

第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2011 年 3 月）

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	10	15	17	16	12	15	100
得分								

- 注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效。
 2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。
 3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号。

得 分	
评阅人	

一、（本题共 3 小题，每小题各 5 分，共 15 分）计算下列各题（要求写出重要步骤）。

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$;

(3) 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+e^{2t}) \\ y = t - \arctan e^t \end{cases}$ ，求 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

得 分	
评阅人	

二、（本题 10 分）求方程

$(2x + y - 4)dx + (x + y - 1)dy = 0$ 的通解。

得 分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$ ， $f'(0)$ ， $f''(0)$ 均不为零。证明：存在唯一

一组实数 k_1, k_2, k_3 ，使得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k_1 f(h) + k_2 f(2h) + k_3 f(3h) - f(0)}{h^2} = 0.$$

得 分	
评阅人	

四、（本题 17 分）设 $\Sigma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ，其中 $a > b > c > 0$ ，

$\Sigma_2: z^2 = x^2 + y^2$, Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线. 求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值.

得分	
评阅人	

五、(本题 16 分) 已知 S 是空间曲线 $\begin{cases} x^2 + 3y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转

形成的椭球面的上半部分 ($z \geq 0$) (取上侧), Π 是 S 在 $P(x, y, z)$ 点处的切平面,

$\rho(x, y, z)$ 是原点到切平面 Π 的距离, λ, μ, ν 表示 S 的正法向的方向余弦.

计算: (1) $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$; (2) $\iint_S z(\lambda x + 3\mu y + \nu z) dS$.

得分	
评阅人	

六、(本题 12 分) 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 内的可微函数, 且

$|f'(x)| < mf(x)$, 其中 $0 < m < 1$. 任取实数 a_0 , 定义

$a_n = \ln f(a_{n-1}), n = 1, 2, \dots$. 证明: $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - a_{n-1})$ 绝对收敛.

得分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 是否存在区间 $[0, 2]$ 上的连续可微函数

$f(x)$, 满足 $f(0) = f(2) = 1$, $|f'(x)| \leq 1$, $\left| \int_0^2 f(x) dx \right| \leq 1$? 请

说明理由.