

2013年首届“学数学” 数学奥林匹克邀请赛

第一试

<http://www.omaths.com>

2013年7月13日 8:00-9:20

一. 填空题(本题满分64分, 每小题8分)

1. 已知函数

$$f(x) = x^2 - 2x, g(x) = \begin{cases} x - 2, & x \geq 1, \\ -x, & x < 1. \end{cases}$$

则不等式 $f(x) \leq 3g(x)$ 的解集是_____.

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 S_1, S_3, S_2 成公比为 q 的等比数列, 则 $q =$ _____.

3. 满足关系式

$$(\sin 2x + \cos x)(\sin x - \cos x) = \cos x$$

的锐角 $x =$ _____ (用弧度表示).

4. 用4块腰长为 a , 上, 下底边长分别为 $a, 2a$ 的等腰梯形硬纸片, 和两块长和宽分别为 $2a$ 和 a 的矩形硬纸片, 可以围成一个六面体, 则该六面体的体积为_____.

5. 已知 $\odot O$ 的半径为1, 四边形 $ABCD$ 为其内接正方形, EF 为 $\odot O$ 的一条直径, M 为正方形 $ABCD$ 边界上一动点, 则 $\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF}$ 的最小值为_____.

6. 过抛物线 $y = x^2$ 上一点 A 作法线(法线是过切点且与切线垂直的直线) 与抛物线相交于另一点 B , O 为坐标原点. 当 $\triangle OAB$ 面积的取最小值时, 点 A 的纵坐标为_____.

7. 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n}) =$ _____.

8. 甲乙两人各自独立地抛掷一枚均匀硬币, 甲抛掷10次, 乙抛掷11次. 则乙的硬币出现正面向上的次数比甲多的概率是_____.

二. 解答题(本题满分56分)

9. (16分)

设 $\triangle ABC$ 的顶点 A, B 为椭圆 Γ 的两个焦点, 点 C 在椭圆 Γ 上, 椭圆 Γ 的离心率为 e .

求证:
$$\frac{1 + \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{1 + e^2}{1 - e^2}.$$

10. (20分) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2n - a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = 2^{n-1}a_n$, 求证: $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} < \frac{5}{3}$.

11. (20分)

设 I 是区间 $(0, +\infty)$ 上的一个子区间, $f(x)$ 是 I 上取值非负的函数.

任取 $x_1, x_2 \in I$, 若恒有 $f(\sqrt{x_1 \cdot x_2}) \leq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$, 则称函数 $f(x)$ 为 I 上的“几何凹函数”; 若恒有 $f(\sqrt{x_1 \cdot x_2}) \geq \sqrt{f(x_1) \cdot f(x_2)}$, 则称函数 $f(x)$ 为 I 上的“几何凸函数”.

已知函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - \left(\frac{1}{4}\right)^x$ ($x \in [1, +\infty)$). 试判断 $f(x)$ 为 $[1, +\infty)$ 上的几何凸函数还是几何凹函数, 并给出证明.

欢迎订阅学数学杂志

《学数学》杂志是高中学生学习数学课程, 参加高考, 准备参加自主招生考试及角逐全国高中数学联赛等各级数学竞赛的得力助手. 她是高中同学研究数学的工具, 学好数学的宝典; 她是高中数学教师教学的伴侣, 竞赛辅导的参考资料.

淘宝网店 <http://xueshuxue.taobao.com>

投稿邮箱 xsx@omaths.com

订阅邮箱 fzp@omaths.com

杂志网址 <http://www.omaths.com>