运动定律

§3.1 牛顿定律

3．1．1、牛顿第一定律

任何物体都保持静止或匀速直线运动状态，直到其他物体所作用的力迫使它改变这种状态为止。这是牛顿第一定律的内容。牛顿第一定律是质点动力学的出发点。

物体保持静止状态或匀速直线运动状态的性质称为惯性。牛顿第一定律又称为惯性定律，惯性定律是物体的固有属性，可用质量来量度。

无论是静止还是匀速直线运动状态，其速度都是不变的。速度不变的运动也就是没有加速度的运动，所以物体如果不受到其他物体的作用，就作没有加速度的运动，牛顿第一定律指出了力是改变物体运动状态的原因。

牛顿第一定律只在一类特殊的参照系中成立，此参照系称为惯性参照系。简称惯性系。相对某一惯性系作匀速运动的参照系必定也是惯性系，牛顿第一定律不成立的参照系称为非惯性参照系，简称非惯性系，非惯性系相对惯性系必作变速运动，地球是较好的惯性系，太阳是精度更高的惯性系。

3．1．2．牛顿第二定律

(1)定律内容：物体的加速度跟所受外力的合力成正比，跟物体的质量成反比，加速度的方向跟合外力的方向相同

(2)数学表达式：$a=\dfrac{\sum F}{m}$或$\sum F=ma$

(3)理解要点

①牛顿第二定律不仅揭示了物体的加速度跟它所受的合外力之间的数量关系，而且揭示了加速度方向总与合外力的方向一致的矢量关系。在应用该定律处理物体在二维平面或三维空间中运动的问题，往往需要选择适当的坐标系，把它写成分量形式

$$\sum F=ma\quad \begin{cases} F_x=ma_x \\ F_y=ma_y \\ F_z=ma_z \end{cases}$$

②牛顿第二定律反映了力的瞬时作用规律。物体的加速度与它所受的合外力是时刻对应的，即物体所受合外力不论在大小还是方向上一旦发生变化，其加速度也一定同时发生相应的变化。

③当物体受到几个力的作用时，每个力各自独立地使物体产生一个加速度，就如同其他力不存在一样；物体受几个力共同作用时，产生的加速度等于每个力单独作用时产生的加速度的矢量和，如图 3-1-1 示。这个结论称为力的独立作用原理。

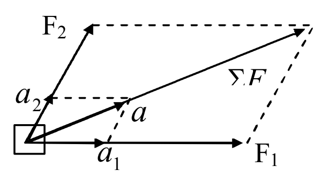

图 3-1-1

④牛顿第二定律阐述了物体的质量是惯性大小的量度，公式$m=\sum F/a$反映了对同一物体，其所受合外跟它的加速度之比值是个常数，而对不同物体其比值不同，这个比值的大小就是物体的质量，它是物体惯性大小量度，当合外力不变时，物体加速度跟其质量成反比，即质量

越大，物体加速度越小，运动状态越难改变，惯性也就越大。

⑤牛顿第二定律的数学表达式$\sum F = ma$定义了力的基本单位；牛顿（N）。因为，$a \infty \sum F/m$，故$\sum F = kma$，当定义使质量为 1kg 的物体产生$1m/s^2$加速度的作用力为1N时，即1N=$1kg \times 1m/s^2$时，k=1。由于力的单位1N的规定使牛顿第二定律公式

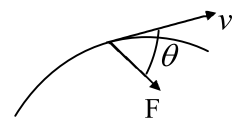

图 3-2-1

中的k=1，由此所产生的单位制即我们最常用的国际单位制。

⑥在惯性参考系中，公式$\sum F = ma$中的ma不是一个单独的力，更不能称它是什么“加速力”，它是一个效果力，只是在数值上等于物体所受的合外力。

⑦对一个质点系而言，同样可以应用牛顿第二定律。

如果这个质量系在任意的x方向上受的合外力为F_x，质点系中的n个物体（质量分别为$m_1, m_2, \cdots\cdots m_n$）在x方向上的加速度分别为$a_{1x}, a_{2x}, \cdots\cdots a_{nx}$，那么有

$$F_x = m_1 a_{1x} + m_2 a_{2x} + \cdots\cdots + m_n a_{nx}$$

这就是质点系的牛顿第二定律。

3．1．3、牛顿第三定律

（1）定律内容：两个物体之间的作用力与反作用力总是大小相等，方向相反，作用在一条直线上。

（2）数学表达式：$F = -F'$

（3）理解要点

①牛顿第三定律揭示了物体相互作用的规律，自然界中的力的作用都是相互的，任何一个物体既为受力体，则它一定就是施力体。

②相互作用力必定是同一性质的力，即如果其中一个力是摩擦力，则它的反作用力也一定是摩擦力。

③两个相互作用力要与一对平衡力区分清楚。

④这个相互作用力是指的性质力。对于效果力不一定能找到“整体”的反作用力，如有人说向心力的反作用力就是离心力。这是错误的，因为向心力往往是由多个力作用是共同效果，其中每个力都有其各自的反作用力，故向心力这个合力就不一定有一个所谓反作用力。

3．1．4、关于参照系的问题

（1）惯性参照系：牛顿第一定律实际上又定义了一种参照系，在这个参照系中观察，一个不受力作用的物体将保持静止或匀速直线运动状态，这样的参照系就叫做惯性参照系，简称惯性系。由于地球在自转的同时又绕太阳公转，所以严格地讲，地面不是一个惯性系。在一般情况下，我们可不考虑地球的转动，且在研究较短时间内物体的运动，我们可以把地面参照系看作一个足够精确的惯性系。

（2）非惯性参照系：凡牛顿第一定律不成立的参照系统称为非惯性参性系，一切相对于惯性参照系做加速运动的参照系都是非惯性参照系。在考虑地球转动时，地球就是非惯性系。在非惯性系中，物体运动不遵循牛顿第二定律，但在引入“惯性力”的概念以后，就可以利用牛顿第二定律的形式来解决动力学问题了。（关于惯性力的应用在后边将到）。

§3.2 牛顿定律在曲线运动中的应用

3．2．1、物体做曲线运动的条件

物体做曲线运动的条件是，物体的初速度不为零，受到的合外力与初速度不共线，指向曲线的“凹侧”，如图 3-2-1，该时刻物体受到的合外力 F 与速度的夹角θ,θ满足的条件是 0º＜θ<180º。

3．2．2、圆周运动

物体做匀速圆周运动的条件是，物体受到始终与速度方向垂直，沿半径指向圆心，大小恒定的力的作用。由牛顿第二定律可知，其大小为

$$F = ma_n = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$。

在变速圆周运动中，合外力在法线方向和切线方向都有分量，法向分量产生向心加速度。

$$F_n = ma_n = mv^2 / R = m\omega^2 R$$

切向分量产生切向加速度。

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

3．2．3、一般曲线运动

与变速圆周运动类似，在一般曲线运动中，合外力在法线方向和切线方向都有分量，法向分量的大小为

$$F_n = ma_n = m\frac{v^2}{R}$$

R 为曲线在该处的曲率半径，切向分量的大小为

$$F_\tau = ma_\tau = m\frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}$$

§3.3　　惯性力

应用牛顿定律时，选用的参照系应该是惯性系。在非惯性系中，为了能得到形式上与牛顿第二定律一致的动力学方程，引入惯性力的概念，引入的惯性力$\vec{F}_{惯}$必须满足

$$\vec{F} + \vec{F}_{惯} = m\vec{a}'$$

式中$\vec{F}$是质点受到的真实合力，$\vec{a}'$是质点相对非惯性系的加速度。

真实力与参照系的选取无关，惯性力是虚构的力，不是真实力。惯性力不是自然界中物质间的相互作用，因此不属于牛顿第三定律涉及的范围之内，它没有施力物体，不存在与之对应的反作用力.

3．3．1．平动加速系统中的惯性力

设平动非惯性系相对于惯性系的加速度为$\vec{a}_0$。质点相对于惯性系加速度$\vec{a}$，由相对运动知识可知，质点相对于平动非惯性系的加速度$\vec{a}' = \vec{a} + (-\vec{a}_0)$

质点受到的真实力对惯性系有

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

对非惯性系

$$\vec{F} + \vec{F}_{惯} = m\vec{a}'$$

$$\vec{F} + \vec{F}_{惯} = m\vec{a} + m(-\vec{a}_0)$$

得

$$\vec{F}_{惯} = -m\vec{a}_0$$

平动非惯性系中，惯性力由非惯性系相对惯性系的加速度及质点的质量确定，与质点的位置及质点相对于非惯性系速度无关。

3．3．2、匀速转动系中的惯性力

如图 3—3—1，圆盘以角速度ω绕竖直轴匀速转动，在圆盘上用长为 r 的细线把质量为 m 的点系于盘心且质点相对圆盘静止，即随盘一起作匀速圆周运动，以惯性系观察，质点在线拉力$\vec{F}$作用下做匀速圆周运动，符合牛顿第二定律．以圆盘为参照系观察，质点受力拉到$\vec{F}$作用而保持静止，不符合牛顿定律．要在这种非惯性系中保持牛顿第二定律形式不变，在质点静止于此参照系的情况下，引入惯性力

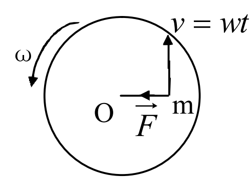

图 3—3—1

$$\vec{F} + \vec{F}_{惯} = m\vec{a}' = 0$$

$$\vec{F}_{惯} = -\vec{T} = m\omega^2\vec{r}$$

$\vec{r}$ 为转轴向质点所引矢量，与转轴垂直，由于这个惯性力的方向沿半径背离圆心，通常称为惯性离心力．由此得出：若质点静于匀速转动的非惯性参照系中，则作用于此质点的真实力与惯性离心力的合力等于零．

惯性离心力的大小，除与转动系统的角速度和质点的质量有关外，还与质点的位置有关（半径），

必须指出的是，如果质点相对于匀速转动的系统在运动，则若想在形式上用牛顿第二定律来分析质点的运动，仅加惯性离心力是不够的，还须加其他惯性力。如科里奥里力，科里奥利力是以地球这个转动物体为参照系所加入的惯性力，它的水平分量总是指向运动的右侧，即指向相对速度的右侧。例如速度自北向南，科里奥利力则指向西方。这种长年累月的作用，使得北半球河流右岸的冲刷甚于左岸，因而比较陡峭。双轨铁路的情形也是这样。在北半球，由于右轨所受压力大于左轨，因而磨损较甚。南半球的情况与此相反，河流左岸冲刷较甚，而双线铁路的左轨磨损较甚。由于这个过程极为复杂，涉及微分知识及坐标系建立，这里就不进一步讨论了。

3．3．3、用实验方法证明在非惯性系中加入惯性力的必要性。

在一列以加速度a_1做直线运动的车厢里，有一个质量为 m 的小球，放在光滑的桌面上，如图 3-3-2 所示，相对于地面惯性系来观测，小球保持静止状态，小球所受合外力为零，符合牛顿运动定律，相对于非惯性系的车厢来观测，小球以加速度

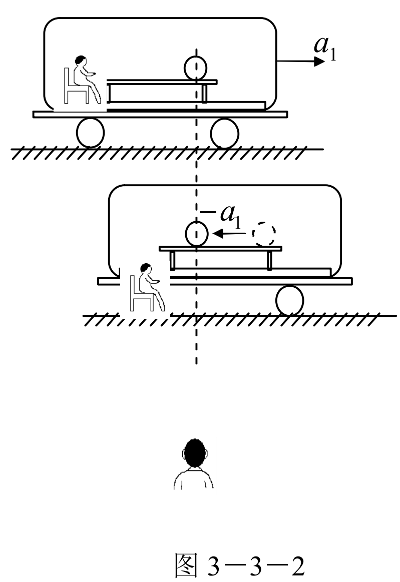

图 3－3－2

$-a_1$向后运动，而小球没有受到其它物体对他的力的作用，牛顿运动定律不再成立。

不过，车厢里的人可以认为小球受到一向后的力，把牛顿定律写为$f_{惯}=-ma_1$。这样的力不是其它物体的作用，而是参照系是非惯性系所引起的，称为惯性力．如果一非惯性系以加速度a_1相对惯性系而运动，则在此非惯性系里，任一质量为 m 的物体都受到一惯性力$-ma_1$，把惯性力$-ma_1$计入在内，在非惯性里也可以应用牛顿定律．当汽车拐弯做圆周运动时，相对于地面出现向心加速度a_1，相对于车厢人感觉向外倾倒，常说受到了离心力，正确地说应是惯性离心力，这就是非惯性系中出现的惯性力。

如图 3-3-3，一物块 A 放在倾角为α的光滑斜面 B 上，问斜面 B 必须以多大的加速度运动，才能保持 A、B 相对静上？

可取 B 作为参照系，A 在此参照系中静止。因为 B 是相对地面有加速度的非惯性参照系，所以要加一个惯性力 f=ma，方向水平向右，a 的大小等于 B 相对地面的加速度。由受力分析图可知

f=ma=mgtga

$\therefore a=g\cdot tg\alpha$

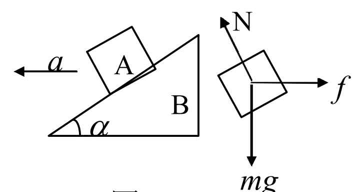

图 3-3-3

§ 3.4 应用牛顿运动定律解题的方法和步骤

应用牛顿运动定律的基本方法是隔离法，再配合正交坐标运用分量形式求解。

解题的基本步骤如下：

(1)选取隔离体，即确定研究对象

一般在求某力时，就以此力的受力体为研究对象，在求某物体的运动情况时，就以此物体为研究对象。有几个物体相互作用，要求它们之间的相互作用力，则必须将相互作用的物体隔离开来，取其中一物体作研究对象。有时，某些力不能直接用受力体作研究对象求出，这时可以考虑选取施力物体作为研究对象，如求人在变速运动的升降机内地板的压力，因为地板受力较为复杂，故采用人作为研究对象为好。

在选取隔离体时，采用整体法还是隔离法要灵活运用。如图 3-4-1 要求质量分别为 M 和 m 的两物体组成的系统的加速度 a，有两种方法，一种是将两物体隔离，得方程为

$mg-T=ma$

$T-\mu Mg=Ma$

另一种方法是将整个系统作为研究对象，得方程为

$mg-\mu Mg=(m+M)a$

显然，如果只求系统的加速度，则第二种方法好；如果还要求绳的张力，则需采用前一种方法。

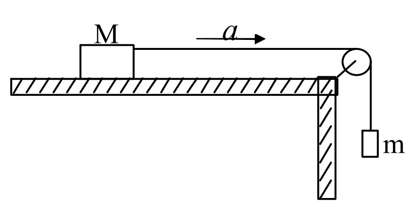

图 3-4-1

(2)分析物体受力情况：分析物体受力是解动力学问题的一个关键，必须牢牢掌握。

①一般顺序：在一般情况下，分析物体受力的顺序是先场力，如重力、电场力等，再弹

力，如压力、张力等，然后是摩擦力。并配合作物体的受力示意图。

大小和方向不受其它力和物体运动状态影响的力叫主动力，如重力、库仑力；大小和主向与主动力和物体运动状态有密切联系的力叫被动力或约束力，如支持力、摩擦力。这就决定了分析受力的顺序。如物体在地球附近不论是静止还是加速运动，它受的重力总是不变的；放在水平桌面上的物体对桌面的压力就与它们在竖直方向上有无加速度有关，而滑动摩擦力总是与压力成正比。

②关于合力与分力：分析物体受力时，只在合力或两个分力中取其一，不能同时取而说它受到三个力的作用。一般情况下选取合力，如物体在斜面上受到重力，一般不说它受到下滑力和垂直面的两个力。在一些特殊情况下，物体其合力不能先确定，则可用两分力来代替它，如图 3-4-2 横杆左端所接铰链对它的力方向不能明确之前，可用水平和竖直方向上的两个分力来表示，最后再求出这两个分力的合力来。

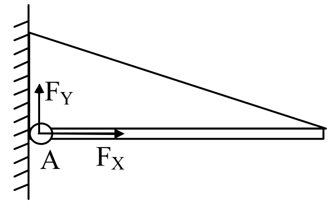

图 3-4-2

③关于内力与外力：在运用牛顿第二定律时，内力是不可能对整个物体产生加速度的，选取几个物体的组合为研究对象时，这几个物体之间的相互作用力不能列入方程中。要求它们之间的相互作用，必须将它们隔离分析才行，此时内力转化成外力。

④关于作用力与反作用力：物体之间的相互作用力总是成对出现，我们要分清受力体与施力体。在列方程解题时，对一对相互作用力一般采用同一字线表示。在不考虑绳的质量时，由同一根绳拉两个物体的力经常作为一对相互作用力处理，经过不计摩擦的定滑轮改变了方向后，我们一般仍将绳对两个物体的拉力当作一对相互作用力处理。

(3)分析物体运动状态及其变化

①运用牛顿定律解题主要是分析物体运动的加速度 a，加速度是运动学和动力学联系的纽带，经常遇到的问题是已知物体运动情况通过求 a 而求物体所受的力。

②针对不同的运动形式和运用不同的公式，在分析物体运动状态时有不同的要求。对于静力学的问题，其加速度为零，速度为零或常量；对于牛顿运动定律问题，主要是分析加速度，要注意其瞬时性，匀变速运动可任取一点分析，变加速运动则必须找到对应点分析；如果是运用动量定理或动能定理，则必须分析物体所受的力的冲量或所做的功，还要分析运动始末两态的动量或动能。

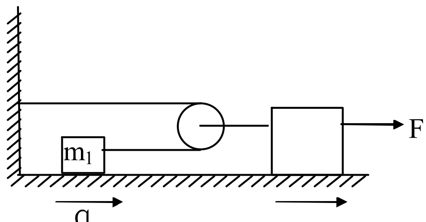

图 3－4－3

③要注意物体运动的加速度与速度的大小方向的关系，也要注意两者大小不一定同时为零，如竖直上抛的最高点，速度为零加速度不为零，在振动的平衡位置速度最大加速度为零；两者的方向也不一定相同，如加速上升，两者方向相同，减速上升，两者方向相反。

④对于由几个物体组成的连接体的运动，要分析各个物体的加速度。各个物体的加速度之间的关系的求法是：一般假设各物体初速为零，由公式 $s = at^2/2$，再由各物体的位移的比值找出它们加速度之间的关系来。

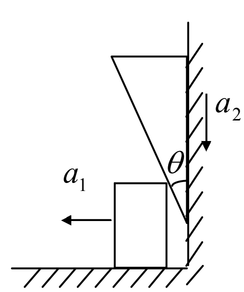

图 3-4-4

如图 3-4-3，显然有 $s_1 = 2s_2$，故有

$a_1 / a_2 = s_1 / s_2 = 2$，

所以 $$a_1 = 2a_2$$

图 3-4-4，$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{s_1}{s_2} = tg\theta$$

故有

$a_1 = a_2 tg\theta$

如图 3-4-5 设 $m_1 > m_2 + m_3, m_2 < m_3$，我们以地球为参照物，三者的加速度如图所示，为了找出三个加速度大小的关系，我们设由于 m_2 和 m_3 的运动，使绳有沿动滑轮边沿的加速度 a'，根据有关的相对运动规律有

$a_2 = a_{2地} = a_{2轮} + a_{轮地} = a' + a_1$

$a_2 = a_{3地} = a_{3轮} + a_{轮地} = a' - a_1$

两式相减消去 a' 得到三个加速度之间的关系式为

$a_2 - a_3 = 2a_1$

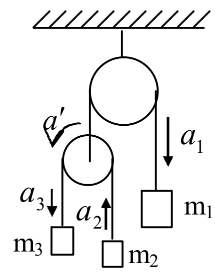

图 3-4-5

⑤若不知加速度 a 的方向，则可事先假设加速度的方向，按假设算出来的加速度若为正，则说明假设正确；若计算出来的加速度为负，则不能简单地认为加速度的方向与假设的方向相反，一般情况下，应该换一个方向重新计算，因为运动方向不同时，物体所受的力有可能不同，特别是有摩擦力的时候。

(4)建立坐标系

①通常我们采用惯性坐标系，一般不加申明就以地球为参照物，有时为了方便，采用非惯性坐标系。

②坐标也有瞬时性，如圆锥摆所建立的坐标就是指某一瞬间的。

③通常采用直角坐标系，对曲线运动常用自然坐标，即取切向和法向为两坐标轴的方向，切向加速度反映了速度大小的变化，法向加速度反映了速度方向的变化。

④选取坐标轴，最好能以加速度方向为一轴的方向，这样可以使方程较为简洁；如果由于解题需要而两轴都不与加速度同向，则要注意将加速度依坐标分解列入方程。

(5)列方程和解方程

①根据物理意义列出方程，对于正交坐标，一般是对每一个隔离体列出一组坐标数的方程。

②出于解题的需要，一般是方程数与未知数的个数相等，若方程数少于未知数的个数，则要注意题目的隐含条件，或者用特殊方法可以解出。

③不同的题型要注意有不同的解法，有些题目可以一次性的列出方程，有些题目必须走一步看一步，逐步推出结论。

(6)验算作答

①验算是必不可少的一步，要根据物理意义和题设条件剔除多余的根。

②为了快速检验，可以采用检验答案的量纲的方法。

③正负符号在物理问题中有广泛的应用，要特别注意正负号的物理意义。

§3.5 力和运动的关系

判断一个物体做什么运动，一要看它受到什么外力，二要看它的初速与外力方向的关系。物体运动某时刻的加速度总与该时刻所受的合外力相对应，而某时刻的速度沿轨迹切线方向，与该时刻所受的力没有直接对应关系。

(1)物体受平衡力的作用：$\sum F = 0, a = 0$。当$V_0 = 0$时，物体静止：当$V_0 \neq 0$时，物体以V_0作匀速直线运动。

(2)物体作直线运动：$\sum F$=恒量，$a =$恒量，物体作匀变速运动。当$V_0 = 0$时，作初速为零的匀加速直线运动；当$V_0 \neq 0$时，如果$\sum F$与V_0同向，物体作匀加速直线运动，如果$\sum F$和V_0反向，物体作匀减速直线运动。

$\sum F$=变量，a=变量，物体将做变加速运动。如果方向不变大小变，物体作如有空气阻力的竖直上抛运动；若大小和方向都变，物体的运动更要具体分析。

(3)物体作曲线运动

①物体作曲线运动的条件：当物体所受的合外力的方向与物体运动的速度方向不在一条直线上时，物体将作曲线运动。在运动过程中，物体的速度方向是在曲线某点的切线方向上，合力在切线方向的分量产生切向加速度，它描述速度大小改变的快慢；合力在法线方向（径向）的分量产生法向加速度，它描述速度方向改变的快慢。

②抛物线运动：当物体所受的合外力大小和方向都不变，而速度与合外力方向不在同一直线上时，物体作轨迹为抛物线的运动。如物体只受重力作用的抛体运动和带电粒子在匀强电场中的运动。当合力与初速的方向垂直时，物体做类平抛运动；当合力与初速的夹角小于90º时，物体作类下抛运动；当合力与初速的夹角大于90º时，物体作类上抛运动。

③圆周运动：当物体所受的合外力的大小保持不变，而速度与合外力保持垂直，则物体做匀速圆周运动。

在匀速圆周运动中，切向加速度为零，法向加速度即向心加速度，故此时合外力就叫向心力

$$F = mV^2 / r \quad 或 \quad \sum F = mr\omega^2$$

向心力是从力的作用效果命名的力，任何一个力或几个力的合力，只要它的作用效果是使质点产生向心加速度，这个力或这几力的合力就叫向心力。不要在分析物体所受的重力、弹力、摩擦力之外再无中生有地受到一个向心力。

做非匀速圆周运动的质点所受到的合外力，一定在法向上有一个分量，这一分量即为向心力；在切向上也有一个分量，这一分量使速度大小有变化。

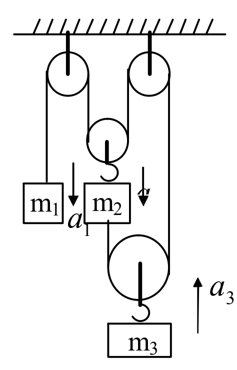

图 3-5-1

所谓离心力是对作圆周运动的物体给提供它的向心力的另一物体的作用力，如果做圆周运动的物体的向心力是由两个或两个以上的物体共同提供的，则离心力必作用在这两个或两个以上的相应的物体上，所以，除了只有一个物体提供向心力的情况外，一般不能把离心力说成是向心力的反作用力。当合外力提供的向心力小于物体所需的向心力时，物体将远离原来的轨道作离心运动；当合力提供的向心力在某时刻消失时，物体将沿该时刻的速度方向飞出，这些现象的实质是物体的惯性所致，而不是所谓离心力的作用。在非惯性系中提出的惯性离心力这一虚拟力，也与上述离心力根本不同，决不能混淆。

如下是一些实际应用问题：

两个或两个以上的物体在某一种力（一般是弹力或摩擦力）作用下一起运动，叫做联接体，解联接体的问题一般要用隔离法，即把某一个物体隔离出来进行分析，有时联接体中的各个物体具有不同的加速度，必须确定它们的加速度之间的关系。

如图 3-5-1 所示的装置，细绳不可伸长，三个物体的加速度方向如图所示，那么它们的加速度$a_1,a_2和a_3$之间有什么关系呢？

先设m_2物体不动，那么当m_1物体下降h_1时m_3物体将上升$h_1/2$；再设m_1物体不动，当m_2物体下降h_2,m_3物体将上升$h_2/2$。当上述两种运动结合起来，则实际上m_1物体下降h_1,m_2物体下降h_2,m_3物体应是上升$h_3=\dfrac{h_1+h_2}{2}$。它们对时间的变化率（即速度）之间也有上述关联，即

$$v_3=\frac{1}{2}(v_1+v_2)$$

它们的加速度之间的关系也同样是

$$a_3=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$$

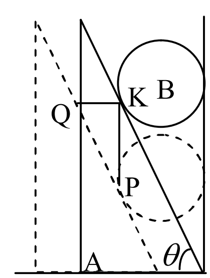

图 3-5-2

再如图 3-5-2 所示的物体系，由于 B 球受重力作用，使 B 球向下做加速运动，同时三角形劈 A 向左做加速运动，设球和劈在原来的 K 点接触，经过时间Δt之后，球上的 K 点移动到了 P 点处，劈上的 K 点移到了 Q 点处，显然△KPQ 和劈的剖面三角形是相似的，即∠KQP 等于劈的底角θ，因此

$$PK/QK=tg\theta$$

同样，任何时刻都有

$$v_B/v_A=tg\theta$$

$$a_B/a_A=tg\theta$$

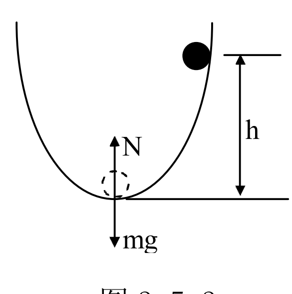

图 3-5-3

如图 3-5-3 所示，一个质量为 m 的小球沿着抛物线$y=Ax^2$型的轨道从 h 米高处由静止开始滑下，试求小球到达轨道底部时对轨道的压力。小球到达底部时的速度

$$v=\sqrt{2gh}$$

根据第二讲的讨论可知，抛物线$y = Ax^2$底部的曲率半径

$$l = 1/(2A)$$

小球在底部时受到二个力：重力 mg 和轨道弹力 N，因此

$$N - mg = m\frac{v^2}{l}$$

$$N = mg(1 + 2h/l) = mg(1 + 4Ah)$$

两个质量均为 m 的小球，用细绳连接起来，置于光滑平面上，绳恰好被拉直。用一个恒力 F 作用在连绳中点，F 的方向水平且垂直于绳的初始位置（图 3-5-4），F 力拉动原来处于静止状态的小球。问：在两小球第一次相撞前的一瞬间，小球在垂直于 F 的作用线方向（设为 y 方向）上的分速度多大？

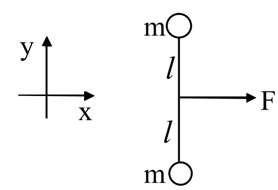

图 3-5-4

由于绳的张力和方向都在不断改变，因此两小球的运动是比较复杂的，我们应用两种手段使复杂的问题简化。

一是先研究小球在某一方向即 F 作用的线方向（设为 x 方向）上的运动：当绳与作用线成a角时绳上的张力$T = \dfrac{F}{2\cos a}$，这个张力使小球产生的在 x 方向上的加速度为

$$a_x = T \cdot \cos a / m = F/(2m)$$

可见，a_x和a无关，即小球在 x 方向上做匀加速运动（图 3-5-5）

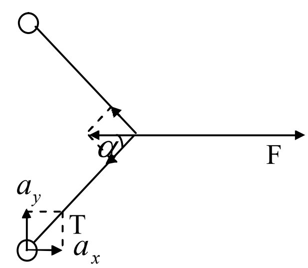

图 3-5-5

二是只考虑小球运动的初、末两个状态：设 F 的作用点共移动了 s 距离，则小球在 x 方向上运动了$(s - l)$的距离，小球碰撞前在 x 方向上的速度为

$$v_x = \sqrt{2a_x(s - l)} = \sqrt{F(s - l)/m}$$

在这段过程中，F 力做的功为F_s，根据动能定理

$$F_S = 2 \times \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

$$F_S = F(s - l) + mv_y^2$$

$$v_y = \sqrt{Fl/m}$$

应该说明的是，因为动能定理是从牛顿第二定律推导出来的，因此只适用于惯性系。虽然相对不同的惯性系，F 做功的位移和物体的速度都是不一样的，但动能定理却仍然成立。

§3.6　　万有引力　　天体的运动

3．6．1、万有引力

任何两个物体间存在一种称为万有引力的相互作用力。万有引力是自然界中已发现的四种相互作用（万有引力相互作用、电磁相互作用、弱相互作用和强相互作用）之一。两个质点间的万有引力，其大小与两质点的质量乘积成正比，与两质点距离的平方成反比，方向沿

两质点的连线方向，其表示式为

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中 G 称为万有引力常量，其值为 $6.67\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

万有引力公式只适用于质点，当物体的几何线度不能忽略时，可以把它们分割成线度可略的小部分，两物体间每一小部分之间的万有引力的合力便就是两物体间的万有引力。可以证明两个质量均匀的球体之间的引力。可以用万有引力定律计算，只是计算式中的 r 为两球心间的距离。质量为 m 的均匀分布的球壳对球壳外任一质点的万有引力，等于质量为 m 的质点处于球心处与该质点间的万有引力，它对球壳内的任一质点的万有引力则为零。

测得的地球表面上物体所受到的重力，是地球对物体引力的一个分量，由于地球并不严格是个球体，质量分布也不均匀，加之地球的自转运动，使得同一物体，在地球表面不同位置处受到的重力略有不同。

万有引力定律的应用

①天体表面的重力加速度 g：设天体质量为 M 且均匀分布，天体为圆球体且半径为 R，物体质量为 m，则

$$mg = G\frac{Mm}{R^2}$$ 故 $$g = G\frac{M}{R^2}$$

②关于天体质量和平均密度的计算：设质量为 m 的行星绕质量为 M 的恒星作匀速圆周运动的公转，公转的半径为 r，周期为 T，由牛顿定律，恒星对行星的万有引力就是行星绕恒星作匀速圆周运动的向心力，故有

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

由此可得恒星的质量为

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

设恒星的球半径为 R，则它的平均密度为

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\pi r^3}{GT^2R^3}$$

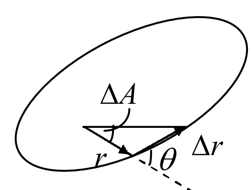

图 3-6-1

这个公式也适用于卫星绕行星作圆周运动的情况。如设近地人造卫星的周期为 T，因有 $r\approx R$，上式就可以写成

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}$$

这就很容易求出地球的平均密度了。

3．6．2、天体的运动

开普勒根据前人积累的行星运动观察资料。总结出关于行星运动的三定律——开普勒三

定律。

第一定律：行星围绕太阳的运动轨道为椭圆，太阳在椭圆的一个焦点上。

第二定律：行星与太阳的连线在相等时间内扫过相等的面积。

下面举一个例子详加说明：

为用数学式子表述第二定律，设径矢 r 在Δt时间内扫过的面积为ΔA，则面积速度为$\Delta A/\Delta t$，由图 3-6-1 可知，

$$\Delta A=\frac{1}{2}r\Delta r\sin\theta$$

故面积速度为

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}r\sin\theta\frac{\Delta r}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv\sin\theta=\text{常量}$$

式中 v 为行星运动的线速度，θ为径矢 r 与速度 v 方向之间的夹角。当行星位于椭圆轨道的近日点或远日点时，速度 v 的方向与径矢 r 的方向垂直，即θ=90º，故

$$\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{1}{2}r_{近}v_{近}=\frac{1}{2}r_{远}v_{远}$$

第三定律：各行星绕太阳运动的周期平方与轨道半长轴立方的比值相同，即

$$\frac{T^2}{a^3}=k$$

开普勒定律不仅适用于行星绕太阳的运动。也适用于卫星绕行星的运动。

当半长轴 a 与半短轴 b 相等时，椭圆成为圆。由开普勒第二定律可知，圆轨道运动必为匀速圆周运动，万有引力提供向心力。

对于绕地球作半径为 r 的匀速圆周运动的卫星，由牛顿第二定律和万有引力定律可得

$$\frac{GM_{地}m}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$$

根据地球表面物体重力与引力的关系

$$mg=G\frac{M_{地}m}{R^2}$$

R 为地球半径卫星速率为

$$v=\frac{GM_{地}}{r}=\sqrt{\frac{R^2g}{r}}$$

对于贴着地球表面运行的卫星。$r\approx R$

$$v=\sqrt{Rg}=7.9\,km/s$$

这就是第一宇宙速度，也就是发射卫星必须具有的最小速度

利用能量关系，可求出从地球表面发射的宇宙飞般，为能挣脱地球引力的束缚，其发射速度必须满足

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM_{地}m}{R} \geq 0$$

$$r \geq \sqrt{\frac{GM_{地}m}{R}} = \sqrt{2Rg}$$

称 $v = \sqrt{2Kg} = 11.2\,km/s$ 为第二宇宙速度。

下面举一个例子详加说明：

新发现一行星，其星球半径为 6400km，且由通常的水形成的海洋覆盖着它的所有表面，海洋的深度为 10km。学者们对该行星进行探查时发现。当把试验用的样品浸入行星海洋的不同深度时，各处的自由落体加速度以相当高的精确度保持不变，试求这个行星表面处的自由落体加速度。已知万有引力常数为 $G = 6.67 \times 10^{-11} N \cdot m^2/kg^2$。

解 1：如图 3-6-2 以 R 表示此星球（包括水层）的半径，M 表示其质量，h 表示其表层海洋的深度，r 表示海洋内任一点 A 到星球中心 O 的距离，R_0 表示除表层海洋外星球内层的半径。则有 $R \geq r \geq R_0$，且 $R_0 + h = R_0$，以 $\rho_{水}$ 表示水的密度，则此星球表层海洋中水的总质量为

$$m = \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R_0^3\right)\rho_{水}$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho_{水}(3R^2h - 3Rh^2 + h^3)$$

①

由于 $R >> h$，故①式可略去其中 h 的高次项面是近似写为

$$m = 4\pi\rho_{水}R^2h$$

②

根据均匀球体表面处重力加速度的公式，可得此星球表层海洋的底面和表面处的重力加速度分别为

$$g_{表} = \frac{GM}{R^2}$$

$$g_{底} = \frac{G(M-m)}{R_0^2}$$

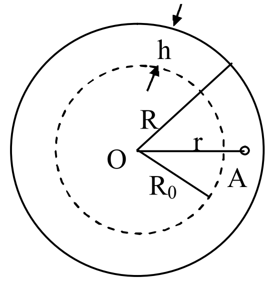

图 3-6-2

依题述有 $g_{表} = g_{底}$, 即

$$\frac{M}{R^2} = \frac{M-m}{R_0^2} = \frac{M-m}{(R-h)^2}$$

整理上式可解得

$$M = \frac{R^2m}{2Rh - h^2}$$

③

由于 $R >> h$，故近似取 2Rh-$h^2 \approx 2Rh$, 则③式可写为

$$M=\frac{Rm}{2h}$$ ④

由④和②式得此星球表面的重力加速度为

$$g_{表}=\frac{GM}{R^2}=2\pi G\rho_{水}R_0$$ ⑤

以 G=$6.67\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$、$\rho_{水}=1.0\times10^3\,kg/m^3$、$R=6.4\times10^6\,m$ 代入⑤式，得

$$g_{表}=2.7\,m/s^2$$

解 2：设行星的内层（即半径为 R_0 的球体部分）的平均密度为 $\rho=\rho_{水}+\rho_0$，则可将该半径为 R_0 的球体视为由一个均匀的水球（密度为 $\rho_{水}$、半径为 R_0）和一个密度为 ρ_0 半径为 R_0 的球叠加而成。则在水球壳层内的重力加速度应由这两个球分别产生的加速度叠加而成。

如图 3-6-2，对于水球壳层中的任一点 A，以 g_1 表示上述水球在该处形成的重力加速度，则有

$$g_1=\frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}r^3}{r^2}=\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}r_0$$

由上式可见，g_1 随 r 的增加而增加，当 r 增加为 r+△r 时，g_1 的增加量为

$$\Delta g_1=\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}(r+\Delta r)-\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}r=\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}\Delta r$$

又以 g_0 表示上述的密度为 ρ_0 的球在 A 点产生的重力加速度，则有

$$g_0=\frac{\frac{4}{3}\pi G\rho_0R_0^3}{r^2}$$

由上式可见，g_0 随 r 的增加而减少，当 r 增加为 r+△r 时，g_0 的增加量（为一负值，表明其实际上是减少）为

$$\Delta g_0=\frac{4}{3}\pi G\rho_0R_0^3\left[\frac{1}{(r+\Delta r)^2}-\frac{1}{r^2}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi G\rho_0R_0^3\cdot\frac{r^2-(r+\Delta r)^2}{(r+\Delta r)^2r^2}$$

$$\approx-\frac{8}{3}\pi G\rho_0R_0^3\cdot\frac{\Delta r}{r^3}$$

上式演算中利用了近似关系 $2r\Delta r+(\Delta r)^2\approx2r\Delta r$ 和 $(r+\Delta r)^2\approx r^2$。由于要求在水层内重力加速度 g 为恒量，即 $g=g_1+g_0$ 不随 r 变化而变化，故应有

$$\Delta g_1+\Delta g_0=0$$

即

$$\frac{4}{3}\pi G\rho_{水}\Delta r=\frac{8}{3}\pi G\rho_0\frac{R_0^3}{r^3}\Delta r$$

近似取 r= R_0，乃得

$$\rho_0 = \frac{1}{2}\rho_{水}$$

则行星内层密度为

$$\rho = \rho_{水} + \rho_0 = \frac{3}{2}\rho_{水}$$

由上可得此行星内外两层分界面处的重力加速度（亦即行星表面处的重力加速度）为

$$g = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi R_0^3 \rho}{R_0^2} = 2\pi G R_0 \rho_{水}$$
$$= 2.7\, m/s^2$$