2003 年安徽省高中数学竞赛(初赛)

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 定义:$A-B=\{x|x\in A$ 且 $x\notin B\}$. 若 $M=\{x|1\le x\le 2\,002, x\in\mathbf{N}_+\}$, $N=\{y|2\le y\le 2\,003, y\in\mathbf{N}_+\}$, 则 $N-M$ 等于(　　).

(A) M　(B) N　(C) $\{1\}$　(D) $\{2\,003\}$

2. 函数 $f(x)=-(\cos x)\lg|x|$ 的部分图像是(　　).

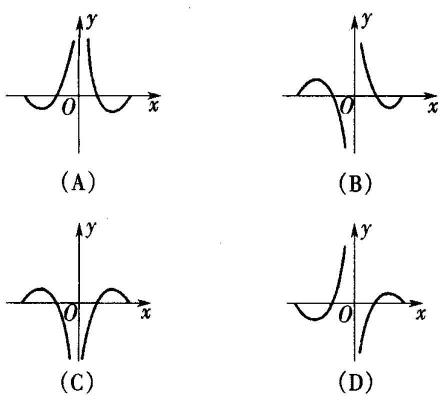

图 1

3. 若不等式 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\le m\sqrt[4]{a^2+b^2}$ 对所有正实数 a、b 都成立,则 m 的最小值是(　　).

(A) 2　(B) $\sqrt{2}$　(C) $2^{\frac{3}{4}}$　(D) 4

4. 曲线 $2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$ 和 $3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$ 的交点有(　　)个.

(A) 2　(B) 3　(C) 4　(D) 无穷多

5. 设 $0<a<1$. 若 $x_1=a$, $x_2=a^{x_1}$, $x_3=a^{x_2}$, $x_4=a^{x_3}$, $\cdots$, $x_n=a^{x_{n-1}}$, $\cdots$, 则数列 $\{x_n\}$(　　).

(A) 递增　(B) 奇数项增,偶数项减

(C) 递减　(D) 偶数项增,奇数项减

6. 在边长为 1 的正方体 C 内,作一个内切大球 O_1,再在 C 内的一个角顶内,作小球 O_2,使它与大球外切,同时与正方体的三个面相切. 则球 O_2 的面积为(　　).

(A) $(7-4\sqrt{3})\pi$　(B) $(7+4\sqrt{3})\pi$

(C) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$　(D) $\frac{2+\sqrt{3}}{2}\pi$

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7. 若直线 $y=x+k$ 与曲线 $x=\sqrt{1-y^2}$ 恰有一个公共点,则 k 的取值范围是______.

8. 在 $(4x^2-2x-5)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中,常数项为______.

9. 设 n 为不超过 2 003 的正整数. 如果有一个角 θ 使得 $(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)^n=\sin n\theta+\mathrm{i}\cos n\theta$ 成立,则这种 n 的总个数为______.

10. 三位数中,如果十位上的数字比百位上的数字和个位上的数字都小,则称这个数为凹数,如 504、746 等都是凹数. 那么,各个数位上无重复数字的三位数中凹数共有______个.

11. 已知 $\boldsymbol{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\boldsymbol{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$, $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 之间有关系式 $|k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}|\boldsymbol{a}-k\boldsymbol{b}|$,其中 $k>0$. 则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的最小值为______.

12. 已知 x、y、z 均为正整数. 则方程 $x+y+z=15$ 有______组解.

三、解答题(每小题 15 分,共 60 分)

13. 设 $a\in\mathbf{R}$,函数 $f(x)=ax^2+x-a\ (|x|\le 1)$.

(1) 若 $|a|\le 1$,试证:$|f(x)|\le\frac{5}{4}$;

(2) 求使函数 $f(x)$ 有最大值 $\frac{17}{8}$ 的 a 的值.

14. 已知 $A(\sqrt{5},0)$ 和曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1\ (2\le x\le 2\sqrt{5}, y\ge 0)$ 上的点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$. 是否存在 n,使得 $|P_1A|, |P_2A|, \cdots, |P_nA|$ 成等差数列,且公差 $d\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$?若存在,求出 n 可取的所有值;若不存在,说明理由. (取 $\sqrt{5}=2.24$)

15. 某市 A 有 4 个郊县(B、C、D、E),如图 2. 现有 5 种颜色,问有多少种不同的着色方法,使得相邻两块不同色,且每块只涂一种颜色?

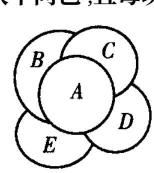

图 2

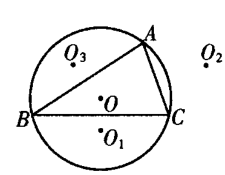

图 3

16. 如图 3, $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O,以 $\triangle ABC$ 各边为对称轴,求得 O 的三个对称点 O_1、O_2、O_3. 现

将各点均擦去,仅保留 O_1、O_2、O_3,试根据这三个点重新作出 $\triangle ABC$.

参 考 答 案

一、1. D.

2. A.

首先,$f(x)$为偶函数,故图像关于 y 轴对称,排除(B)、(D). 再看图像和 x 轴都有交点,图像与 x 轴正方向的第一个交点为(1,0),第二个为$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$. 取 $x=\frac{3}{2}$,则 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\cos\frac{3}{2}\lg\left|\frac{3}{2}\right|<0$. 又$\frac{3}{2}\in\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$,则排除(C).

3. C.

因为 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}\leq\sqrt{2\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$.

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

所以,$m\geq 2^{\frac{3}{4}}$,即 m 的最小值为 $2^{\frac{3}{4}}$.

4. D.

$2x^2-xy-y^2-x-2y-1=0$,即

$2x+y+1=0$ 或 $x-y-1=0$.

$3x^2-4xy+y^2-3x+y=0$,即

$3x-y=0$ 或 $x-y-1=0$.

所以,已知两曲线都可以退化成两直线,且有一对直线重合. 故两曲线有无穷多个公共点.

5. B.

(1) $x_1=a^1$,$x_2=a^{x_1}$,因 $1>a$,则 $a^1<a^{x_1}$,$x_1<x_2$.

(2) $x_1=a^1$,$x_3=a^{x_2}$,$1=a^0$,$x_2=a^{x_1}$. 而 $0<x_1$,则 $1>a^{x_1}$. 于是,$a^1<a^{x_2}$,$x_1<x_3$.

依此类推得 $x_1<x_3<x_5<\cdots$.

(3) $\frac{x_2}{x_4}=a^{x_1-x_3}>a^0=1$,则 $x_2>x_4$.

依此类推得 $x_2>x_4>x_6\cdots$.

故数列$\{x_n\}$奇数项增,偶数项减.

6. A.

如图 4 所示,设球 O_2 的半径为 r,且设球 O_2 作在 $\angle D'$ 内. 则 O_1、O_2 在对角线 BD' 上. 设 $\angle AD'B=\theta$,则 $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$. 在 $\triangle D'EO_2$ 中,$D'O_2=\frac{r}{\sin\theta}=\sqrt{3}r$,$O_1O_2=r+\frac{1}{2}$. 于是,

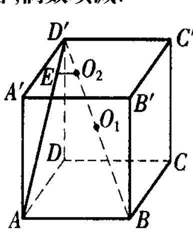

图 4

$2\left[\sqrt{3}r+\left(r+\frac{1}{2}\right)\right]=BD'=\sqrt{3}$.

$r=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$,$4\pi r^2=(7-4\sqrt{3})\pi$.

二、7. $k=-\sqrt{2}$或 $k\in(-1,1]$.

8. 15.

原式 $=(4x^2-2x-5)\left(1+\frac{5}{x^2}+\frac{10}{x^4}+\cdots\right)$.

所以,展开式中常数项为$(-5)\times1+4\times5=15$.

9. 501.

$(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)^n=[\mathrm{i}(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)]^n$

$=\mathrm{i}^n[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]^n$

$=\mathrm{i}^n(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)=\mathrm{i}^{n-1}(\sin n\theta+\mathrm{i}\cos n\theta)$.

如果 $\mathrm{i}^{n-1}(\sin n\theta+\mathrm{i}\cos n\theta)=\sin n\theta+\mathrm{i}\cos n\theta$,则 $\mathrm{i}^{n-1}=1$. 于是,$n=4k+1\leq 2\,003$,$k(k\geq0)$为整数.

故符合条件的 n 的个数为$\left[\frac{2\,003-1}{4}\right]+1=501$.

10. 240.

当十位数为 0 时,符合条件的凹数有 9×8 个,

当十位数为 1 时,符合条件的凹数有 8×7 个,

……

当十位数为 7 时,符合条件的凹数有 2×1 个,

共有 $72+56+42+30+20+12+6+2=240$ 个.

11. $\frac{1}{2}$.

由$|k\mathrm{a}+\mathrm{b}|^2=(\sqrt{3}|\mathrm{a}-k\mathrm{b}|)^2$ 得

$8k\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=(3-k^2)\mathrm{a}^2+(3k^2-1)\mathrm{b}^2$.

故 $\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=\frac{(3-k^2)\mathrm{a}^2+(3k^2-1)\mathrm{b}^2}{8k}$.

因为 $\mathrm{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\mathrm{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$,所以,$\mathrm{a}^2=1$,$\mathrm{b}^2=1$,$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}=\frac{k^2+1}{4k}$.

因为 $k>0$,$k^2+1\geq2k$,则$\frac{k^2+1}{4k}\geq\frac{2k}{4k}=\frac{1}{2}$.

所以,$\mathrm{a}\cdot\mathrm{b}$ 的最小值为$\frac{1}{2}$.

12. 91.

将 15 写成 15 个 1,即 $1+1+\cdots+1=15$,其中 14 个加号任取 2 个,并把这两个加号分隔的 1 合并成一个数得到方程的解,故解的个数是 $\mathrm{C}_{14}^2=91$ 个.

三、13. (1) $|f(x)|=|ax^2+x-a|$

$=|a(x^2-1)+x|$

$\leq|a(x^2-1)|+|x|\leq|x^2-1|+|x|$

$=1-|x^2|+|x|=-\left(|x|-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}\leq\frac{5}{4}$.

(2) 当 $a=0$ 时,$f(x)=x(|x|\leq1)$的最大值是 $f(1)=1$,与题设矛盾.

当 $a\neq0$ 时, $f(x)$ 为二次函数.

(i) 当 $a>0$ 时,其开口向上,故最大值只能在 $x=-1$ 或 $x=1$ 时取得. 而 $f(-1)=a-1-a=-1$, 矛盾. $f(1)=a+1-a=1$ 也矛盾.

(ii) 当 $a<0$ 时,最大值同样不会在 $x=1$ 和 $x=-1$ 上取得,故使得 $f(x)=ax^2+x-a(|x|\leq1)$ 有最大值 $\frac{17}{8}$,只能等价于

$$\begin{cases} -1<-\frac{1}{2a}<1,\\ f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\frac{17}{8},\\ a<0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a<-\frac{1}{2},\\ (a+2)\left(a+\frac{1}{8}\right)=0 \end{cases}$$

$\Rightarrow a=-2$.

14. 因为 $d>0$,则数列是递增数列,故 $|P_1A|$ 为最小, $|P_nA|$ 为最大.

如图 5,曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1\ (2\leq x\leq2\sqrt5, y\geq0)$ 为双曲线一部分, $A(\sqrt5,0)$ 是它的右焦点,则右准线 l 的方程为 $x=\frac{4}{\sqrt5}$, $e=\frac{\sqrt5}{2}$.

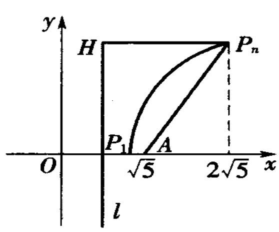

图 5

由题意,等差数列的第一项为 $|P_1A|=\sqrt5-2$, 第 n 项为 $|P_nA|=3$. 于是,有

$3=(\sqrt5-2)+(n-1)d$.

解得 $d=\frac{5-\sqrt5}{n-1}\ (n>1)$.

因为 $d\in\left(\frac{1}{5},\frac{1}{\sqrt5}\right)$,故 $\frac{1}{5}<\frac{5-\sqrt5}{n-1}<\frac{1}{\sqrt5}$.

解得 $n\in(5\sqrt5-4, 26-5\sqrt5)$.

因为 n 为正整数,所以, n 的最大值为 14.

于是,当 $n\leq14$ 时,这 14 个点中任意连续的 n 个点都能得到等差数列.

又因为是等差数列,所以, $n\geq3$.

因此, $n=3,4,5,\cdots,14$.

15. 符合要求的涂色方法至少要用三种颜色,所以,可分三类办法涂色:

(1) 用五种颜色,有 $P_5^5=120$ 种方法.

(2) 用四种颜色. 选四种颜色的方法有 C_5^4 种. 其中选一种颜色涂 A 有 C_4^1 种,剩下 4 块涂三种颜色,有且仅有一组不相邻区域涂同一种颜色,选一组不相邻区域的方法有 2 种(B、D 或 C、E),从余下的三种颜色中选一种涂这不相邻区域有 C_3^1 种,最后余下两种颜色涂两个区域的方法有 P_2^2 种. 根据乘法原理有 $C_5^4\cdot C_4^1\cdot2\cdot C_3^1\cdot P_2^2=240$ 种方法.

(3) 用三种颜色. 选三种颜色有 C_5^3 种方法. A、B 和 D、C 和 E 各涂一种颜色有 P_3^3 种,故得 $C_5^3P_3^3=60$ 种方法.

据加法原理,共有 $120+240+60=420$ 种.

16. (1) 如图 6,连结 OA、OC、O_2A、O_2C,则这四条线段相等, OAO_2C 是菱形. 所以,

$O_2C\underline{\underline{/\!/}}AO$.

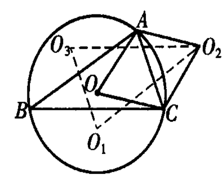

图 6

同理, OAO_3B 也是菱形, $AO\underline{\underline{/\!/}}O_3B$.

于是, $O_3B\underline{\underline{/\!/}}O_2C$. 从而, BCO_2O_3 为平行四边形,故 $BC/\!/O_2O_3$.

(2) 同理可证 $AC/\!/O_1O_3$, $AB/\!/O_1O_2$.

(3) 由对称性可知

$OO_2\perp AC$, $OO_1\perp BC$, $OO_3\perp AB$.

则 $OO_1\perp O_2O_3$, $OO_2\perp O_1O_3$, $OO_3\perp O_1O_2$.

可见 O 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 三条高线的交点.

(4) 有了上面的分析,可见解法如下:

当已知 O_1、O_2、O_3 时,先作出以它们为顶点的 $\triangle O_1O_2O_3$ 三边上的高,得交点 O. 然后分别作线段 OO_1、OO_2、OO_3 的中垂线,三条中垂线两两的交点即为 A、B、C.

(从德兴　提供)

声　明

本刊 2003 年第 3、4 期上刊登的题为“函数不动点在解题中的应用”一文,与湖南师范大学沈文选老师 1993 年发表在《中学教研》上的“函数不动点的应用”一文雷同。我们认为,在不作任何说明的情况下,抄袭他人的作品是不道德的,希望今后不再有此类的事情发生。在此,我们向沈文选老师致歉,并对沈老师的指正表示感谢。

我们郑重声明,本刊严禁一稿两投,严禁抄袭他人的作品。请有此行为的作者自律。

本刊编辑部