2004 年安徽省高中数学竞赛(初赛)

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 设 $a<b<0$. 则下列不等关系中,不成立的是( ).

(A) $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ (B) $\frac{1}{a-b}>\frac{1}{a}$

(C) $|a|>|b|$ (D) $a^2>b^2$

2. 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x-x^2)$ 的单调递减区间是( ).

(A) $(0,2)$ (B) $[1,+\infty)$

(C) $[1,2)$ (D) $(0,1]$

3. 已知集合 $S\subseteq\{1,2,\cdots,26\}$,且满足 S 中任何 2 个元素的和都不能被 5 整除. 则集合 S 中元素的个数最多是( )个.

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13

4. 已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 则 $\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$ 与 1 的大小关系是( ).

(A) $\alpha\sin\alpha+\cos\alpha>1$

(B) $\alpha\sin\alpha+\cos\alpha<1$

(C) $\alpha\sin\alpha+\cos\alpha=1$

(D) 大小与 α 的取值有关

5. 如图 1,正方体 $ABCD-A'B'C'D'$ 的侧面 $AA'B'B$ 内有一点 M 到两直线 AB、$B'C'$ 的距离相等. 那么,M 的轨迹是( ).

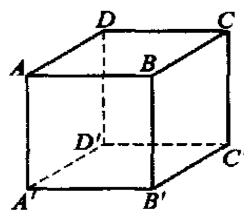

图 1

(A) 抛物线的一部分

(B) 双曲线的一部分

(C) 椭圆的一部分

(D) 线段

6. 已知 $A(a,b)$,$B(c,d)$,且

$=\angle IBA+\angle IAB=\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle BAC}{2}$.

所以,$\angle IBD=\angle BID\Rightarrow ID=BD$.

作 B 关于 OI 的对称点 A_1,则 A_1 在 $\odot O$ 上,有 $IA_1=IB$,$\angle OIA_1=\angle OIB=30°$.

所以,$\angle BIA_1=\angle OIB+\angle OIA_1=60°$.

因此,$\triangle A_1BI$ 是等边三角形,有 $A_1B=A_1I$.

又 $ID=BD$,则 A_1D 是线段 BI 的垂直平分线,也是 $\angle BA_1I$ 的平分线.

故 $\angle BAD=\angle BA_1D=\frac{1}{2}\angle BA_1I=30°$.

因此,$\angle BAC=2\angle BAD=60°$.

五、(1) 因为 α、β 是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个根,根据韦达定理,有

$\alpha+\beta=1$,$\alpha\beta=-1$.

故 $\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}$

$=(\alpha+\beta)(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})-\alpha\beta(\alpha^n-\beta^n)$

$=(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1})+(\alpha^n-\beta^n)$.

所以,$\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$,

即 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.

(2) 对数列 $\{a_n\}$,由

$a_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\ (n=1,2,\cdots)$,

得 $a_1=\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}=1$,$a_2=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta=1$.

再由对任意正整数 n,都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,所以,数列 $\{a_n\}$ 中的项都是正整数.

下面证明,任意相邻两项都互质.

如若不然,设 $(a_{n+2},a_{n+1})=d>1$. 由对任意正整数 n,都有 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$,则

$d=(a_{n+2},a_{n+1})=(a_{n+1},a_n)=(a_n,a_{n-1})=\cdots$

$=(a_4,a_3)=(a_3,a_2)=(1,1)=1$,

与 $d>1$ 矛盾.

因此,数列 $\{a_n\}$ 中任意相邻两项都互质.

(周春荔 整理)

$(a-c)^2+(b-d)^2\neq 0$,

点 P_n ($n\in\mathbf{N}_+$) 满足 $AP_1=\frac{1}{2}AB$, $BP_2=\frac{1}{2}BP_1$, $P_nP_{n+2}=\frac{1}{2}P_nP_{n+1}$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}AP_n$ 是 (　　).

(A) $\left(\frac{c-a}{3},\frac{d-b}{3}\right)$　　(B) $\left(\frac{c-a}{2},\frac{d-b}{2}\right)$

(C) $\left(\frac{2(c-a)}{3},\frac{2(d-b)}{3}\right)$

(D) $\left(\frac{3(c-a)}{4},\frac{3(d-b)}{4}\right)$

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7. 如果 a、b、c 是三角形的三边长,且满足 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$,则这个三角形的形状是______.

8. 一个数列的各项均为 3 或 5,首项为 3,且在第 k 个 3 和第 $k+1$ 个 3 之间有 2^{k-1} 个 5,即 3,5,3,5,5,3,5,5,5,5,3,⋯. 则此数列的前 2 004 项的和 $S_{2\,004}=$______.

9. 设直线 $l: y=x+b\left(0<b<\frac{1}{2}\right)$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A、B 两点,O 为坐标原点. 则当 $\triangle AOB$ 的面积最大时,直线 l 的方程为______.

10. 一个正三棱锥的三条侧棱长均为 1,且两两垂直. 将这个三棱锥绕着它的高旋转 60°,则旋转后的三棱锥与原三棱锥公共部分的体积为______.

11. 某校盖教学楼,需甲种尺寸的玻璃 400 块,乙种尺寸的玻璃 500 块. 商店中有 A、B 两种规格的玻璃. 已知 A 种规格的玻璃每块 48 元,可裁成甲、乙两种尺寸的玻璃分别为 4 块和 6 块;B 种规格的玻璃每块 58 元,可裁成甲、乙两种尺寸的玻璃各为 5 块. 则该校购买 A、B 两种规格的玻璃所付出的最少费用是______元.

12. 已知 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x+a, & x\leqslant 0,\\ f(x-1), & x>0,\end{cases}$ 且方程 $f(x)=x$ 恰有两解. 则实数 a 的取值范围是______.

三、解答题(每小题 20 分,共 60 分)

13. 已知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有意义,$f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,且满足 x、$y\in(-1,1)$ 时,有

$$f(x)+f(y)=f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

(1) 数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}.$$

设 $a_n=f(x_n)$,求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n=n^2+3n+1$,求

$$1+f\left(\frac{1}{b_1}\right)+f\left(\frac{1}{b_2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{b_{2\,002}}\right)+f\left(\frac{1}{2\,004}\right)$$

的值.

14. 如图 2,点 M、N 是四边形 $ABCD$ 的边 AB、CD 的中点,BN 与 MC 相交于点 P,AN 与 MD 相交于点 Q. 求证:$S_{四边形MQNP}=S_{\triangle BCP}+S_{\triangle ADQ}$.

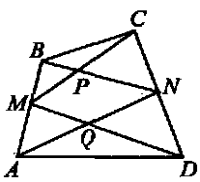

图 2

15. 甲、乙两人轮流掷一枚均匀的硬币,谁先掷出正面,谁获胜. 他们连玩了数局,并规定前一局的输家下一局先掷. 若甲第 1 局先掷,则第 6 局甲获胜的概率是多少?

参考答案

一、**1.** B.

因 $a<b<0$,则 $a<a-b<0$. 故 $\frac{1}{a-b}<\frac{1}{a}$.

2. D.

根据复合函数的单调性得出结论.

3. C.

满足条件的元素个数最多的 $S=\{1,2,5,6,7,11,12,16,17,21,22,26\}$ 等.

4. A.

因为 $0<\sin\alpha<\alpha<\frac{\pi}{2}$,所以,

$\alpha\sin\alpha+\cos\alpha>\sin^2\alpha+\cos\alpha=1+\cos\alpha(1-\cos\alpha)>1$.

5. A.

因为 $B_1C_1\perp$ 面 AA_1B_1B,故 $MB_1\perp B_1C_1$. 从而,M 到点 B 和到直线 AB 的距离相等. 所以,M 的轨迹是抛物线的一部分.

6. C.

易得 P_n 的极限位置在分线段 AB 为 2∶1 处.

二、**7.** 等边三角形.

8. 9 998.

把第 k 个 3 和它后面的 2^{k-1} 个 5 这 $(2^{k-1}+1)$ 项称为一组. 设第 2 004 项在第 k 组,则 k 是满足

$$k+1+2+\cdots+2^{k-1}\geq 2\,004$$

的最小正整数.

易得 $k=11$.

故 $S_{2\,004}=5\times 2\,004-2\times 11=9\,998$.

9. $y=x+\frac{1}{3}$.

$|AB|=2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-2b}$, O 到 AB 的距离 $d=\frac{b}{\sqrt{2}}$,

故 $S_{\triangle OAB}=b\sqrt{1-2b}$.

当 $b=\frac{1}{3}$ 时,取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}$.

10. $\frac{1}{9}$.

公共部分是底面积等于原底面积的 $\frac{2}{3}$、高没有改变的正六棱锥.

11. 4 720.

设需购买 A、B 两种规格的玻璃分别为 x 块、y 块. 约束条件为

$$\begin{cases}x\geq 0, y\geq 0,\\ 4x+5y\geq 400,\\ 6x+5y\geq 500.\end{cases}$$

学校所付费用 $P=48x+58y$.

12. $(-2,+\infty)$.

三、**13.** (1) 令 $y=x$,得 $2f(x)=f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

因为 $x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$,所以,$f(x_{n+1})=2f(x_n)$.

故 $a_{n+1}=2a_n$.

又 $a_1=f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$,则 $\{a_n\}$ 是首项为 -1、公比为 2 的等比数列.

所以,$a_n=-2^{n-1}$.

(2) 令 $x=y=0$,得 $f(0)+f(0)=f(0)$.

则 $f(0)=0$.

令 $y=-x$,得 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$.

则 $f(-x)=-f(x)$.

而 $f\left(\frac{1}{b_n}\right)=f\left(\frac{1}{n^2+3n+1}\right)=f\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)-1}\right)$

$$=f\left(\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}\right)=f\left(\frac{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{(n+1)(n+2)}}\right)$$

$$=f\left(\frac{1}{n+1}\right)+f\left(-\frac{1}{n+2}\right)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)-f\left(\frac{1}{n+2}\right),$$

故 $1+f\left(\frac{1}{b_1}\right)+f\left(\frac{1}{b_2}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{b_{2\,002}}\right)+f\left(\frac{1}{2\,004}\right)$

$$=1+\left[f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right]+\left[f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(\frac{1}{4}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{1}{2\,003}\right)-f\left(\frac{1}{2\,004}\right)\right]+f\left(\frac{1}{2\,004}\right)$$

$$=1+f\left(\frac{1}{2}\right)=0.$$

14. 由 $S_{\triangle ADQ}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADB}-S_{\triangle AQM}$,

$S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}-S_{\triangle MBP}$,

知 $S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}$

$=\frac{1}{2}S_{\triangle ADB}+\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}-S_{\triangle AQM}-S_{\triangle MBP}$.

又 $S_{四边形MQNP}=S_{\triangle ANB}-S_{\triangle AQM}-S_{\triangle MBP}$,故只须证

$S_{\triangle ANB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ACB})$.

这三个三角形共底 AB,设它们的高分别为 h、h_1、h_2. 由 N 是 CD 的中点知

$h=\frac{1}{2}(h_1+h_2)$.

两边同乘以 $\frac{1}{2}AB$,得

$$\frac{1}{2}AB\cdot h=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}AB\cdot h_1+\frac{1}{2}AB\cdot h_2\right).$$

所以,$S_{\triangle ANB}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ADB}+S_{\triangle ACB})$.

因此,$S_{四边形MQNP}=S_{\triangle ADQ}+S_{\triangle BCP}$.

15. 任一局比赛,先掷的人胜的概率为

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}.$$

后掷的人胜的概率为 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$.

{第 k 局甲胜} = {第 $k-1$ 局甲胜且第 k 局甲胜} ∪ {第 $k-1$ 局乙胜且第 k 局甲胜}.

令 P_k 为甲胜第 k 局的概率,则有

$$P_1=\frac{2}{3},$$

$$P_k=\frac{1}{3}P_{k-1}+\frac{2}{3}(1-P_{k-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{k-1}$$

$$\Rightarrow P_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow P_k=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2\times 3^k}.$$

所以,$P_6=\frac{364}{729}$.

故第 6 局甲获胜的概率为 $\frac{364}{729}$.

(洪汪宝 提供)