2013年首届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛

第一试

http://www.omaths.com

2013年7月13日　　8:00–9:20

一. 填空题(本题满分64分, 每小题8分)

1. 已知函数

$$f(x)=x^2-2x,\ g(x)=\begin{cases} x-2, & x\geqslant 1,\\ -x, & x<1.\end{cases}$$

则不等式$f(x)\leqslant 3g(x)$的解集是__________.

2. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 若S_1, S_3, S_2成公比为q的等比数列, 则$q=$ __________.

3. 满足关系式

$$(\sin 2x+\cos x)(\sin x-\cos x)=\cos x$$

的锐角$x=$ __________ (用弧度表示) .

4. 用4块腰长为a, 上, 下底边长分别为a, $2a$的等腰梯形硬纸片, 和两块长和宽分别为$2a$和a的矩形硬纸片, 可以围成一个六面体, 则该六面体的体积为__________.

5. 已知$\odot O$的半径为1, 四边形$ABCD$为其内接正方形, EF为$\odot O$的一条直径, M为正方形$ABCD$边界上一动点, 则$\overrightarrow{ME}\cdot\overrightarrow{MF}$的最小值为__________.

6. 过抛物线$y=x^2$上一点A作法线(法线是过切点且与切线垂直的直线) 与抛物线相交于另一点B, O为坐标原点.当$\triangle OAB$面积的取最小值时, 点A的纵坐标为__________.

7. 若$n\in\mathbf{N}^*$, 则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=$ __________.

8. 甲乙两人各自独立地抛掷一枚均匀硬币, 甲抛掷10次, 乙抛掷11次. 则乙的硬币出现正面向上的次数比甲多的概率是__________.

二. 解答题(本题满分56分)

9. (16分)

设$\triangle ABC$的顶点A, B为椭圆Γ的两个焦点, 点C在椭圆Γ上, 椭圆Γ的离心率为e.

求证: $\dfrac{1+\cos A\cos B}{\sin A\sin B}=\dfrac{1+e^2}{1-e^2}$.

10. (20分) 设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n, 且$S_n=2n-a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 若数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{n-1}a_n$, 求证: $\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{5}{3}$.

11. (20分)

设I是区间$(0,+\infty)$上的一个子区间, $f(x)$是I上取值非负的函数.

任取x_1, $x_2\in I$, 若恒有$f(\sqrt{x_1\cdot x_1})\leqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$, 则称函数$f(x)$为$I$上的“几何凹函数” ; 若恒有$f(\sqrt{x_1\cdot x_1})\geqslant\sqrt{f(x_1)\cdot f(x_2)}$, 则称函数$f(x)$为$I$上的“几何凸函数” .

已知函数$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ $(x\in[1,+\infty))$. 试判断$f(x)$为$[1,+\infty)$上的几何凸函数还是几何凹函数, 并给出证明.