熟练活用几种重要方法

1. 探索法
2. 构造法
3. 数形结合法
4. 设想法
5. 面积法
6. 反证法
7. 配方法
8. 替换法
9. 奇偶分析法
10. 分类讨论法
11. 枚举法
12. 待定系数法
13. 抽屉原理
14. 极端原理

用上述方法解决几类题型思路

1. 整数问题的求解思路
2. 代数式问题的求解思路
3. 不等式问题的求解思路
4. 方程问题的求解思路
5. 方程整数根问题的求解思路
6. 函数问题的求解思路
7. 最值问题的求解思路
8. 三角形问题的求解思路
9. 四边形问题的求解思路
10. 与圆有关的问题的求解思路
11. 应用性问题的求解思路
12. 统计初步问题的求解思路
13. 取整函数问题的求解思路
14. 逻辑推理问题的求解思路

几种妙解技能

1. 运算性技能
2. 操作性技能

第一章

探索法

1．探索常从熟悉的地方开始

例 1.

$$\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}+\frac{1}{\square}=1$$

请找出 6 个不同的自然数，分别填入 6 个方框中，使这个等式成立．

解 首先注意到一个熟悉的等式

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

得

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2(2+1)}$$

推得

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

这表明每一个分子为 1 的分数（或单位分数）都可以写成两个单位分数之和．又由熟悉的式子：

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

取 n=2，可得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$$

取 n=3，可得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$$

取 n=4，可得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}$$

再取 n=6，可得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{12}+\frac{1}{7}+\frac{1}{42}$$

注　(1)由于问题要求填入的自然数互不相同，所以最后一步不取 n-5，否则将产生

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{30}$$

而 1/6 已经出现在最后一项．

(2)从上面的解法不难看出答案不是惟一的．例如最后一步取刀＝12，便得

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{20}+\frac{1}{13}+\frac{1}{6}+\frac{1}{156}$$

2．探索常从简单的情形入手

例 2.

以下算式中，每个汉字代表 1 个数字，不同的汉字代表不同的数字，已知“神”＝3，那么被乘数是_______.

神舟五号飞天

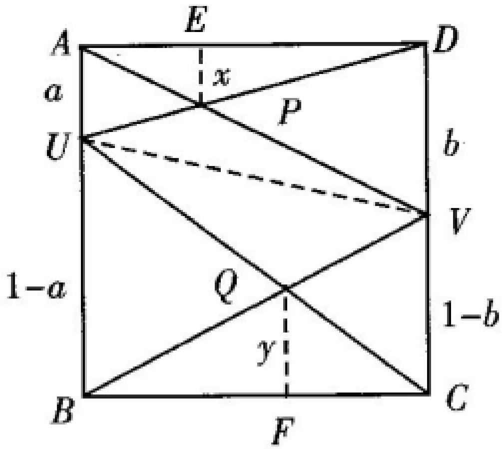
× 神

飞天神舟五号

解 填 307692．理由：首先把“神舟五号飞天”短语看成简单一点的两个词组组成，将问题简单化．设“神舟五号”=A，“飞天”=B，则 3×(100A+B)=10000B+A，即 300A+3B=10000B+A， 299A=9997B，亦即 23A=769B．而 23 和 769 互质，故 B=23n，A=769n，n 是自然数，2≤n≤4．但 A 的首位数字为 3，只可能 n=4，从而 A=3076,B=92．

例 3.

如图，ABCD 是一个边长为 1 的正方形．U、V 分别是 AB、CD 上的点，AV 与 DU 相交于点 P，BV 与 CU 相交于 Q.求四边形 PUQV 面积的最大值。



解 把不规则的四边形 PUQV 分割为两个三角形，三角形是最简单的多边形，容易计算面积．

接 UV，因 AU//DV，则

$S_{\triangle UPV}=S_{\triangle UDV}-S_{\triangle PDV}=S_{\triangle ADV}-S_{\triangle PDV}=S_{\triangle ADP}$.

同理 $S_{\triangle UQV}=S_{\triangle BQC}$.

故 $S_{四边形PUQV}=S_{\triangle APD}+S_{\triangle BQC}$.

作 PE⊥AD，QF⊥BC，E、F 为垂足，并设 PE=x，QF=y．则

$$S_{四边形PUQV}=\frac{1}{2}(x+y)$$

设 $AU=a,DV=b$,则 $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=DE+AE=1$.

故 $x=\frac{ab}{a+b}$

同理 $y=\frac{(1-a)(1-b)}{(1-a)+(1-b)}=\frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}$

$$则\ S_{四边形PUQV}=\frac{1}{2}[\frac{ab}{a+b}+\frac{(1-a)(1-b)}{2-a-b}]=\frac{(a+b)-(a^2+b^2)}{2(a+b)(2-a-b)}$$

$$=\frac{2(a+b)-a^2-b^2-(a^2+b^2)}{4(a+b)(2-a-b)}$$

$$\leqslant\frac{2(a+b)-a^2-b^2-2ab}{4(a+b)(2-a-b)}=\frac{(a+b)(2-a-b)}{4(a+b)(2-a-b)}=\frac{1}{4}$$

等号当且仅当 a=6 时成立.

故四边形 $PUQV$ 面积的最大值是 $\frac{1}{4}$.

3. 探索可从改变问题的表述形式考虑

例 4.

已知存在整数 N，能使数

$$\underbrace{11\cdots11}_{n个}$$

被 1987 整除．求证：数

$$p=\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{99\cdots99}_{n个}\underbrace{88\cdots88}_{n个}\underbrace{77\cdots77}_{n个},q=\underbrace{11\cdots11}_{n+1个}\underbrace{99\cdots99}_{n+1个}\underbrace{88\cdots88}_{n+1个}\underbrace{77\cdots77}_{n+1个}$$

都能被 1987 整除.

解 改变问题表述形式，有

$$p=\underbrace{11\cdots11}_{n}\times(10^{3n}+9\times10^{2n}+8\times10^{n}+7)$$

由于 $\underbrace{11\cdots11}_{n}$

被 1987 整除，所以 p 被 1987 整除，

注意到

$$\underbrace{11\cdots11}_{n个}=\frac{1}{9}(10^n-1)$$

所以 $10^n-1=\underbrace{99\cdots99}_{n个}$被$\underbrace{11\cdots11}_{n个}$整除.

从而 $10^{3(n+1)}-10^3=10^3(10^{3n}-1)$，$10^{2(n+1)}-10^2=10^2(10^{2n}-1)$，$10^{n+1}-10$ 均被$\underbrace{11\cdots11}_{n}$整除，

因而也均被 1987 整除.

而改变问题表述形式，有

$$q=\underbrace{11\cdots11}_{n+1}\times(10^{3(n+1)}+9\times10^{2(n+1)}+8\times10^{n+1}+7)$$

括号中的数等于

$$10^{3(n+1)}-10^3+9\times(10^{2(n+1)}-10^2)+8\times(10^{n+1}-10)+1987.$$

而 $10^{3(n+1)}-10^3=10^3(10^{3n}-1)=10^3(10^n-1)(10^{2n}+10^n+1)$，

$10^{2(n+1)}-10^2=10^2(10^{2n}-1)=10^2(10^n-1)(10^n+1)$，

$10^{n+1}-10=10(10^n-1)$，

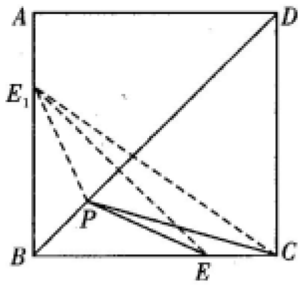
均被 10^n-1 整除，从而也均被 1987 整除.

于是括号中的数能被 1987 整除，q 也能被 1987 整除.

4．探索可从对称角度思考

例 5.

如图，正方形 ABCD 的边长为 3，点 E 在 BC 上，且 BE=2，点 P 在 BD 上移动，则 P E+PC 的最小值是多少？



分析 要求 PE+PC 的最小值，可通过对称变换，将 PE 变位后求解

解 作 E 点关于直线 BD 的对称点 E1，则 E1 在 AB 上，且 $BE_1=2$，$PE_1=PE$，又 $PE+PC=PE_1+PC\geqslant E_1C$(当 E_1、P、C 三点共线时取等号)，所以 PE+PC 的最小值为

$E_1C=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$.

5．探索可从减小目标差着手

步步紧逼目标，即称为减小目标差

例 6.

若$\frac{x}{3y}=\frac{y}{2x-5y}=\frac{6x-15y}{x}$

则$\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}$的值是(　　)

A. $\frac{9}{2}$　　B. $\frac{9}{4}$　　C. 5　　D. 6

解　选 A．理由：由等比式能否找到 x、y 之间的简单关系式，以便化简求值式？为此须对等比式变形，以便运用等比定理后分子、分母能合并化简．

由已知条件知 $x\neq0$，$y\neq0$．把已知等式解方程，得

$x^2=3y(6x-15y)$

$3y^2=x(2x-5y)$

则 $x=3y$．

故 $\frac{4x^2-5xy+6y^2}{x^2-2xy+3y^2}=\frac{36y^2-15y^2+6y^2}{9y^2-6y^2+3y^2}=\frac{27y^2}{6y^2}=\frac{9}{2}$.

例 7.

正整数 n 小于 100，并且满足等式

$$\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]=n$$

其中[x]表示不超过 x 的最大整数．这样的正整数 n 的个数为(　　)．

A．2　　B．3　C．12　　D．16

解　选 D. 理由:由$\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{6}=n$,以及若 x 不是整数,则$[x]<x$,即当 n 不是 2 的倍数或 3 的倍数或 6 的倍数时,有$\left[\frac{n}{2}\right]<\frac{n}{2}$,$\left[\frac{n}{3}\right]<\frac{n}{3}$,$\left[\frac{n}{6}\right]<\frac{n}{6}$,从而知 $2|n,3|n,6|n$,即 n 是 6 的倍数. 因此,小于 100 的这样的正整数有$\left[\frac{100}{6}\right]=16$ 个.