比太阳对观察者所在处的张角相差为

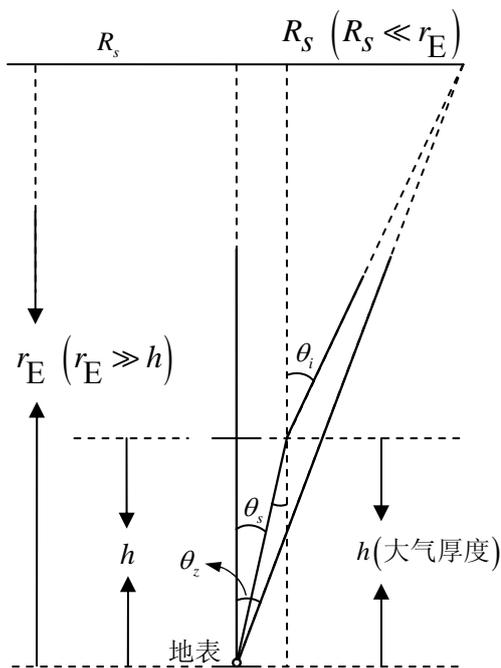


图 14-1

$$\Delta\theta = 2\theta_z - 2\theta_s = \frac{2R_s}{r_E} - \frac{2R_s}{nr_E}, \quad (6)$$

$$\text{即 } \Delta\theta = 2.5977 \times 10^{-6} \text{ rad}. \quad (7)$$

评分标准: (3)式 5 分, (4)式 4 分, (6)式 2 分, (7)式 2 分.

15. (18 分) 一劲度系数为 k 的轻质弹簧, 上端固定, 下端连一质量为 m 的物块 A , A 放在托盘 B 上, 以 N 表示 B 对 A 的作用力, x 表示弹簧的伸长量. 初始时全都静止, 弹簧处于自然状态, $x=0$. 现设法控制 B 的运动, 使 A 匀加速下降, 以 a 表示其加速度, 考察能保持 A 匀加速下降的整个过程.

i. 试求 N 随 x 变化的关系式, 并画出当 a 趋近于 0 和 a 等于 $0.5g$ 时 N 随 x 变化的图线 (g 为重力加速度).

ii. 求各种能量在所考察的整个过程中的终态值和初态值之差.

解 15: i. 依题意, 对物块 A , 在其匀加速下降的过程中,

以竖直向下为正方向, 由牛顿第二定律有

$$mg - N - kx = ma, \quad (1)$$

$$\text{即有 } N(x) = -kx + (mg - ma), \quad (2)$$

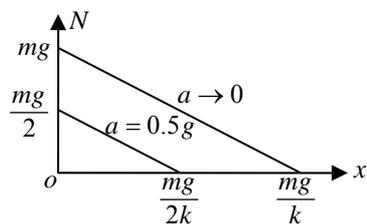


图 15-1

(2)式即是 N 随 x 变化的关系式, N 是关于 x 的一次函

数. a 趋近于 0 和 a 等于 $0.5g$ 时, 由(2)式可得它们的 N - x 图像如图 15-1 所示.

ii. 在物块 A 匀加速下降的整个过程中, 令弹簧弹性势能的增量为 $\Delta E_{p\text{弹}}$, 即有

$$\Delta E_{p\text{弹}} = E_{p\text{弹末}} - E_{p\text{弹初}}, \quad (3)$$

因 $E_{p\text{弹初}} = 0$, $E_{p\text{弹末}} = \frac{1}{2} k x_{\text{max}}^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{mg - ma}{k} \right)^2$, 故(在(2)式中, 当 $N = 0$ 时, x 取最大)

$$\Delta E_{p\text{弹}} = \frac{(mg - ma)^2}{2k}, \quad (4)$$

令在整个过程中重力势能的增量为 $\Delta E_{p\text{重}}$, 即有

$$\Delta E_{p\text{重}} = mg\Delta h = mg \left(-\frac{mg - ma}{k} \right), \quad (5)$$

$$\text{即 } \Delta E_{p\text{重}} = -\frac{m^2 g (g - a)}{k}, \quad (6)$$

令在整个过程中动能的增量为 ΔE_k , 即有

$$\Delta E_k = E_{k\text{末}} - E_{k\text{初}}, \quad (7)$$

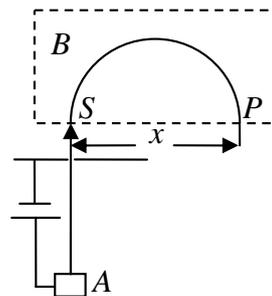
因 $E_{k初}=0$, $E_{k末}=\frac{1}{2}mv_{末}^2=\frac{1}{2}m\left[2\cdot a\cdot\left(\frac{mg-ma}{k}\right)\right]$, 故(也可用功能关系来求解)

$$\Delta E_k = \frac{m^2 a}{k}(g-a), \quad (8)$$

评分标准: 第 i 小问 10 分. (2)式 5 分; 图线正确(坐标正确且每条直线在坐标上的截距正确) 5 分。

第 ii 小问 8 分. (4)式 2 分; (6)式 2 分; (8)式 4 分。

16. (18 分) 在题图所示的装置中, 离子源 A 可提供速度很小的正离子(其速度可视为 0), 经加速电压加速后从 S 点进入匀强磁场, 磁场方向垂直纸面指向纸外, 虚线框为磁场区域的边界线。在磁场作用下, 离子沿半个圆周运动后射出磁场, 射出点 P 到 S 的距离用 x 表示。



i. 当离子源提供的是单一种类的第二种离子时, P 到 S 的距离为 x_1 ; 当离子源提供是单一种类的第二种离子时, P 到 S 的距离为 x_2 , 已知 $x_1/x_2 = \alpha$ 。试求这两种离子在磁场中运动时间 t_1 和 t_2 的比值 t_1/t_2 。

ii. 若离子源 A 提供是由 H^+ 、 D^+ 、 ${}^4He^+$ 和 H_2^+ 混合而成的多种离子, 又通过速度选择器使各种离子的速度都为 v , 当这些离子从 S 点进入匀强磁场后, 从磁场射出时可分离出哪几种离子束? 若 $v=2.0\times 10^6$ m/s, $B=0.50$ T, 基本电量 $e=1.60\times 10^{-19}$ C, 质子质量 $m_p=1.68\times 10^{-27}$ kg, 试求各种离子的射出点 P 到 S 的距离。

解 16: i. 依题意, 令加速电压为 u , 加速距离为 d , 电荷量为 q , 质量为 m , 进入磁场区域时的速度为 v , 匀强磁场的磁感应强度为 B , 由牛顿第二定律得

$$F_{合外}=Eq=\frac{uq}{d}=ma, \quad (1)$$

即得

$$a=\frac{uq}{dm}, \quad (2)$$

由匀变速直线运动的位移-速度关系 $v^2-v_0^2=2ax$ 可得

$$v=\sqrt{2u}\sqrt{q/m}, \quad (3)$$

离子在磁场中运动时, 由离子运动的半径公式 $R=\frac{mv}{qB}$ 、周期公式 $T=\frac{2\pi m}{qB}$ 和(3)式可得

$$T=\frac{\pi B}{u}R^2, \quad (4)$$

对于题设中的两种离子, 依题意有

$$\alpha = \left. \begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \frac{R_1}{R_2} \\ \frac{t_1}{t_2} &= \frac{T_1}{T_2} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

由(4)式和(5)式可得

$$\frac{t_1}{t_2} = \alpha^2, \quad (6)$$

ii. 依题意, 由离子运动的半径公式 $R = \frac{mv}{qB}$ 可知, 对于 $\frac{m}{q}$ 值相同的离子, 它们做匀速圆

周运动的半径相同, 属于同一束离子。

$$\left. \begin{array}{l} \text{对于H}^+: \frac{m}{q} = \frac{1}{1} = 1; \quad \text{对于D}^+: \frac{m}{q} = \frac{2}{1} = 2; \\ \text{对于}^4\text{He}^+: \frac{m}{q} = \frac{4}{1} = 4; \quad \text{对于H}_2^+: \frac{m}{q} = \frac{2}{1} = 2; \end{array} \right\}, \quad (7)$$

由(7)式可知, 混合离子从磁场射出时可分离出 3 种离子束, 分别是质子束、氦离子束、氘离子与氢分子离子混合而成的离子束。

由射出点 P 到 S 的距离 x 与离子运动的半径 $R = \frac{mv}{qB}$ 的关系 $x = 2R$ 可得

$$x = \frac{2v}{B} \cdot \frac{m}{q}, \quad (8)$$

由(8)式可得

$$x_{\text{H}^+} = \frac{2 \times 2.0 \times 10^6}{0.5} \cdot \frac{1 \times 1.68 \times 10^{-27}}{1.60 \times 10^{-19}} = 0.084(\text{m}), \quad (9)$$

同理, 把 D^+ 、 $^4\text{He}^+$ 和 H_2^+ 的质量、电量及 v 和 B 的值代入(8)式可得

$$x_{\text{D}^+} = 0.168(\text{m}), \quad (10)$$

$$x_{^4\text{He}^+} = 0.336(\text{m}), \quad (11)$$

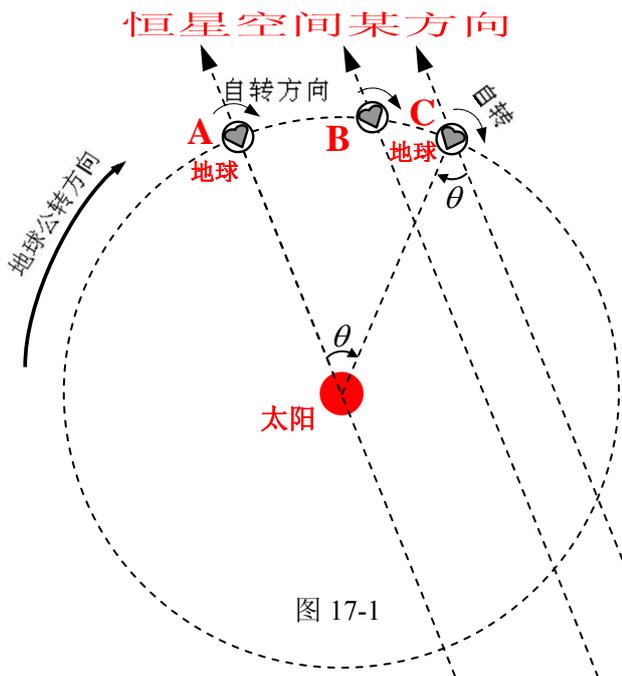
$$x_{\text{H}_2^+} = 0.168(\text{m}), \quad (12)$$

评分标准: 第 i 小问 10 分. (1)式 2 分; (3)式 2 分; (4)式 2 分; (5)式 2 分; (6)式 2 分;
第 ii 小问 8 分. (7)式及其结论 4 分; (9)式、(10)式、(11)式、(12)式各 1 分。

17. (20 分) 可以近似认为地球在一个半径为 R 的圆轨道上绕日公转, 取日心参考系为惯性系, 地球公转周期即一年为 $T=365.2564$ 日, 地球自转周期为 t . 地球上的人连续两次看见太阳在天空中同一位置的时间间隔 t_E 为一个太阳日, 简称一日, 即 24 小时. 假设有某种作用, 把地球绕日公转的圆轨道半径改变为 R' , 但未改变地球自转周期. 设经过这样改变后, 地球公转一个周期即新的一年刚好是 360 新日, 试问:

- i. 这新的一日的时间是多少小时(按改变前的小时计)?
- ii. 这新的一年应该是多少小时, 才能使得新的一年刚好是 360 新日?
- iii. 这个改变前后, 系统的能量差是地球现在公转动能的百分之多少?

解 17: i. 如图 17-1 所示, 地球从 A 位置公转至 B 位置时正好在恒星空间自转一周, 对应所花的时间即是地球自转的周期 t , 也称之为一个恒星日; 地球从 A 位置公转至 C 位置时, 地球上的人看到太阳在天空中同一位置, 对应所花的时间 t_E 称为一个太阳日; 研究地球的自转可以发现:



$$\begin{cases} t_E \xrightarrow{\text{对应地球自转}} 360^\circ + \frac{360^\circ}{365.2564} \\ t \xrightarrow{\text{对应地球自转}} 360^\circ \end{cases}$$

由比例关系可得

$$\frac{t_E}{t} = \frac{360^\circ + 360^\circ/365.2564}{360^\circ}, \text{ 即}$$

$$\frac{24}{t} = \frac{360^\circ + 360^\circ/365.2564}{360^\circ}, \quad (1)$$

地球绕日公转的圆轨道半径改变为 R' 后, 依题意, 同样研究地球的自转情况可以得到

$$\begin{cases} \text{新日 } t'_E \xrightarrow{\text{对应地球自转}} 360^\circ + \frac{360^\circ}{360} \\ t \xrightarrow{\text{对应地球自转}} 360^\circ (\text{自转周期不变}) \end{cases}, \text{ 有比例关系可得}$$

$$\frac{t'_E}{t} = \frac{360^\circ + 360^\circ/360}{360^\circ}, \quad (2)$$

联解(1)和(2)可得

$$t'_E = 24.000957\text{h}, \quad (3)$$

ii. 依题意, 新的一年有 360 个新日, 所以新的一年 T' 应该为

$$T' = 360t'_E, \quad (4)$$

代入(3)式后可得

$$T' = 8640.34452\text{h}, \quad (5)$$

iii. 令地球轨道半径改变前后系统的能量差与地球现在公转动能比值为 η , 依题意得

$$\eta = \frac{-\Delta E}{E_{kR'}} = \frac{E_R - E_{R'}}{E_{kR'}}, \quad (6)$$

因为 $E_R = -\frac{GMm}{2R}$, $E_{R'} = -\frac{GMm}{2R'}$, $E_{kR'} = \frac{GMm}{2R}$, 所以(6)式可以改写为

$$\eta = \frac{R}{R'} - 1, \quad (7)$$

由开普勒第三定律有

$$\frac{R'^3}{T'^2} = \frac{R^3}{T^2}, \quad (8)$$

即是

$$\frac{R}{R'} = \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3}, \quad (9)$$

把(9)代入(7)可得

$$\eta = \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3} - 1, \quad (10)$$

代入数据得

$$\eta = \left(\frac{365.2564 \times 24}{360 \times 24.000957}\right)^{2/3} - 1, \quad (11)$$

即得

$$\eta = 0.009684, \quad (12)$$

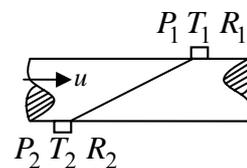
所以系统的能量差是地球现在公转动能的 0.9684%。

评分标准：第 i 小问 10 分。(1)式 4 分；(2)式 4 分；(3)式 2 分。

第 ii 小问 2 分。(5)式 2 分。

第 iii 小问 8 分。(6)式 2 分；(7)式 2 分；(9)式 2 分；(12)式 2 分。

18. (20 分)超声波流量计是利用液体流速对超声波传播速度的影响来测量液体流速，再通过流速来确定流量的仪器。一种超声波流量计的原理示意如图所示。在充满流动液体(管道横截面上各点流速相同)管道两侧外表面上 P_1 和 P_2 处(与管道轴线在同一平面内)，各置一个超声波脉冲发射器 T_1 、 T_2 和接收器 R_1 、 R_2 。位于 P_1 处的超声波脉冲发射器 T_1 向被测液体发射超声脉冲。当位于 P_2 处的接收器 R_2 接收到超声脉冲时，发射器 T_2 立即向被测液体发射超声脉冲。如果知道了超声脉冲从 P_1 传播到 P_2 所经历的时间 t_1 和超声脉冲从 P_2 传播到 P_1 所经历的时间 t_2 ，又知道了 P_1 、 P_2 两点的距离 l 以及 l 沿管道轴线的投影 b ，管道中液体的流速 u 便可求得。试求 u 。

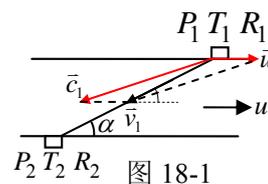


解 18：声波的波速是指声波在媒质中的传播速度，即是指声波相对于媒质的速度，如果媒质是相对地面以某速度运动的，则声波相对于地面的速度将是上述两种速度的矢量叠加。如图 18-1 所示，发射器 T_1 发射的超声波脉冲传向接收器 R_2 的速度 \vec{v}_1 是超声波脉冲相对于液体的传播速度 \vec{c}_1 (大小为 c) 与液体流动速度 \vec{u} 的矢量合成，即是

$$\vec{v}_1 = \vec{c}_1 + \vec{u} \text{ (矢量式)}, \quad (1)$$

根据(1)式和图 18-1 可以得到

$$c^2 = v_1^2 + u^2 - 2v_1u \cos(\pi - \alpha), \quad (2)$$



解(2)式可得

$$v_1 = \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 \alpha} - u \cos \alpha, \quad (3)$$

发射器 T_1 发射的脉冲传到接收器 R_2 所花的时间为 $t_1 = \frac{l}{v_1}$, 考虑到(3)式可得

$$t_1 = \frac{l}{\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 \alpha} - u \cos \alpha}, \quad (4)$$

接收器 R_2 接到从发射器 T_1 传来的脉冲后, 发射器 T_2 立即发射脉冲, 发射器 T_2 发射的超声波脉冲传向接收器 R_1 的速度 \bar{v}_2 是超声波脉冲相对于液体的传播速度 \bar{c}_2 (大小为 c) 与液体流动速度 \bar{u} 的矢量合成, 即是

$$\bar{v}_2 = \bar{c}_2 + \bar{u} \text{ (矢量式)}, \quad (5)$$

根据(5)式和图 18-2 可以得到

$$c^2 = v_2^2 + u^2 - 2v_2 u \cos \alpha, \quad (6)$$

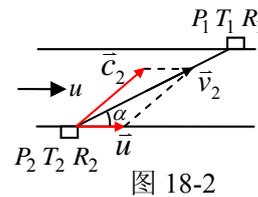


图 18-2

解(6)式可得

$$v_2 = \sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 \alpha} + u \cos \alpha, \quad (7)$$

发射器 T_2 发射的脉冲传到接收器 R_1 所花的时间为 $t_2 = \frac{l}{v_2}$, 考虑到(7)式可得

$$t_2 = \frac{l}{\sqrt{c^2 - u^2 \sin^2 \alpha} + u \cos \alpha}, \quad (8)$$

由(4)式和(8)式可得

$$\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} = \frac{2u \cos \alpha}{l}, \quad (9)$$

由题意有

$$\cos \alpha = \frac{b}{l}, \quad (10)$$

联解(9)式和(10)式可得

$$u = \frac{l^2}{2b} \left(\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1} \right), \quad (11)$$

评分标准: (3)式 5 分; (4)式 1 分; (7)式 5 分; (8)式 1 分; (9)式 4 分; (11)式 4 分。