

2002 年安徽省高中数学竞赛

一、选择题(每小题 6 分,满分 36 分)

1. 已知集合 $P = \{x | x^2 = 1\}$ 和 $Q = \{x | mx = 1\}$. 若 $Q \subset P$, 则实数 m 可取值的个数为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

2. 若 a, b 是任意实数, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是().

- (A) $a^2 > b^2$ (B) $\frac{b}{a} < 1$
(C) $\lg(a - b) > 0$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$

3. 如果圆 $x^2 + y^2 = k^2$ 至少覆盖函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{k}$ 的一个最大值点和一个最小值点, 则 k 的取值范围是().

- (A) $|k| \geq 3$ (B) $|k| \geq 2$
(C) $|k| \geq 1$ (D) $1 \leq |k| \leq 2$

4. 已知 $\vec{OP} = (2, 1)$, $\vec{OA} = (1, 7)$, $\vec{OB} = (5, 1)$. 设 X 是直线 OP 上的一点 (O 为坐标原点). 那么, 使 $\vec{XA} \cdot \vec{XB}$ 取最小值时, $\angle AXB$ 的值为().

- (A) 90° (B) $\arccos \frac{4\sqrt{17}}{17}$
(C) $\arccos \left[\frac{-4\sqrt{17}}{17} \right]$ (D) $\pi + \arccos \left[\frac{-4\sqrt{17}}{17} \right]$

5. 一个三棱锥的三个侧面中有两个是等腰直角三角形, 另一个是边长为 1 的正三角形. 那么, 这个三棱锥的体积大小().

- (A) 有惟一确定的值 (B) 有 2 个不同值
(C) 有 3 个不同值 (D) 有 3 个以上不同值

6. 平面上有 2 个定点 A, B , 另有 4 个与 A, B 不重合的动点 C_1, C_2, C_3, C_4 . 若使 $|\sin \angle AC_i B - \sin \angle AC_j B| \leq \frac{1}{3}$ ($i \neq j, i, j = 1, 2, 3, 4$), 则称 (C_i, C_j) 为一个好点对. 那么, 这样的好点对().

- (A) 不存在 (B) 至少有一个
(C) 至多有一个 (D) 恰有一个

二、填空题(每小题 9 分,满分 54 分)

7. 已知函数 $f(x) = x^2 + 2bx + 1$ 和 $g(x) = 2a(x + b)$, 其中 x, a, b 均为实数. 使 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在 xOy 平面上的图像不相交的实数对 (a, b) 组成点集 A . 那么, A 在 aOb 平面上表示的图形 S 的面积为_____.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, a_n 为实数, 且对 $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, 都有 $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. 若该数列前 1 985 项之和为 1 000, 前 1 995 项和为 4 000, 那么, 该数列前 2 002 项之和为_____.

9. 甲乙二人相约 10 天之内在某地会面, 约定先到的人等候另一个人, 经过 3 天以后方可离开. 若他们在限期内到达目的地是等可能的, 则此二人会面的概率为_____.

10. 定长为 m 的线段 AB 的两个端点在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的右支上移动 $\left(m > \frac{2b^2}{a}\right)$. 那么, AB 中点 M 的横坐标的最小值为_____ (用 a, b, m 表示).

11. 正方形 $ABCD$ 和正方形 $ABEF$ 所在平面成 120° , M, N 分别是对角线 AC 和 BF 上的点, 且 $AM = FN$. 若 $AB = 1$, 则 MN 的取值范围是_____.

12. $(a + b + c)^{10}$ 的展开式经合并同类项后, 共有_____项.

三、解答题(每小题 20 分,满分 60 分)

13. 设二次函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2) = f(-x+2)$, 且它的图像与 y 轴交于点 $(0, 1)$, 在 x 轴上截得的线段长为 $2\sqrt{2}$. 求 $f(x)$ 的解析式.

14. 设 $a \in \mathbb{N}_+$, $a \geq 2$, 集合 $A = \{y | y = a^x, x \in \mathbb{N}_+\}$, $B = \{y | y = (a+1)x + b, x \in \mathbb{N}_+\}$. 在闭区间 $[1, a]$ 上是否存在 b , 使 $A \cap B \neq \emptyset$? 如果存在, 求出 b 的一切可能值及相应的 $A \cap B$; 如果不存在, 试说明理由.

15. 如图 1, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, 点 I 是它的内心. 射线 AI, BI, CI 各交对边于点 D, E, F , 射线 AD, BE, CF 各交 $\odot O$ 于点 A', B', C' .

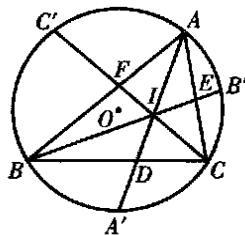


图 1

求证: $AA' \cdot ID = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$.

参考答案

一、1. (D).

$\because P = \{-1, 1\}, Q \subset P,$

$\therefore Q$ 可能是 $\emptyset, \{-1\}, \{1\}.$

当 $Q = \emptyset$ 时, $m = 0$;

当 $Q = \{-1\}$ 时, $m = -1$;

当 $Q = \{1\}$ 时, $m = 1$.

故 m 有 0, -1, 1 共 3 个取值.

2. (D).

3. (B).

$\because f(x) = \sqrt{3} \sin \frac{\pi x}{k}$ 为奇函数, 图像关于原点对称,

$\therefore$ 圆 $x^2 + y^2 = k^2$ 只要覆盖 $f(x)$ 的一个最大值点即可.

令 $\frac{\pi x}{k} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $f(x)$ 距原点最近的一个最大值

点 $P\left(\frac{k}{2}, \sqrt{3}\right)$. 由题意 $k^2 \geq \left(\frac{k}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2$ 得

$$|k| \geq 2.$$

4. (C).

设 $\overrightarrow{OX} = (x_0, y_0)$, $\overrightarrow{OP} = (2, 1)$, 则 $\frac{x_0}{2} = \frac{y_0}{1}$.

$\therefore x_0 = 2y_0$, 则

$$\overrightarrow{XA} = (1 - 2y_0, 7 - y_0), \overrightarrow{XB} = (5 - 2y_0, 1 - y_0).$$

$$\therefore \overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB} = (5 - 2y_0)(1 - 2y_0) + (1 - y_0) \cdot (7 - y_0) = 5y_0^2 - 20y_0 + 12.$$

因此, 当 $y_0 = 2$ 时, $\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}$ 有最小值, 此时, $\overrightarrow{OX} = (4, 2)$, $\overrightarrow{XA} = (-3, 5)$, $\overrightarrow{XB} = (1, -1)$, $|\overrightarrow{XA}| = \sqrt{34}$, $|\overrightarrow{XB}| = \sqrt{2}$,

$$\text{从而, } \cos \angle AXB = \frac{\overrightarrow{XA} \cdot \overrightarrow{XB}}{|\overrightarrow{XA}| |\overrightarrow{XB}|} = \frac{(-3, 5) \cdot (1, -1)}{\sqrt{34} \sqrt{2}} = \frac{-8}{\sqrt{68}} = -\frac{4\sqrt{17}}{17}.$$

5. (C).

(1) 如图 2 ①, 若 $SA = SB = SC = BC = 1$,

$SA \perp SB$, $SA \perp SC$, 则 $V_{S-ABC} = V_{A-SBC} = \frac{\sqrt{3}}{12}$;

(2) 如图 2 ②, 若 $SB = SC = BC = 1$, $SA = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$SA \perp AB$, $SA \perp AC$, 则 $V_{S-ABC} = \frac{\sqrt{2}}{24}$;

(3) 如图 2 ③, 若 $SA = SB = AB = AC = BC = 1$,

$SC = \sqrt{2}$, $SA \perp AC$, $SB \perp BC$, 则 $V_{S-ABC} = V_{A-SBC} = \frac{\sqrt{2}}{12}$.

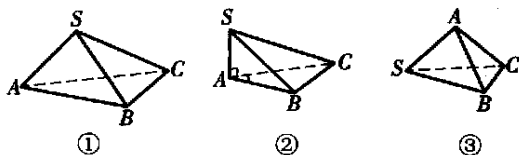


图 2

6. (B).

$$\because \angle AC_i B \in [0, \pi],$$

$$\therefore \sin \angle AC_i B \in [0, 1] (i = 1, 2, 3, 4).$$

将区间 $[0, 1]$ 分成 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$

三段, 则 $\sin \angle AC_1 B$, $\sin \angle AC_2 B$, $\sin \angle AC_3 B$, $\sin \angle AC_4 B$ 中至少有两个值落在同一个小区间内 (抽屉原则).

$$\therefore \text{满足 } |\sin \angle AC_i B - \sin \angle AC_j B| \leq \frac{1}{3} (i \neq j) \text{ 的}$$

好点对 (C_i, C_j) 至少有一个.

二、7. π .

设数对 (a, b) 满足要求, 即使方程 $x^2 + 2bx + 1 = 2a(x + b)$ 无实数根.

$$\therefore \Delta = [2(b - a)]^2 - 4(1 - 2ab) < 0, \text{ 得}$$

$$a^2 + b^2 < 1.$$

在 aOb 平面上, 满足这个条件的 (a, b) 组成的点集 A 是单位圆 (不含边界圆周) 的内部区域.

因此, 图形 S 的面积为 $\pi \times 1^2 = \pi$.

8. 3 000.

设 $a_1 = a$, $a_2 = b$, 则数列前 6 项为 $a, b, b - a, -a, -b, a - b$. 又 $a_7 = a$, $a_8 = b$, 容易验证此数列任何依次 6 项之和均为 0.

$$\therefore S_{1995} = S_{332 \times 6 + 3} = 0 + a + b + (b - a)$$

$$= 2b = 4000.$$

①

$$S_{1985} = S_{330 \times 6 + 5}$$

$$= 0 + a + b + (b - a) + (-a) + (-b)$$

$$= b - a = 1000.$$

②

由式 ①、②解得 $b = 2000$, $a = 1000$.

$$\text{则 } S_{2002} = S_{333 \times 6 + 4} = 0 + a + b + (b - a) + (-a)$$

$$= 2b - a = 3000.$$

9. $\frac{51}{100}$.

设甲、乙二人分别在第 x, y 天到达某地, $0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 10$, 他们会面的充要条件是 $|x - y| \leq 3$, 则点 (x, y) 分布在如图 3 正方形 $OABC$ 内, 其基本事件 S_1 为介于两直线 $x - y = \pm 3$ 之间的阴影内.

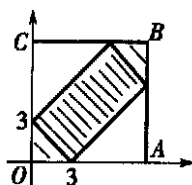


图 3

$$\text{故所求概率为 } P = \frac{100 - (10 - 3)^2}{100} = \frac{51}{100}.$$

$$10. \frac{a(m+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

如图 4, 设 A, B, M 在双曲线右准线上的射影为 A', B', M' , 右焦点为 F , 离心率为 e .

由双曲线定义, 有

$$|MM'| = \frac{|AA'| + |BB'|}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{|AF|}{e} + \frac{|BF|}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{2e} (|AF| + |BF|)$$

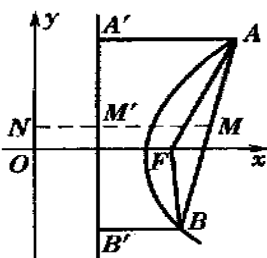


图 4

$$\geq \frac{|AB|}{2e} = \frac{m}{2e}.$$

$$\therefore M \text{ 的横坐标 } = |MN| = |MM'| + |M'N|$$

$$\geq \frac{m}{2e} + \frac{a^2}{c} = \frac{am}{2c} + \frac{a^2}{c} = \frac{a(m+2a)}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$11. \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1 \right].$$

如图 5, 作 $MP \perp AB$ 于 P , 连 PN , 由题设可得 $PN \perp AB$.

故 $\angle MPN$ 是二面角 $D-AB-E$ 的平面角, 即 $\angle MPN = 120^\circ$.

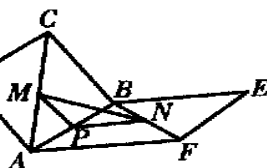


图 5

设 $AM = FN = x$, 则 $MP = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $PN = \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}}$.

$$\therefore MN^2 = \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}} \right)^2 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}x \times \frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{2}} \times \cos 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 - \sqrt{2}x + 2) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}$$

$$(0 \leq x \leq \sqrt{2}).$$

从而, 当 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $MN_{\min} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

当 $x = 0$ 或 $\sqrt{2}$ 时, $MN_{\max} = 1$.

12. 66.

合并后各项的形式均为 $a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3}$, 其中 $k_1 + k_2 + k_3 = 10$ ($k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}$), 当 k_1, k_2 取定时, k_3 惟一确定.

若 $k_1 = 10, k_2 = 0$, 有 1 种取法;

若 $k_1 = 9, k_2 = 0$ 或 1, 有 2 种取法;

若 $k_1 = 8, k_2 = 0, 1, 2$, 有 3 种取法;

.....

若 $k_1 = 1, k_2 = 0, 1, 2, \dots, 9$, 有 10 种取法;

若 $k_1 = 0, k_2 = 0, 1, 2, \dots, 10$, 有 11 种取法.

以上共有 $1 + 2 + 3 + \dots + 10 + 11 = 66$ 种取法, 每

种取法对应一个同类项, 故共有 66 项.

三、13.

$f(x)$ 关于 $x=2$ 对称, 设 $f(x) = a(x-2)^2 + b$.

根据题意 $4a + b = 1$. 设 $f(x)$ 的图像与 x 轴交

于 x_1, x_2 , 则 $|x_1 - x_2| = 2\sqrt{2}$, 即 $2\sqrt{-\frac{b}{a}} = 2\sqrt{2}$.

$$\text{解得} \begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -1. \end{cases}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1.$$

14. 设 $b \in [1, a]$ 使 $A \cap B \neq \emptyset$, 即存在 $y_0 \in A$ 且 $y_0 \in B$, 使 $y_0 = a^m$ ($m \in \mathbb{N}_+$) 且 $y_0 = (a+1)n + b$ ($n \in \mathbb{N}_+$). 则应存在 $m, n \in \mathbb{N}_+$, 使 $a^m = (a+1)n + b$ ($1 \leq b \leq a$),

$$\text{即 } n = \frac{a^m - b}{a+1} \quad (m, n \in \mathbb{N}_+, 1 \leq b \leq a).$$

$$\therefore a^m - b = [(a+1) - 1]^m - b$$

$$= (a+1)^m - C_m^1(a+1)^{m-1} + \dots$$

$$+ C_m^{m-1}(-1)^{m-1}(a+1) + (-1)^m - b,$$

$\therefore n \in \mathbb{N}_+$ 时, 应使 $(-1)^m - b$ 能被 $a+1$ 整除.

(1) 当 m 是正偶数时, 有 $1 - b$ 能被 $a+1$ 整除.

由于 $a \geq 1, 1 \leq b \leq a$, 故仅当 $b=1$ 时满足要求.

(2) 当 m 是正奇数时, 有 $-1 - b$ 能被 $a+1$ 整除.

由于 $2 \leq b+1 \leq a+1$, 故仅当 $b=a$ 时满足要

求.

综上, 满足题意的 b 存在, 其取值为 $b=1$ 或 $b=a$.

当 $b=1$ 时, $A \cap B = \{y \mid y = a^{2k}, k \in \mathbb{N}_+\}$;

当 $b=a$ 时, $A \cap B = \{y \mid y = a^{2k+1}, k \in \mathbb{N}_+\}$.

15. 如图 6, 作 $\odot O$ 直径 AG , $IK \perp BC$ 于点 K .

设 $\odot O$ 半径为 R , $\triangle ABC$ 内切圆半径为 r , 则 $AG = 2R, IK = r$.

$\therefore I$ 是 $\triangle ABC$ 的内心,

$$\therefore \angle BAA' = \angle CAA' \Rightarrow A'B = A'C \Rightarrow A'G \perp BC.$$

又 $IK \perp BC$, $\therefore IK \parallel A'G$.

$$\text{从而可知, Rt } \triangle IDK \sim \text{Rt } \triangle A'GA \Rightarrow \frac{ID}{A'G} = \frac{IK}{AA'},$$

$$\Rightarrow AA' \cdot ID = A'G \cdot IK = 2Rr.$$

同理可证 $BB' \cdot IE = 2Rr, CC' \cdot IF = 2Rr$.

故 $AA' \cdot ID = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$.

(安徽师范大学附中 袁金 提供)

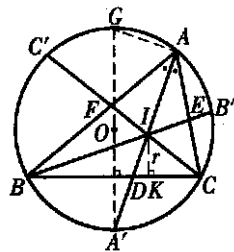


图 6