数　学　竞　赛　之　窗

本栏特邀主持人　熊　斌　冯志刚

中图分类号:O1244　　文献标识码:A　　文章编号:0488 - 7395(2001)19 - 0045 - 02

有关本栏的稿件,请直接寄给熊斌(200062,华东师范大学数学系 E-mial:xiongbin @publicl. sta. net. cn),或冯志刚(200231,上海市上海中学 E-mail:zhgfeng @online. sh. cn). 提供试题及解答请尽量注明出处.

本期给出 2000 年普特兰大学数学竞赛(第 61 届)试题及解答(初等部分),由章玉龙先生(215633,江苏省张家港市香山中学)提供,冯志刚先生编辑.

2000 年普特兰大学数学竞赛

初　等　部　分

1　(Putnam,61th A-2) 证明:存在无穷多个整数 n,使得 $n, n+1, n+2$ 都可以表示为两个整数(不必不同)的平方和. 例如:$0=0^2+0^2$,$1=1^2+0^2$,$2=1^2+1^2$.

2　(Putnam,61th A-3) 设 $P_1P_2\cdots P_8$ 为一个圆周上依次排列的 8 个点,已知 $P_1P_3P_5P_7$ 为一个面积为 5 的正方形,而 $P_2P_4P_6P_8$ 为一个面积为 4 的长方形. 求这个 8 边形 $P_1P_2\cdots P_8$ 的面积的最大可能值.

3　(Putnam,61th A-5) 平面上,半径为 r 的圆上有 3 个整点,证明:这 3 个整点中必有两个点,它们之间的距离小于 $\sqrt[3]{r}$.

4　(Putnam,61th B-1) 设 a_j, b_j, c_j 为整数,这里 $1\le j\le N$. 且对任意的 j,数 a_j, b_j, c_j 中至少有一个数为奇数. 证明:存在整数 r, s, t 使得集合 $\{ra_j+sb_j+tc_j \mid 1\le j\le N\}$ 中,至少有 $\frac{4N}{7}$ 个数为奇数.

5　(Putnam,61th B-2) 设 $n\ge m\ge 1$,n, m 为整数,证明:数 $\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}$ 为整数.

6　(Putnam,61th A-6) 设 $f(x)$ 为整系数多项式,整数数列 $\{a_n\}$ 定义如下:$a_0=0$,$a_{n+1}=f(a_n)$,$n\ge 0$. 证明:若存在正整数 m,使得 $a_m=0$,则 a_1 或 a_2 中有一个等于零.

7　(Putnam,61th B-5) 设 S_0 是一个由有限个正整数组成的集合,定义集合列 $S_0, S_1, S_2, \cdots$,如下:当且仅当 $a-1\in S_n$,$a\in S_n$ 恰有一个成立时,$a\in S_{n+1}$. 证明:存在无穷多个正整数 N,使得 $S_N=S_0\cup\{N+a \mid a\in S_0\}$.

8　(Putnam,61th B-6) 设 B 为 $n(n\ge 3)$ 维空间中,坐标形如 $(\pm1, \pm1, \cdots, \pm1)$ 的点构成的集合,且 B 中不同元素的个数大于 $\frac{2^{n+1}}{n}$. 证明:B 中必有三点,他们为某个正三角形的顶点.

解答或提示

1　[解答 1]　对任意正整数 m,令 $n=4m^4+$

$4m^2$,则有如下表示:$n=(2m^2)^2+(2m)^2$, $n+1=0^2+(2m^2+1)^2$, $n+2=1^2+(2m^2+1)^2$,于是命题成立.

[解答 2] 由于佩尔方程 $x^2-2y^2=1$ 有无穷多组正整数解,对其正整数解 (x,y),令 $n=2y^2$,则有如下表示:$n=y^2+y^2$, $n+1=0^2+x^2$, $n+2=1^2+x^2$,于是命题成立.

注:本题还有若干种解答.

2 最大值为 $3\sqrt{5}$. 提示:先证明当 P_1, P_3 分别为 P_2P_8, P_2P_4 的中点时,$P_1P_2\cdots P_8$ 的面积最大.

3 设 a, b, c 为该圆上的三个整点构成的 $\triangle ABC$ 的三边长,则 $S_{\triangle ABC}\geq\frac{1}{2}$ (这一点可由 Pick 定理,或从行列式得到).

另一方面,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4r}\geq\frac{1}{2}$,所以,$abc\geq 2r$,故 a, b, c 中有一个 $\geq\sqrt[3]{2r}\geq\sqrt[3]{r}$。

4 考虑不全为零的 7 个数组 (x,y,z),其中 $x,y,z\in\{0,1\}$.

容易证明:若 a_j, b_j, c_j 不全为偶数,则集合 $A_j=\{xa_j+yb_j+zc_j\mid x,y,z\in\{0,1\}\}$ 中恰有 4 个为偶数,也恰有 4 个为奇数,这里 $1\leq j\leq N$. 当然,在 $x=y=z=0$ 时,$xa_j+yb_j+zc_j$ 为偶数.

由上述结论,可知

$\{xa_j+yb_j+zc_j\mid x,y,z\in\{0,1\}$, x,y,z 不全为零,$1\leq j\leq N\}$ 中,恰有 $4N$ 个数为奇数. 于是,由抽屉原则,可知存在一组数 (x,y,z), $x,y,z\in\{0,1\}$, x,y,z 不全为零,使得 $\{xa_j+yb_j+zc_j\mid 1\leq j\leq N\}$ 中至少有 $\frac{4N}{7}$ 个奇数.

5 由裴蜀定理,知存在 $r,t\in\mathbf{Z}$,使得

$$mr+nt=(m,n).$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{(m,n)}{n}\binom{n}{m}&=\frac{rm+nt}{n}\binom{n}{m}\\&=r\left(\frac{m}{n}\binom{n}{m}\right)+t\binom{n}{m}\\&=r\binom{n-1}{m-1}+t\binom{n}{m}\in\mathbf{Z}.\end{aligned}$$

所以,命题成立.

6 由整系数多项式的性质可知,对任意 $m,n\in\mathbf{Z}$, $m\neq n$,均有 $m-n\mid f(m)-f(n)$.

令 $b_n=a_{n+1}-a_n$,由上述结论,可知对任意 $n\in\mathbf{N}$,均有 $b_n\mid b_{n+1}$ (这里约定若 $b_n=0$,则 $b_{n+1}=0$).

由条件 $a_0=a_m=0$,故 $a_1=f(a_0)=f(a_m)=a_{m+1}$,所以 $b_0=b_m$. 此时,如果 $b_0=0$,则由 $\{a_n\}$ 的定义,可知 $a_0=a_1=\cdots=a_m=0$,命题成立. 如果 $b_0\neq 0$,则由 $b_0\mid b_1$, $b_1\mid b_2$, $\cdots$, $b_{m-1}\mid b_m$ 及 $b_0=b_m$,可知对任意 $n\in\{1,2,\cdots,m-1\}$,均有 $b_n=\pm b_0$,此时,结合 $b_0+b_1+\cdots+b_{m-1}=a_m-a_0=0$,所以 b_0, $\cdots$, b_{m-1} 中恰有一半为正数,故存在 $k\in\{1,2,\cdots,m-1\}$,使得 $b_{k-1}=-b_k$,从而 $a_{k-1}=a_{k+1}$,依 $\{a_n\}$ 的定义,可知对任意 $n\geq k-1$,均有 $a_n=a_{n+2}$. 从而 $a_0=a_m=a_{m+2}=f(f(a_m))=f(f(a_0))=a_2$,所以 $a_2=0$,命题获证.

7 考虑集合 S_n 的"母函数":$\sum_{a\in S_n}x^a$,依题意,可知 $\sum_{a\in S_{n+1}}x^a\equiv(1+x)\sum_{a\in S_n}x^a\pmod 2$,依此可知

$$\sum_{a\in S_n}x^a\equiv(1+x)^n\sum_{a\in S_0}x^a\pmod 2.$$

于是,对任意 $k\in\mathbf{N}^*$,只要 2^k 大于 S_0 中最大的元素,令 $N=2^k$,就有

$$\sum_{a\in S_N}x^a\equiv(1+x)^{2^k}\sum_{a\in S_0}x^a=(1+2x+x^2)^{2^{k-1}}\sum_{a\in S_0}x^a\equiv(1+x^2)^{2^{k-1}}\sum_{a\in S_0}x^a\equiv\cdots\equiv(1+x^{2^k})\sum_{a\in S_0}x^a\pmod 2.$$

这表明 $S_N=S_0\cup\{N+a\mid a\in S_0\}$,命题获证.

8 对 B 中的任意一点 X,考虑集合

$$T_X=\{Y\mid d(X,Y)=2,\ Y\in R^n\}.$$

这里 $d(X,Y)$ 表示 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中两点的距离. 显然,T_X 就是 $\mathbf{R}^n$ 中,以 X 为球心,2 为半径的球. 记 $C=\{Y\mid Y=(y_1,\cdots,y_n),\ y_i\in\{1,-1\}\}$.

依 C 的定义,可知对任意 $X\in B$,在 C 中恰有 n 个点 $Y\in T_X$. (事实上,当且仅当 Y 与 X 只有一个分量不同时,$Y\in T_X$),而 C 的元素个数为 2^n,而 B 的元素个数大于 $\frac{2^n}{n}$,所以,在 C 中存在一点 Y,使得 Y 到 B 中的三个点 P, Q, R 的距离均为 2,从而 P, Q, R 都与 Y 只在一个分量上不同,所以,P, Q, R 之间两两的距离相等,即 P, Q, R 为某个正三角形的顶点.