

2005 年北京市中学生数学竞赛(高一)

一、选择题(每小题 5 分,共 25 分)

1. 如果 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M = \{1, 3, 4\}$, $N = \{2, 4, 5\}$, 那么, $(C_S M) \cap (C_S N)$ 等于 ().

(A) \emptyset (B) $\{1, 3\}$ (C) $\{4\}$ (D) $\{2, 5\}$

2. 已知 a, b 都是整数. 命题甲: $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 都不是偶数; 命题乙: $a + b$ 不是偶数, 则 a, b 不都是偶数. 则 ().

(A) 甲真, 乙假 (B) 甲假, 乙真
(C) 甲真, 乙真 (D) 甲假, 乙假

3. 若 c, d 是不共线的两个非零平面向量, 则下面给出的四组 a, b 中, 不共线的一组是 ().

(A) $a = -2(c + d)$, $b = 2(c + d)$
(B) $a = c - d$, $b = -2c + 2d$
(C) $a = 4c - \frac{2}{5}d$, $b = c - \frac{1}{10}d$
(D) $a = c + d$, $b = 2c - 2d$

4. 对定义在区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$, 若存在常数 c , 对于任意的 $x_1 \in [a, b]$ 有唯

一的 $x_2 \in [a, b]$, 使得 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = c$, 则称函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的“均值”为 c . 那么, 函数 $f(x) = \lg x$ 在 $[10, 100]$ 上的均值为 ().

(A) 10 (B) $\frac{1}{10}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

5. 在三角形中, 三条边长成等差数列是三边的比为 3 4 5 的 ().

(A) 充分而不必要条件
(B) 必要而不充分条件
(C) 充分必要条件
(D) 既不充分也不必要的条件

二、填空题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 在平面直角坐标系中, 横、纵坐标都是整数的点称为整点, 如 $(-1, 7)$ 就是一个整点. 若直线 l 过点 $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ 和 $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right)$, 则在 l 上与点 A 距离最近的整点是_____.

2. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\angle ACB =$

六、设 $a = \cos^2 \alpha$, $b = \cos^2 \beta$, $c = \cos^2 \gamma$, 则

$0 < a, b, c < 1$, 且 $a + b + c = 1$.

从而, 原不等式等价于

$$0 < a^4 + b^4 + c^4 - 2(a^2 + b^2 + c^2) + 1 \\ ab + bc + ca + abc.$$

令 $ab + bc + ca = u$, $abc = v$, 则

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2u,$$

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2u^2 - 4u + 4v + 1.$$

于是, 式 (1) 等价于

$$0 < 2u^2 + 4v - u + v.$$

因为 $u > 0, v > 0$, 所以, 式 (2) 的左边显然成立,

且仅当 $u = v = 0$, 即 α, β, γ 中两个取 $\frac{\pi}{2}$, 一个取 0 时等号成立.

另一方面, 式 (1) 右边的不等式等价于

$$u - 2u^2 \geq 3v.$$

因 $u - 2u^2 = u(1 - 2u)$

$$= (ab + bc + ca)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= (ab + bc + ca) \cdot \frac{(a+b+c)^2}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(ab + bc + ca)(a + b + c)$$

$$= \frac{1}{3} \times 3 \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \geq 3 \sqrt[3]{abc}$$

$$= 3abc = 3v.$$

所以, 式 (1) 右边成立, 即式 (1) 成立.

从而, 式 (1) 成立.

故原不等式成立.

(刘康宁 提供)

30° 则 $AC + BC$ 的最大值是_____。

3. 2 005 个实数 $x_1, x_2, \dots, x_{2005}$ 满足

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{2004} - x_{2005}| + |x_{2005} - x_1| = 1.$$

则 $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2005}|$ 的最小值等于_____。

4. 已知 $x \in \mathbb{R}$, 则函数

$$f(x) = \max \left\{ \sin x, \cos x, \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right\}$$

的最大值与最小值的和等于_____。

5. 把单位正方体的六个面分别染上 6 种颜色, 并画上个数不同的金鸡, 各面的颜色与金鸡的个数对应如表 1:

表 1

面上所染颜色	红	黄	蓝	青	紫	绿
该面上的金鸡个数	1	2	3	4	5	6

取同样的 4 个上述的单位正方体拼成一个如图 1 所示的水平放置的长方体。则这个长方体的下底面总计共有_____个金鸡。

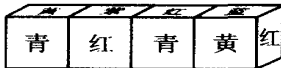


图 1

三、(10分) 已知 a, b, c 是实数, 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 满足 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = 0$. 求证: -1 与 1 中至少有一个是 $f(x) = 0$ 的根。

四、(15分) 圆内接凸四边形 $ABCD$ 的面积记为 $S, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. 证明:

$$(1) S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

其中 $p = \frac{a+b+c+d}{2}$;

(2) 如果四边形 $ABCD$ 同时具有外接圆和内切圆, 则 $S = \sqrt{abcd}$.

五、(15分) 设 p 个质数 a_1, a_2, \dots, a_p 构成公差为 $d(d > 0)$ 的等差数列, 且 $a_1 > p$. 求证:

(1) 当 p 是质数时, $p | d$;

(2) 当 $p = 15$ 时, $d > 30\,000$.

参考答案

一、1. A.

易知 $C_S M = \{2, 5\}, C_S N = \{1, 3\}$, 所以,

$$(C_S M) \cap (C_S N) = \emptyset.$$

2. B.

a, b 都是整数, $a + b$ 不是偶数, 则 $a + b$ 是奇数, a, b 必一奇一偶. 所以, “ a, b 都不是偶数”的结论不真; “ a, b 不都是偶数”的结论为真.

3. D.

由 $a = -2(c + d) = -b$, 知 a, b 共线, 排除选项(A);

$a = c - d = -\frac{1}{2}(-2c + 2d) = -\frac{1}{2}b$, 知 a, b 共线, 排除选项(B);

$a = 4c - \frac{2}{5}d = 4\left(c - \frac{1}{10}d\right) = 4b$, 知 a, b 共线, 排除选项(C).

事实上, c, d 是不共线的两个平面向量. 则 $a = c + d$ 是非零向量. 若 a, b 共线, 则存在唯一的实数, 使得 $a = b$, 故

$$c + d = (2c - 2d) \Leftrightarrow (1 - 2)c = -(2 + 1)d.$$

当 $1 - 2 = 0$ 时, d 为零向量, 与已知不符. 当 $1 - 2 \neq 0$ 时, $c = \frac{2+1}{2-1}d$, 这表明 c, d 是共线的两个非零平面向量, 仍与已知不符. 所以, a, b 不共线.

4. C.

设对于任意的 $x_1 \in [10, 100]$, 有唯一的 $x_2 \in [10, 100]$, 使得 $x_1 x_2 = 10^3$. 从而,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} &= \frac{1g x_1 + 1g x_2}{2} \\ &= \frac{1g x_1 x_2}{2} = \frac{1g 10^3}{2} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

5. B.

三角形的三条边长为 4, 5, 6 成等差数列, 其比不等于 3 : 4 : 5; 反过来, 一个三角形三边的比为 3 : 4 : 5, 设三边长为 $3k, 4k, 5k (k > 0)$, 则成公差为 k 的等差数列. 所以, 在三角形中, 三条边长成等差数列是三边的比为 3 : 4 : 5 的必要而不充分条件.

二、1. $(-2, -1)$.

设直线 l 的方程为 $y = kx + b$, 由题意得

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = \frac{1}{2}k + b, \\ \frac{1}{5} = \frac{1}{4}k + b. \end{cases}$$

解得 $k = \frac{8}{15}, b = \frac{1}{15}$.

则直线 l 的方程为 $y = \frac{8}{15}x + \frac{1}{15}$.

显然, $(-2, -1)$ 在 l 上.

将 $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 分别代入 $y = \frac{8}{15}x + \frac{1}{15}$, 求得对应的 y 值都不是整数. 所以, 在 l 上距离点 A 最近的整点是 $(-2, -1)$.

$2.8 + 4\sqrt{3}$.

如图 2, 延长 BC 到点 P 使得 $PC = AC$, 联结 AP , 则 $\angle APB = 15^\circ$, 故点 P 在以 $AB = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 为弦含弓形角等于 15° 的弓形弧上.

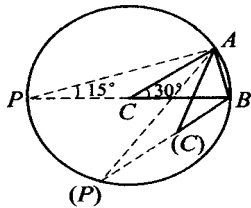


图 2

要 $AC + BC$ 的值最大, 也就是要 PB 的值最大, 必须且只须 PB 为弓形弧所在圆的直径, 此时, $\angle PAB = 90^\circ$. 则 $AC + BC$ 的最大值为

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sin 15^\circ}$$

由几何方法, 作 MKN , 使得 $\angle MKN = 90^\circ, NK = 1, MN = 2$. 此时, $\angle NKM = 30^\circ, KM = \sqrt{3}$.

如图 3, 延长 KM 到点 P , 使得 $MP = MN = 2$, 联结 PN , 则 $\angle NPK = 15^\circ$. 易知 $\tan 15^\circ$

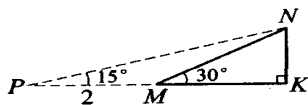


图 3

$$= \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

由勾股定理得 $PN = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

$$\text{所以, } \sin 15^\circ = \frac{NK}{PN} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

故 $AC + BC$ 的最大值为

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{4(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{4} = 8 + 4\sqrt{3}.$$

3. $\frac{1}{2}$.

对任意的正整数 i, j , 总有

$$|x_i - x_j| \leq |x_i| + |x_j|.$$

则 $1 = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots +$

$$|x_{2004} - x_{2005}| + |x_{2005} - x_1|$$

$$= |x_1| + |x_2| + |x_2| + |x_3| + \dots +$$

$$|x_{2004}| + |x_{2005}| + |x_{2005}| + |x_1|$$

$$= 2(|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2004}| + |x_{2005}|).$$

所以, $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2005}| \geq \frac{1}{2}$.

事实上, 当 $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = x_3 = \dots = x_{2005} = 0$ 时,

恰有

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2005}| = \frac{1}{2}.$$

所以, $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_{2005}|$ 的最小值等于 $\frac{1}{2}$.

4. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

注意到

$$\begin{aligned} f(x) &= \max \left\{ \sin x, \cos x, \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} \right\} \\ &= \max \left\{ \sin x, \cos x, \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right\}, \end{aligned}$$

显然, $f(x)$ 的最大值为 1. 可以通过作出 $y = \sin x, y = \cos x$ 的图像得到 $\max\{\sin x, \cos x\}$ 的最小值为

$-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 在 $x = \frac{5\pi}{4}$ 时, 达到最小值 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 而在 $x = \frac{5\pi}{4}$

时, $\sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 的值为 -1. 所以, $f(x)$ 的最小值为

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. 17.

由于 4 个上述的单位正方体完全相同, 观察判定: 红色面的 4 个相邻面的颜色分别为蓝、黄、青、紫, 所以, 红色面相对面的颜色是绿色. 而黄色面的 4 个相邻面的颜色分别为青、蓝、红、绿, 因此, 黄色面相对面的颜色是紫色. 剩下的只能是青色面的相对面蓝色, 即长方体的上底面的颜色, 对应的下底面的颜色和该面上的金鸡数为:

上底(黄)——下底(紫)——5 个;

上底(紫)——下底(黄)——2 个;

上底(红)——下底(绿)——6 个;

上底(蓝)——下底(青)——4 个.

故这个长方体的下底面总计共画有 17 个金鸡.

三、(1) 由 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = 0$, 知二次函数 $f(x) =$

$ax^2 + bx + c$ 有零点.

若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 只有唯一的零

点,则这个零点就是抛物线的顶点.于是,有

$$\frac{a-b-c}{2a} = -\frac{b}{2a}, \text{解得 } a=c.$$

由 $=0$, 有 $b^2 - 4a^2 = 0$, 则 $b = \pm 2a$. 故抛物线的顶点横坐标为 $x = \frac{-b}{2a} = \frac{\mp 2a}{2a} = \mp 1$. 所以, 原二次函数变为 $f(x) = ax^2 \pm 2ax + a = a(x \pm 1)^2$, -1 与 1 中至少有一个是 $f(x) = 0$ 的根.

若二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 有两个不同的零点, 因为

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) &= \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c \\ &= \frac{(a-b-c)^2 + 2b(a-b-c) + 4ac}{4a} \\ &= \frac{(a-b-c)(a-b-c+2b) + 4ac}{4a} \\ &= \frac{(a-c)^2 - b^2 + 4ac}{4a} = \frac{(a+c)^2 - b^2}{4a} \\ &= \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a} = \frac{f(-1)f(1)}{4a}, \end{aligned}$$

由 $f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = 0$, 则

$$\frac{f(-1)f(1)}{4a} = 0 \Leftrightarrow f(-1) = 0 \text{ 或 } f(1) = 0.$$

故 -1 与 1 中至少有一个是 $f(x) = 0$ 的根.

四、(1) 联结 AC . 由于四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形, 所以,

$$B + D = 180^\circ.$$

得 $\cos B = -\cos D, \sin B = \sin D$. 易知,

$$S = S_{ABC} + S_{ADC}$$

$$= \frac{1}{2}(ab \sin B + cd \sin D),$$

即 $4S = 2(ab + cd) \sin B$.

所以, $16S^2 = 4(ab + cd)^2 \sin^2 B$.

由余弦定理得

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos B = AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos D,$$

即 $a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 + 2cd \cos B$.

故 $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab + cd) \cos B$.

平方得

$$(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2 \cos^2 B.$$

+ 得

$$16S^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab + cd)^2.$$

故 $16S^2 = (2ab + 2cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$

$$= (2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2) \cdot$$

$$(2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2)$$

$$= [(a+b)^2 - (c-d)^2][(c+d)^2 - (a-b)^2]$$

$$= (a+b+c-d)(a+b-c+d) \cdot$$

$$(c+d+a-b)(c+d-a+b)$$

$$= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d).$$

所以, $S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$.

(2) 四边形 $ABCD$ 具有外接圆, 根据(1) 应有

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

又四边形 $ABCD$ 同时具有内切圆, 因此,

$$a+c = b+d = p.$$

故 $p-a = c, p-b = d, p-c = a, p-d = b$.

代入(1) 所证的圆内接四边形的面积公式, 得

$$S = \sqrt{abcd}.$$

五、(1) 因为 $a_1 > p, d > 0$, 所以, a_1, a_2, \dots, a_p 都是大于 p 的质数. 因此, 每一个 $a_i (i = 1, 2, \dots, p)$ 都不能被 p 整除.

而 a_1, a_2, \dots, a_p 被 p 除时只能取 $p-1$ 个不同的余数, 根据抽屉原理, 至少有两个数被 p 除的余数相同. 设这两个数为 $a_m, a_n (n > m)$. 于是,

$$a_n - a_m = (n - m)d$$

能被 p 整除.

但 $0 < n - m < p, p$ 为质数, 所以, $p \nmid (n - m)$.

因此, $p \mid d$.

(2) 设 p_1, p_2, \dots, p_{15} 这 15 个质数构成公差为 $d (d > 0)$ 的等差数列. 由于这 15 个质数必都是奇数, 所以, 公差 d 为偶数, 即 $2 \mid d$.

由其中的 p_2, p_3, p_4 这 3 个质数成等差数列, $p_2 > 3$, 根据(1) 中的结论, 得 $3 \mid d$.

由 p_3, p_4, p_5, p_6, p_7 这 5 个质数成等差数列, $p_3 > 5$, 根据(1) 中的结论, 得 $5 \mid d$.

由 $2 \mid d, 3 \mid d$ 和 $5 \mid d$ 且 $(2, 3, 5) = 1$, 可得 $30 \mid d$.

因此, 由 $p_1 - 3$ 知 $p_2 - 33$. 但 p_2 为质数, 所以, $p_2 = 37$.

于是, 由 p_2, p_3, \dots, p_8 这 7 个质数成等差数列, $p_2 > 7$, 根据(1) 中的结论, 得 $7 \mid d$.

同理, 由 p_2, p_3, \dots, p_{12} 这 11 个质数成等差数列, $p_2 > 11$, 根据(1) 中的结论, 得 $11 \mid d$.

由 p_2, p_3, \dots, p_{14} 这 13 个质数成等差数列, $p_2 > 13$, 根据(1) 中的结论, 得 $13 \mid d$.

因为 $(30, 7, 11, 13) = 1$, 所以, $30 \times 7 \times 11 \times 13 \mid d$, 即 $30030 \mid d$.

故 $d \geq 30030 > 30000$.

(周春荔 提供)