竞赛之窗

2007 年新知杯上海市高中数学竞赛

说明:解答本试卷不得使用计算器.

一、填空题(第 1～4 小题,每题 7 分,第 5～8 小题,每题 8 分,共 60 分)

1. 方程

$$\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$$

的实数解 (x_1, x_2, x_3) = ______.

2. 如图 1,有一条长度为 1 的线段 EF,其端点 E、F 在边长为 3 的正方形 $ABCD$ 的四边上滑动. 当 EF 绕着正方形的四边滑动一周时,EF 的中点 M 所形成的轨迹的长是______.

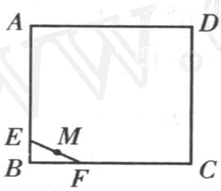

图 1

3. 复数数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_1=0,\ a_n=a_{n-1}^2+\mathrm{i}\ (n\geq 2).$$

则它的前 2 007 项的和为______.

4. 已知 $\alpha-l-\beta$ 是大小为 $45°$ 的二面角,C 为二面角内一定点,且到半平面 α、β 的距离分别为 $\sqrt{2}$、6,A、B 分别是半平面 α、β 内的动点. 则 $\triangle ABC$ 周长的最小值为______.

5. 已知平面直角坐标系中点与点的对应法则 $f: P(m,n)\to P'(\sqrt{m},\sqrt{n})$ $(m\geq 0, n\geq 0)$. 若一段曲线在对应法则 f 下对应椭圆的一段弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\geq 0, y\geq 0)$,则这段曲线的方程是______.

6. 已知 $f(n)=\cos\frac{n\pi}{4}$. 计算:

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1)=\_\_\_\_\_\_.$$

7. 已知数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\ (n\geq 3).$$

则数列 $\{x_n\}$ 的通项公式 x_n = ______.

8. 已知 $\odot M: (x-1)^2+(y-3)^2=4$,过 x 轴上的点 $P(a,0)$ 存在 $\odot M$ 的割线 PBA,使得 $PB=PA$. 则点 P 的横坐标 a 的取值范围是______.

二、解答题(共 60 分)

9. (14 分)对任意正整数 n,用 $S(n)$ 表示满足不定方程 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ 的正整数对 (x,y) 的个数(例如,满足 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ 的正整数对有 (6,3),(4,4),(3,6) 三个,则 $S(2)=3$). 求出使得 $S(n)=2\,007$ 的所有正整数 n.

10. (14 分)已知关于 x 的方程

$$x^3\sin\theta-(\sin\theta+2)x^2+6x-4=0$$

正项 $(a_i^{x_i})$ 共有 $110+28\times 2=166$ 个,而负项 $(-b_i^{y_i})$ 共有 110 个,$a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均为两两不等的小于 6 的正有理数(注意到 $\frac{2i}{i^2+1}\neq\frac{i^2-1}{i^2+1}$,因为 i 为偶数;又 $2i$ 与 i^2+1 互质,i^2-1 与 i^2+1 互质,也是因为 i 为偶数;另外,$i^2+1>100$,因为 $i\geq 10$),从而,$a_1^{x_1}, a_2^{x_2}, \cdots, a_m^{x_m}, b_1^{y_1}, b_2^{y_2}, \cdots, b_n^{y_n}$ 两两不相等. 显然 $m=166$,$n=110$ 满足"大于 100 且小于 170,$m-n\geq 50$". 另外,也容易验证:以上的表示方式都满足"$a_{i+1}^2-b_1^2, a_{i+2}^2-b_2^2, \cdots, a_{i+n}^2-b_n^2$ $(i=0,1,\cdots,m-n)$ 也两两不相等".

综上所述,以上所构造的 2 008 的表示式完全符合题目要求,且表示式有无限多个.

(吴伟朝 广州大学数学与信息科学学院,510006)

有 3 个正实根. 求

$$u=\frac{9\sin^2\theta-4\sin\theta+3}{(1+\cos\theta)(2\cos\theta-6\sin\theta-3\sin 2\theta+2)}$$

的最小值.

11. (16 分) 如图 2, 已知抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$, AB 是过焦点 F 的弦. 如果 AB 与 x 轴所成的角为 $\theta\left(0<\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\angle AOB$.

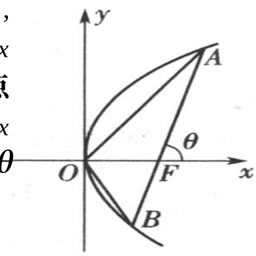

图 2

12. (16 分) 求满足如下条件的最小正整数 n: 在 $\odot O$ 的圆周上任取 n 个点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 则在 C_n^2 个 $\angle A_iOA_j$ $(1\le i<j\le n)$ 中, 至少有 2 007 个不超过 $120°$.

参考答案

一、**1.** (2, 8, 18).

方程两边乘以 2 并整理得

$$x_1+x_2+x_3-2\sqrt{x_1-1}-4\sqrt{x_2-4}-6\sqrt{x_3-9}=0.$$

配方得

$$(\sqrt{x_1-1}-1)^2+(\sqrt{x_2-4}-2)^2+(\sqrt{x_3-9}-3)^2=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x_1-1}-1=0, \sqrt{x_2-4}-2=0, \sqrt{x_3-9}-3=0.$$

解得 $x_1=2, x_2=8, x_3=18$.

2. $8+\pi$.

如图 3, 当 E、F 在正方形顶点的两旁时, 点 M 的轨迹是以该顶点为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的 $\frac{1}{4}$ 圆弧. 其他情况是在正方形边上的一线段, 长度为 2.

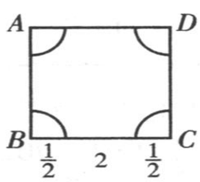

图 3

故轨迹的长为 $2\times4+2\pi\times\frac{1}{2}=8+\pi$.

3. $-1\ 003+2\mathrm{i}$.

由题设可得 $a_1=0, a_2=\mathrm{i}, a_3=-1+\mathrm{i}, a_4=-\mathrm{i}, a_5=-1+\mathrm{i}, a_6=-\mathrm{i}, \cdots\cdots$

可见, 当 $n\ge3$ 时,

$$a_n=\begin{cases}-1+\mathrm{i}, & n\text{ 为奇数};\\ -\mathrm{i}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

故 $S_{2\,007}$

$$=0+\mathrm{i}+(-1+\mathrm{i})+1\ 002[(-\mathrm{i})+(-1+\mathrm{i})]$$

$$=-1\ 003+2\mathrm{i}.$$

4. $10\sqrt{2}$.

如图 4, 分别作点 C 关于平面 α、β 的对称点 P、Q. 易证当 A、B 分别取直线 PQ 与平面 α、β 的交点时, $\triangle ABC$ 周长最短, 且这个周长最小值为

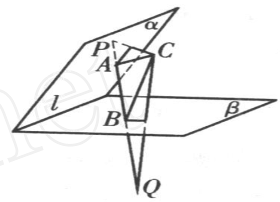

图 4

$$|PQ|=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+12^2-2\times2\sqrt{2}\times12\cos(180°-45°)}$$

$$=10\sqrt{2}.$$

5. $y=b^2\left(1-\frac{x}{a^2}\right)$ $(0\le x\le a^2)$.

设曲线方程为 $y=f(x)$ $(s\le x\le t)$, 则曲线上点 $P(x, f(x))$ 对应的点 $P'(\sqrt{x}, \sqrt{f(x)})$ 在椭圆的一段弧 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(x\ge0, y\ge0)$ 上. 故

$$\frac{x}{a^2}+\frac{f(x)}{b^2}=1\ (x\ge0, f(x)\ge0),$$

即 $f(x)=b^2\left(1-\frac{x}{a^2}\right)$ $(0\le x\le a^2)$.

6. $\begin{cases}\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为偶数};\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

当 $k\in\mathbf{Z}_+$ 时,

$$f(2k-1)f(2k+1)$$

$$=\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}\cdot\cos\frac{(2k+1)\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos k\pi+\cos\frac{\pi}{2}\right)=\frac{(-1)^k}{2}.$$

特别地, 有

$$f(1)f(3)=f(5)f(7)=\cdots$$

$$= f(4k+1)f(4k+3) = -\frac{1}{2}.$$

故当 n 为偶数时，

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}};$$

当 n 为奇数时，

$$f(1)f(3)\cdots f(2n-1) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{(2n-1)\pi}{4}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\cos\left(\frac{n-1}{2}\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

7. $\frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

由 $x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}$ 得

$$x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n-1} + \frac{1}{2}x_{n-2}.$$

又 $x_2 + \frac{1}{2}x_1 = 1$，故数列 $\left\{x_n + \frac{1}{2}x_{n-1}\right\}$ 为常数列，每项均为 1，即

$$x_n + \frac{1}{2}x_{n-1} = 1,$$

$$x_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(x_{n-1} - \frac{2}{3}\right).$$

因为 $x_1 - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$，所以，数列 $\left\{x_n - \frac{2}{3}\right\}$ 是首项为 $-\frac{2}{3}$、公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列.

故 $x_n - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

因此，$x_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

8. $1 - 3\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 1 + 3\sqrt{3}$.

圆心 $M(1,3)$，直径 $d = 4$.

如图 5，过点 P、M 作割线. 由割线定理得

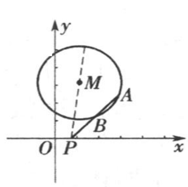

图 5

$$\left(PM + \frac{d}{2}\right)\cdot\left(PM - \frac{d}{2}\right) = PB \cdot PA.$$

故 $PB = BA$

$$\Leftrightarrow PM^2 - \frac{d^2}{4} = 2AB^2 \leqslant 2d^2$$

$$\Leftrightarrow |PM| \leqslant \frac{3}{2}d \Leftrightarrow (a-1)^2 + 3^2 \leqslant 6^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{3} \leqslant a \leqslant 1 + 3\sqrt{3}.$$

二、9. 由 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$ $(x、y、n \in \mathbf{Z}_+)$ 知 $x > n, y > n$.

令 $x = n + a, y = n + b$ $(a、b \in \mathbf{Z}_+)$. 则

$$\frac{1}{n+a} + \frac{1}{n+b} = \frac{1}{n} \Leftrightarrow n^2 = ab.$$

因此，$S(n)$ 等于正整数对 (a, b) 的个数. 从而，$S(n)$ 等于 n^2 的正约数的个数.

设 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$，其中，$p_1, p_2, \cdots, p_k$ 为不同的质数，且 $\alpha_i \in \mathbf{Z}_+$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. 则

$$n^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_k^{2\alpha_k}.$$

n^2 的正约数个数为 $(2\alpha_1 + 1)\cdots(2\alpha_k + 1)$.

令 $(2\alpha_1 + 1)\cdots(2\alpha_k + 1) = 2\,007 = 3^2 \times 223$.

则 $\begin{cases} k = 1, \\ \alpha_1 = 1\,003 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = 2, \\ \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = 334 \end{cases}$

或 $\begin{cases} k = 2, \\ \alpha_1 = 4, \\ \alpha_2 = 111 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} k = 3, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1, \\ \alpha_3 = 111. \end{cases}$

故满足条件的 $n = p_1^{1\,003}$ 或 $n = p_1 p_2^{334}$ 或 $n = p_1^4 p_2^{111}$ 或 $n = p_1 p_2 p_3^{111}$.

10. 原方程为 $(x-1)(x^2\sin\theta - 2x + 4) = 0$.

因为原方程有 3 个正实根，所以，关于 x 的二次方程 $x^2\sin\theta - 2x + 4 = 0$ 有 2 个正实根，即

$$\begin{cases} \Delta = 4 - 16\sin\theta \geqslant 0, \\ \sin\theta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \sin\theta \leqslant \frac{1}{4}.$$

又 $9\sin^2\theta - 4\sin\theta + 3$

$$= 9\left(\sin\theta - \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{23}{9} \geqslant \frac{23}{9},$$

$$0 < (1-\cos\theta)(2\cos\theta - 6\sin\theta - 3\sin 2\theta + 2)$$

$$= 2(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)(1-3\sin\theta)$$

$$= 2\sin^2\theta(1-3\sin\theta)$$

$$= \frac{8}{9} \times \frac{3}{2}\sin\theta \times \frac{3}{2}\sin\theta(1-3\sin\theta)$$

$$\le \frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{9\times 27}.$$

则 $u \ge \dfrac{\frac{23}{9}}{\frac{8}{9\times 27}}=\dfrac{621}{8}$.

当 $\sin\theta=\frac{2}{9}$时,上式等号成立.

故 $u_{\min}=\frac{621}{8}$.

11. 当 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$时,AB 的方程可写成
$y=\tan\theta\left(x-\frac{p}{2}\right)$,即

$$x=\cot\theta\cdot y+\frac{p}{2}. \qquad ①$$

这个结果对 $\theta=\frac{\pi}{2}$也成立.

将式①代入抛物线方程得

$y^2-2p\cot\theta\cdot y-p^2=0$.

则 $y_A=\dfrac{p(\cos\theta+1)}{\sin\theta}$, $y_B=\dfrac{p(\cos\theta-1)}{\sin\theta}$.

故 $x_A=\cot\theta\cdot\dfrac{p(\cos\theta+1)}{\sin\theta}+\dfrac{p}{2}=\dfrac{p(1+\cos\theta)^2}{2\sin^2\theta}$,

$x_B=\dfrac{p(\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}$.

如图6,过点 A、B 分别作 y 轴的垂线 AP、BQ.则

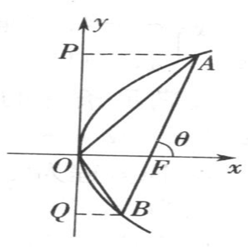

图6

$\tan\angle AOP=\dfrac{|AP|}{|OP|}$

$=\dfrac{x_A}{y_A}=\dfrac{1+\cos\theta}{2\sin\theta}$,

$\tan\angle BOQ=\dfrac{x_B}{-y_B}$

$=\dfrac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}$.

所以,$\tan(\angle AOP+\angle BOQ)=\dfrac{4}{3\sin\theta}$.

故 $\angle AOB=\pi-(\angle AOP+\angle BOQ)$

$=\pi-\arctan\dfrac{4}{3\sin\theta}$.

12. 首先,当 $n=90$ 时,如图7,设 AB 是 $\odot O$ 的直径,在点 A 和 B 的附近分别取45个点,此时,只有 $2C_{45}^2=45\times 44=1\ 980$ 个角不超过 $120°$.所以,$n=90$ 不满足题意.

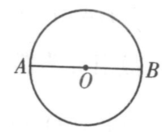

图7

其次,当 $n=91$ 时,接下来证明:至少有 2 007 个角不超过 $120°$.

对圆周上的91个点 $A_1, A_2, \cdots, A_{91}$,若 $\angle A_iOA_j>120°$,则联结 A_iA_j,这样就得到一个图 G.设图 G 中有 e 条边.

当 $\angle A_iOA_j>120°$, $\angle A_jOA_k>120°$时,$\angle A_iOA_k<120°$,故图 G 中没有三角形.

若 $e=0$,则有 $C_{91}^2=4\ 095>2\ 007$ 个角不超过 $120°$,命题得证.

若 $e\ge 1$,不妨设 A_1、A_2 之间有边相连,因为图中没有三角形,所以,对于点 A_i $(3\le i\le 91)$,它至多与 A_1、A_2 中的一个有边相连.从而,

$$d(A_1)+d(A_2)\le 89+2=91,$$

其中,$d(A)$ 表示从 A 处引出的边数.

又 $d(A_1)+d(A_2)+\cdots+d(A_{91})=2e$,而对图 G 中每一条边的两个顶点 A_i、A_j,都有 $d(A_i)+d(A_j)\le 91$.

于是,上式对每一条边求和可得

$(d(A_1))^2+(d(A_2))^2+\cdots+(d(A_{91}))^2$

$\le 91e$.

由柯西不等式得

$91[(d(A_1))^2+(d(A_2))^2+\cdots+(d(A_{91}))^2]$

$\ge[d(A_1)+d(A_2)\cdots+d(A_{91})]^2=4e^2$.

故 $\dfrac{4e^2}{91}\le(d(A_1))^2+(d(A_2))^2+\cdots+(d(A_{91}))^2$

$\le 91e$,

$e\le\dfrac{91^2}{4}<2\ 071$.

因此,91个顶点中,至少有

$C_{91}^2-2\ 071=2\ 024>2\ 007$

个点对,它们之间没有边相连.从而,对应的顶点所对应的角不超过 $120°$.

综上所述,n 的最小值为91.

(熊 斌、顾鸿达、李大元、刘鸿坤、叶声扬 命题)