中国数学奥林匹克(CMO)历届试题及解答

1986-2005

第一届中国数学奥林匹克(1986年)

天津 南开大学

1.已知 $a_1, a_2, \ldots, a_n$为实数, 如果它们中任意两数之和非负,那么对于满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

的任意非负实数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 有不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$$

成立.请证明上述命题及其逆命题.

证明:原命题的证明:由$0 \leqslant x_i \leqslant 1, x_i - x_i^2 \geqslant 0, x_i \geqslant x_i^2 (i = 1, 2, \ldots, n)$.

(1)若$a_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$,则显然有$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \geqslant a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2$;

(2)否则至少存在一个$a_i < 0$,由对称性不妨设$a_1 < 0$. 又因为$a_1, a_2, \ldots, a_n$中任两数之和非负,所以$a_i + a_1 \geqslant 0, a_i \geqslant -a_1 > 0 (i = 2, 3, \ldots, n)$.

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n - a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - \cdots - a_nx_n^2 \\
= \quad & a_1(x_1 - x_1^2) + a_2(x_2 - x_2^2) + \cdots + a_n(x_n - x_n^2) \\
\geqslant \quad & a_1(x_1 - x_1^2) + (-a_1)(x_2 - x_2^2) + \cdots + (-a_1)(x_n - x_n^2) \\
= \quad & (-a_1)(x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2 - x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\
= \quad & (-a_1)(x_1^2 - x_1 + (1 - x_1) - x_2^2 - \cdots - x_n^2) \\
= \quad & (-a_1)((1 - x_1)^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2) \\
= \quad & (-a_1)((x_2 + \cdots + x_n)^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2) \geqslant 0
\end{aligned}$$

最后一步是由于$x_2, x_3, \ldots, x_n > 0, (x_2 + \cdots + x_n)^2 = x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \sum\limits_{2 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j \geqslant x_2^2 + \cdots + x_n^2$.

逆命题的证明:对于任意的$1 \leqslant i < j \leqslant n$,令$x_i = x_j = \frac{1}{2}$,其余$x_k$均等于0.则$\frac{1}{2}(a_i + a_j) \geqslant \frac{1}{4}(a_i + a_j)$.

$\therefore a_i + a_j \geqslant 0$,即任两数之和非负.证毕.

2.在三角形ABC中,BC边上的高$AD = 12$,$\angle A$的平分线$AE = 13$,设BC边上的中线$AF = m$,问m在什么范围内取值时,$\angle A$分别为锐角,直角,钝角?

解:设O为$\triangle ABC$的外心,不妨设$AB > AC$,$\angle B$为锐角.

则OF垂直平分线段BC,由外心的性质,$\angle C$为锐角时,$\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle C) = 90^\circ - \angle C$.

又因为$AD \perp BC$,$\therefore \angle CAD = 90^\circ - \angle C$,$\therefore \angle OAB = \angle DAC$.

类似地,当$\angle C$为直角或钝角时也有$\angle OAB = \angle DAC$.

由AE平分$\angle BAC$,$\angle BAE = \angle CAE$.$\therefore \angle OAE = \angle DAE$.(由于$F, D$在$E$两侧).

$\angle A$为锐角时,O, A在BC同侧,$\angle FAE < \angle OAE = \angle DAE$;

$\angle A$为直角时,O, F重合,$\angle FAE = \angle OAE = \angle DAE$;

$\angle A$为钝角时,O, A在BC异侧,$\angle FAE > \angle OAE = \angle DAE$.

由正弦定理$\frac{\sin\angle FAE}{\sin\angle DAE}=\frac{FE}{DE}\times\frac{AD}{AF}$.其中$DE=\sqrt{AE^2-AD^2}=5$,

$FE=FD-DE=\sqrt{AF^2-AD^2}-DE=\sqrt{m^2-12^2}-5>0$. $\therefore m>13$,

且$\angle A$为锐角等价于$\frac{\sqrt{m^2-12^2}-5}{5}\times\frac{12}{m}<1$;

$\angle A$为直角等价于$\frac{\sqrt{m^2-12^2}-5}{5}\times\frac{12}{m}=1$;

$\angle A$为钝角等价于$\frac{\sqrt{m^2-12^2}-5}{5}\times\frac{12}{m}>1$.

解得当$13<m<\frac{2028}{119}$时,$\angle A$为锐角;

当$m=\frac{2028}{119}$时,$\angle A$为直角;

当$m>\frac{2028}{119}$时,$\angle A$为钝角.

3.设$z_1,z_2,\ldots,z_n$为复数,满足

$$|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=1.$$

求证:上述n个复数中,必存在若干个复数,它们的和的模不小于$\frac{1}{6}$.

证明:设$z_k=x_k+y_k\mathrm{i}(x_k,y_k\in\mathbb{R},k=1,2\ldots,n)$

将所有的z_k分为两组X,Y.若$|x_k|\geqslant|y_k|$,则将z_k放入X中;若$|y_k|\geqslant|x_k|$,则将z_k放入Y中. 其中必有一组中所有复数模长之和不小于$\frac{1}{2}$.不妨设为X.

再将X中的复数分为两组A,B.若$x_k\geqslant 0$,则将z_k放入A中;若$x_k\leqslant 0$,则将z_k放入B中. 其中必有一组中的所有复数摸长之和不小于$\frac{1}{4}$.不妨设为A.

则$\sum\limits_{z_k\in A}|z_k|\geqslant\frac{1}{4}$,即$\sum\limits_{z_k\in A}\sqrt{x_k^2+y_k^2}\geqslant\frac{1}{4}$.

而对于$z_k\in A$,$x_k^2\geqslant y_k^2$,$\sqrt{x_k^2+y_k^2}\leqslant\sqrt{2}x_k$.

$\therefore\sum\limits_{z_k\in A}x_k\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}$.$\therefore|\sum\limits_{z_k\in A}z_k|=|\sum\limits_{z_k\in A}x_k+\mathrm{i}\sum\limits_{z_k\in A}y_k|\geqslant\sum\limits_{z_k\in A}x_k\geqslant\frac{1}{4\sqrt{2}}$.

而$4\sqrt{2}<6$, $\therefore|\sum\limits_{z_k\in A}z_k|\geqslant\frac{1}{6}$.

即A中复数之和的模不小于$\frac{1}{6}$.证毕.

另证:设$z_k=x_k+y_k\mathrm{i}(x_k,y_k\in\mathbb{R},k=1,2\ldots,n)$

则$|z_k|=\sqrt{x_k^2+y_k^2}\geqslant|x_k|+|y_k|$.

$\therefore\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k|+|y_k|\geqslant 1$.

$\therefore|\sum\limits_{x_k\geqslant 0}x_k|+|\sum\limits_{x_k<0}x_k|+|\sum\limits_{y_k\geqslant 0}y_k|+|\sum\limits_{y_k<0}y_k|\geqslant 1$.

其中必有一项不小于$\frac{1}{4}$,不妨设为第一项,则$|\sum\limits_{x_k\geqslant 0}x_k|\geqslant\frac{1}{4}$.

$\therefore|\sum\limits_{x_k\geqslant 0}z_k|=|\sum\limits_{x_k\geqslant 0}x_k+\mathrm{i}\sum\limits_{x_k\geqslant 0}y_k|\geqslant|\sum\limits_{x_k\geqslant 0}x_k|\geqslant\frac{1}{4}>\frac{1}{6}$.证毕.

4.已知:四边形$P_1P_2P_3P_4$的四个顶点位于三角形ABC的边上.

求证:四个三角形$\triangle P_1P_2P_3,\triangle P_1P_2P_4,\triangle P_1P_3P_4,\triangle P_2P_3P_4$ 中,至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$的面积的四分之一.

证明:有两种情况:(1)四个顶点在两条边上;(2)四个顶点在三条边上.

(1)不妨设P_1,P_4在AB上,P_2,P_3在AC上,P_1,P_2分别在AP_4,AP_3上. 将B移至P_4,C移至P_3,三角形ABC的

面积减小,归为情形(2).

(2)不妨设P_1在AB上,P_2在AC上,P_3,P_4在BC上,P_3在P_4C上.

(2.1)若$P_1P_2 \parallel BC$,设$\frac{AP_1}{AB}=\frac{AP_2}{AC}=\lambda, P_1P_2=\lambda BC$.$P_1P_2$到$BC$的距离为$(1-\lambda)h$,$h$为三角形$ABC$中$BC$边上的高的长度.

$\therefore S_{\triangle P_1P_2P_3}=\lambda(1-\lambda)S_{\triangle ABC}\leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

(2.2)若P_1P_2不平行于BC,不妨设P_1到BC的距离大于P_2到BC的距离. 过P_2作平行于BC的直线交AB于E,交P_1P_4于D.则$S_{\triangle P_1P_2P_3}, S_{\triangle P_4P_2P_3}$中有一个不大于$S_{\triangle DP_2P_3}$,也就不大于$S_{\triangle EP_2P_3}$.

由(2.1)知$S_{\triangle EP_2P_3}\leqslant \frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.则$S_{\triangle P_1P_2P_3}, S_{\triangle P_4P_2P_3}$中有一个不大于$\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.证毕.

5.能否把1,1,2,2,...,1986,1986这些数排成一行, 使得两个1之间夹着1个数,两个2之间夹着2个数,..., 两个1986之间夹着1986个数.请证明你的结论.

解:不能.假设可以做出这样的排列,将已排好的数按顺序编号为1,2,...,3972.

当n为奇数时,两个n的编号奇偶性相同;当n为偶数时,两个n的编号奇偶性不同. 而1到1986之间有993个偶数,所以一共有$2k+993$个编号为偶数的数.($k\in\mathbb{N}^*$) 但是1到3972之间有1986个偶数,$k=496.5$.矛盾.所以不能按要求排成这样一行.

6.用任意的方式,给平面上的每一点染上黑色或白色. 求证:一定存在一个边长为1或$\sqrt{3}$的正三角形,它的三个顶点是同色的.

证明:(1)若平面上存在距离为2的两个点A,B异色,设O为它们的中点,不妨设A,O同色. 考虑以AO为一边的正三角形AOC,AOD,若C,D中有一个与A,O同色,则该三角形满足题意. 否则BCD为边长$\sqrt{3}$的同色正三角形.

(2)否则平面上任两个距离为2的点均同色,考虑任意两个距离为1的点,以他们连线为底,2为腰长作等腰三角形,则任一腰的两顶点同色. 所以三个顶点同色,即任两个距离为1的点同色.所以平面上任意一个边长为1的正三角形三个顶点同色.证毕.

第二届中国数学奥林匹克(1987年)

北京 北京大学

1.设n为自然数,求证方程$z^{n+1}-z^n-1=0$有模为1的复根的充分必要条件是 $n+2$可被6整除.

证明:当$6|n+2$时,令$z=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},z^6=1,|z|=1$.

$\therefore z^{n+1}-z^n-1=e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}-1=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})-(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i})-1=0.$

$\therefore z^{n+1}-z^n-1=0$有模为1的复根.

若$z^{n+1}-z^n-1=0$有模为1的复根$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\cos\theta$.

则$z^{n+1}-z^n-1=(\cos(n+1)\theta-\cos n\theta-1)+\mathrm{i}(\sin(n+1)\theta-\sin n\theta)=0.$

$\therefore \cos(n+1)\theta-\cos n\theta-1=-(2\sin\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}+1)=0.$

$\sin(n+1)\theta-\sin n\theta=2\cos\frac{2n+1}{2}\theta\sin\frac{\theta}{2}=0.$

$\therefore \cos\frac{2n+1}{2}\theta=0,\sin\frac{2n+1}{2}\theta=\pm1,\sin\frac{\theta}{2}=\pm\frac{1}{2}$, 设$\frac{\theta}{2}=\varphi$.

(1)$\sin\varphi=\frac{1}{2}$,$\sin(2n+1)\varphi=-1$. $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{6}$或$2k\pi+\frac{5\pi}{6},k\in\mathbb{Z}$.

$(2n+1)\varphi=(2l+\frac{3}{2})\pi(l\in\mathbb{Z})$. $\therefore (2n+1)(2k+\frac{1}{6})=2l+\frac{3}{2},\frac{2n+1}{6}=2t+\frac{3}{2},n=6t+4(t\in\mathbb{Z})$.

或$(2n+1)(2k+\frac{5}{6})=2l+\frac{3}{2},\frac{5(2n+1)}{6}=2t+\frac{3}{2},5|4t+3,t\equiv3\pmod 5(t\in\mathbb{Z})$.

设$t=5s+3$,则$n=6s+4$,总有$6|n+2$.

(2)$\sin\varphi=-\frac{1}{2}$,$\sin(2n+1)\varphi=1$.显然以$-\varphi$代φ即有(1).所以$6|n+2$.证毕.

2.把边长为1的正三角形ABC的各边都n等分,过各分点平行于其它两边的直线, 将这三角形分成若干个小三角形,这些小三角形的顶点都称为结点, 并且在每一结点上放置了一个实数.已知:

(1)A,B,C三点上放置的数分别为a,b,c.

(2)在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中, 两组相对顶点上放置的数之和相等.

试求:(1)放置最大数的点和放置最小数的点之间的最短距离.

(2)所有结点上数的总和S.

解:(1)不难证明同一直线上相邻三个结点上放置的数中间一个为两边的等差中项,所以同一直线上的数按顺序成等差数列. 若两端的数相等,则所有的数都相等.否则两端的数为最大的和最小的.

若a,b,c相等,显然所有数都相等,最短距离显然为0.

若a,b,c两两不等,最大的数与最小的数必出现在A,B,C上,最短距离为1.

若a,b,c有两个相等但不与第三个相等,不妨设$a=b>c$,最小的数为c,最大的数出现在线段AB的任意结点上. 当n为偶数时,与C最近的为AB中点,最短距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当n为奇数时,与C最近的为AB中点向两边偏$\frac{1}{2n}$的点,最短距离为$\frac{1}{2}\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}$.

(2)将这个三角形绕中心旋转$\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$弧度,得到的两个三角形也满足题意(2). 将这三个三角形对应结点的数相加形成的三角形也满足(2),三个顶点上的数均为$a+b+c$.由(1)的分析知所有结点上的数均为$a+b+c$. 共$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个结点,$\therefore S=\frac{1}{3}(\frac{1}{2}(n+1)(n+2))(a+b+c)=\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$.

3.某次体育比赛,每两名选手都进行一场比赛, 每场比赛一定决出胜负,通过比赛确定优秀选手, 选手A被确定为优秀选手的条件是:对任何其它选手B, 或者A胜B,或者存在选手C,C胜B,A胜C. 结果按上

述规则确定的优秀选手只有一名, 求证:这名选手一定胜所有其它选手.

证明:假设该优秀选手为A,且存在其他选手胜A.

设B为所有胜A的人中胜的场次最多的一个,由B不是优秀选手,必存在选手C使得C胜B, 且不存在选手D使得B胜D,D胜C. 由B胜A,C也胜A,且C胜B胜过的所有人.C至少比B多胜一场,且C胜A,与B的选取矛盾.所以A胜所有人.

4.在一个面积为1的正三角形内部,任意放五个点,试证:在此正三角形内, 一定可以作三个正三角形盖住这五个点, 这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边, 并且它们的面积之和不超过0.64.

证明:可将0.64换成$\frac{100}{169}+\varepsilon(\varepsilon>0)$.

在面积为1的正三角形ABC中,在AB上取A_1,B_2,AC上取A_2,C_1,BC上取B_1,C_2, 使得$AA_1=AA_2=BB_1=BB_2=CC_1=CC_2=\frac{3}{13}AB$.连结$A_1C_2,A_2B_1,B_2C_1$交于$A_0,B_0,C_0$.

(1)若$\triangle AB_2C_1,\triangle BC_2A_1,\triangle CA_2B_1$中有一个至少包含五个点中的三个,另两个点可分别用面积为$\frac{\varepsilon}{2}$的正三角形覆盖, 面积之和为$(\frac{10}{13})^2+2\times\frac{\varepsilon}{2}=\frac{100}{169}+\varepsilon$.

(2)菱形$AA_1A_0A_2,BB_1B_0B_2,CC_1C_0C_2$中有两个有两个点,另一个中有一个点, 则可用两个边长为$\frac{6}{13}AB$的正三角形和一个面积为ε的正三角形覆盖. 面积之和为$2(\frac{6}{13})^2+\varepsilon<\frac{100}{169}+\varepsilon$.

(3)菱形$AA_1A_0A_2,BB_1B_0B_2,CC_1C_0C_2$中有两个有一个点,另一个中有两个点, 不妨设为$AA_1A_0A_2$,则$B_1B_0C_0C_2$中有一个点,不妨设这个点更靠近$B$, 则可用一个边长为$\frac{6}{13}AB$的正三角形覆盖$AA_1A_0A_2$中两个点, 用一个边长为$\frac{6}{13}AB$的正三角形覆盖$BB_1B_0B_2,B_1B_0C_0C_2$中的点. 用一个面积为$\varepsilon$的正三角形覆盖最后一个点, 面积之和为$(\frac{6}{13})^2+(\frac{8}{13})^2+\varepsilon=\frac{100}{169}+\varepsilon$.证毕.

注:当五个点取为A,B,C,A_0,B_0C_0中点是不难证明不能用三个面积之和为$\frac{100}{169}$的正三角形覆盖这五个点. 即$\frac{100}{169}+\varepsilon(\varepsilon>0)$为最优.

5.设$A_1A_2A_3A_4$是一个四面体, S_1,S_2,S_3,S_4分别是以A_1,A_2,A_3,A_4为球心的球, 它们两两相外切.如果存在一点O, 以这点为球心可作一个半径为r的球与S_1,S_2,S_3,S_4都相切, 还可以作一个半径为R的球和四面体的各棱都相切,求证:这个四面体是正四面体.

证明:设S_i的半径为$r_i(i=1,2,3,4)$,则$A_iA_j=r_i+r_j(1\leqslant i<j\leqslant 4)$.

设O到$A_2A_3A_4$的投影为O_1,由O到A_2A_3,A_3A_4,A_4A_2的距离相等, 得到O_1到$\triangle A_2A_3A_4$的三边距离相等.即O_1为$\triangle A_2A_3A_4$的内心,设O到A_2A_3的投影为B,即O_1到A_2A_3的投影. 而$BA_3=\frac{1}{2}(A_2A_3+A_3A_4-A_2A_4)=r_3$,$OB=R$. 若半径为$r$的球与四个球均外切,则$A_3O=r+r_3$,$(r+r_3)^2=r_3^2+R^2,r_3=\frac{R^2-r^2}{2r}$.若半径为$r$的球与四个球均内切,则$A_3O=r-r_3$,$(r-r_3)^2=r_3^2+R^2,r_3=\frac{r^2-R^2}{2r}$. 类似可求得$r_1,r_2,r_4$均为该值,所以该四面体各条棱长相等为正四面体.

6.m个互不相同的正偶数与n个互不相同的正奇数的总和为1987, 对于所有这样的m与n,问$3m+4n$的最大值是多少?请证明你的结论.

解:设m个正偶数为$a_1<a_2<\cdots<a_m$,n个正偶数为$b_1<b_2<\cdots<b_n$.

$\therefore a_i\geqslant 2i,b_j\geqslant 2j-1$.

$\because 1987=a_1+a_2+\cdots+a_m+b_1+b_2+\cdots+b_n$.

$\therefore 1987\geqslant 2+4+\cdots+2m+1+3+\cdots+2n-1=m^2+m+n^2$.

设$s=3m+4n$,$m=\frac{1}{3}(s-4n)$,$\frac{1}{3}(s-4n)(\frac{1}{3}(s-4n)+1)+n^2\leqslant 1987$.

$s^2-8ns+25n^2+3s-12n-9\times 1987\leqslant 0$.

$s^2+(3-8n)s+25n^2-12n-9\times 1987\leqslant 0$.

所以判别式$\Delta=(3-8n)^2-4(25n^2-12n-9\times 1987)=26(1987\frac{1}{4}-n^2)>0$.

$s\leqslant\frac{1}{2}(8n-3+6\sqrt{1987\frac{1}{4}-n^2})$.

设$f(n)=8n+6\sqrt{1987\frac{1}{4}-n^2}$, $f'(n)=8-6n(1987\frac{1}{4}-n^2)^{-\frac{1}{2}}$,又$n$为奇数.

不难知道$n=35$时,$f(n)$有最大值$280+6\sqrt{762\frac{1}{4}}$.

所以$s\leqslant\frac{1}{2}(280+6\sqrt{762\frac{1}{4}}-3)$,由$s\in\mathbb{N}^*, s\leqslant 221$.

又当$s=221, n=35, m=27$.取$2,4,\ldots,52,60,1,3,\ldots,69$为和为1987的35个正奇数与27个正偶数,所以$3m+4n$的最大值为221.

第三届中国数学奥林匹克(1988年)

上海 复旦大学

1.设$a_1,a_2,\ldots,a_n$是给定的不全为零的实数, $r_1,r_2,\cdots,r_n$为实数,如果不等式

$$r_1(x_1-a_1)+r_2(x_2-a_2)+\cdots+r_n(x_n-a_n)\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$

对任何实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$成立,求$r_1,r_2,\cdots,r_n$的值.

解:令$x_i=0(i=1,2,\ldots,n)$,$-(r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n)\leqslant-\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

$\therefore(\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i)^2\geqslant\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$.

令$x_i=2a_i(i=1,2,\ldots,n)$,$r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_na_n\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.

$\therefore(\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$.

$\therefore(\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i)^2=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$.

由Cauchy不等式, $(\sum\limits_{i=1}^n r_i^2)(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2)\geqslant(\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i)^2$, $\sum\limits_{i=1}^n r_i^2\geqslant 1$.

又令$x_i=r_i(i=1,2,\ldots,n)$,$\sum\limits_{i=1}^n r_i^2-\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n r_i^2}-\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}$.

由$\sum\limits_{i=1}^n r_ia_i=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}$, $\sum\limits_{i=1}^n r_i^2\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n r_i^2}$,$\sum\limits_{i=1}^n r_i^2\leqslant 1$.

$\therefore\sum\limits_{i=1}^n r_i^2=1$,由Cauchy不等式取等号的条件知 $\frac{r_1}{a_1}=\frac{r_2}{a_2}=\cdots=\frac{r_n}{a_n}$.

不难解得$r_i=\dfrac{a_i}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}}(i=1,2,\ldots,n)$.

2.设C_1,C_2为同心圆,C_2的半径是C_1的半径的2倍, 四边形$A_1A_2A_3A_4$内接于C_1, 设A_4A_1延长线交圆C_2于B_1, A_1A_2延长线交C_2于B_2, A_2A_3延长线交圆C_2于B_3, A_3A_4延长线交圆C_2于B_4.

试证:四边形$B_1B_2B_3B_4$的周长⩾2(四边形$A_1A_2A_3A_4$的周长).并确定等号成立的条件.

证明:设圆心为O,连结OB_1,OB_4,OA_4,设C_1的半径为R,C_2的半径为$2R$.

在四边形$B_4A_4OB_1$中,由Ptolemy定理,$OA_4\times B_1B_4+OB_1\times A_4B_4\geqslant OB_4\times A_4B_1$.

$R\times B_1B_4+2R\times A_4B_4\geqslant 2R\times A_4B_1$,即$B_1B_4\geqslant 2A_4B_1-2A_4B_4$.

同理$B_1B_2\geqslant 2A_1B_2-2A_1B_1$,$B_2B_3\geqslant 2A_2B_3-2A_2B_2$,$B_3B_4\geqslant 2A_3B_4-2A_3B_3$.

相加得$B_1B_2+B_2B_3+B_3B_4+B_4B_1\geqslant 2(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4+A_4A_1)$.

即四边形$B_1B_2B_3B_4$的周长⩾2(四边形$A_1A_2A_3A_4$的周长).

等号成立时$OA_iB_iB_{i+1}$共圆,$\angle A_{i+1}A_iO=\angle B_{i+1}B_iO=\angle B_iB_{i+1}O=\angle A_{i-1}A_iO$,

$\therefore A_{i+1}A_i=A_{i-1}A_i$,$(i=1,2,3,4,A_5=A_1,A_0=A_4,B_5=B_1)$.

$\therefore A_1A_2A_3A_4$为菱形,又为圆内切四边形,所以$A_1A_2A_3A_4$为正方形.

3.在有限的实数列$a_1,a_2,\cdots,a_n$中, 如果一段数$a_k,a_{k+1},\cdots,a_{k+l-1}$的算术平均值大于1988, 那么我们把这段数叫做一条“龙”,并把a_k叫做这条龙的“龙头” (如果某一项$a_n>1988$,那么单独这一项也叫龙). 假设以上的数列中至少存在一条龙, 证明:这数列中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大

于1988.

证明:引理:设$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}$均可作为龙头,$a_{k+m}$不能作为龙头,或$k+m-1=n$,

则$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+m-1}$的算术平均值大于1988.

引理的证明:对m用数学归纳法,$m=1$时,设以a_k为龙头的一条龙为$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$.

若$l=1$,$a_k>1988$,显然成立.

否则$l>1$,由$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$算术平均值大于1988,$a_{k+1}$不是龙头, $a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$算术平均值不大于1988,$a_k>1988$,结论成立.

设小于m时结论均成立($m\geqslant 2$),设以a_k为龙头的一条龙为$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$.

$1\leqslant l\leqslant m$时,$a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$算术平均值大于1988, 由归纳假设$a_{k+l}, \ldots, a_{k+m-1}$算术平均值大于1988,结论成立.

$l>m$时,由a_{k+m}不是龙头,$a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_{k+l-1}$算术平均值不大于1988, $a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{k+l-1}$算术平均值大于1988,结论显然也成立.

综上所述,由数学归纳法,引理成立.

设所有的龙头为$a_{i_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_1+j_1-1}, a_{i_2}, a_{i_2+1}, \ldots, a_{i_2+j_2-1}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_k+1}, \ldots, a_{i_k+j_k-1}$,

其中$j_1, j_2, \ldots, j_k\geqslant 1$ 且$i_{m+1}>i_m+j_m (m=1,2,\ldots,k-1, k\geqslant 1)$.

由引理:$a_{i_m}, a_{i_m+1}, \ldots, a_{i_m+j_m-1}$的算术平均值大于1988$(m=1,2,\ldots,k)$. 所以所有龙头的算术平均值也大于1988.证毕.

4.(1)设三个正实数a,b,c满足

$$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4).$$

求证:a,b,c一定是某个三角形的三条边长.

(2)设n个正实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$满足

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2>(n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)$$

其中$n\geqslant 3$. 求证:这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

证明:(1)若不然,不妨设$c\geqslant a+b$,则

$$\begin{aligned}
& 2(a^4+b^4+c^4)-(a^2+b^2+c^2)^2 \\
= \ & a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2 \\
= \ & -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\geqslant 0
\end{aligned}$$

矛盾$\therefore a,b,c$为某个三角形三边长.

(2)$n=3$即为(1)中的情况,$n>3$时,若存在某三个不是某个三角形三条边长,不妨设为a_1,a_2,a_3.则由均值不等式

$$\begin{aligned}
& (n-1)(a_1^4+a_2^4+\cdots+a_n^4)<(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^2 \\
= \ & \left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}+\cdots+a_n^2\right)^2 \\
\leqslant \ & (n-1)\left[\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+\left(\frac{a_1^2+a_2^2+a_3^2}{2}\right)^2+\cdots+a_n^4\right]
\end{aligned}$$

可得$\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)^2>a^4+b^4+c^4$,$(a^2+b^2+c^2)^2>2(a^4+b^4+c^4)$.
但由(1),a_1,a_2,a_3为某个三角形三边长,矛盾.所以这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.
5.给出三个四面体$A_iB_iC_iD_i(i=1,2,3)$, 过点B_i,C_i,D_i作平面$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,3)$, 分别与棱$A_iB_i,A_iC_i$, A_iD_i垂直$(i=1,2,3)$, 如果九个平面$\alpha_i,\beta_i,\gamma_i(i=1,2,3)$,相交于一点$E$, 而三点$A_1,A_2,A_3$在同一直线$l$上, 求三个四面体的外接球面的交集(形状怎样?位置如何?)
解:$\because A_iB_i\perp\alpha_i$于$B_i$,而$E$在$\alpha_i$上,$\therefore A_iB_i\perp B_iE$, B_i在以A_iE为直径的球上.同理C_i,D_i也在以A_iE为直径的球上,$A_iB_iC_iD_i$的外接球即为在以A_iE为直径的球.
若E在l上,显然这三个球的中心也都在l上,它们必在E处两两相切,交集为E.
否则E不在l上,三个球的球心在同一条直线上($\triangle EA_1A_2$中位线所在直线),且这三个球都过点E,交集为一个圆,直径为EE',其中E'为E到l的垂足.
6.如n是不小于3的自然数,以$f(n)$表示不是n的因子的最小自然数, 例如$f(12)=5$.如果$f(n)\geqslant 3$,又可作$f(f(n))$. 类似地,如果,$f(f(n))\geqslant 3$,又可作$f(f(f(n)))$,等等. 如果$f(f(\cdots f(n)\cdots))=2$, 共有$k$个$f$,就把$k$叫做$n$的“长度”. 如果 l_n表示n的长度,试对任意自然数$n(n\geqslant 3)$,求 l_n.并证明你的结论.
解:设$n=2^k\cdot m$(m为奇数).
若$k=0$,n为奇数,$f(n)=2,l_n=1$.
若$k>0$,考虑所有小于2^{k+1}的正奇数,若它们均为n的因子,由$2^{k+1}\nmid n$且小于2^{k+1}的偶数$t=2^p\cdot q$($p\leqslant k$, q为奇数),由$q|n,2^p|n,\gcd(q,2^p)=1$,知$t|n$,$\therefore f(n)=2^{k+1}$,$f(f(n))=3,f(f(f(n)))=2,l_n=3$.
否则取最小的$t|n$,t必为奇数,否则t必有一个奇因子不整除n.
$\therefore f(n)=t,f(f(n))=2,l_n=2$.
综上所述,
$$l_n=\begin{cases}1, & n\text{奇数}\\ 2, & n=2^k\cdot m(m\text{为奇数})\text{所有小于}2^{k+1}\text{的正奇数不全整除}n\\ 3, & n=2^k\cdot m(m\text{为奇数})\text{所有小于}2^{k+1}\text{的正奇数均整除}n\end{cases}$$

第四届中国数学奥林匹克(1989年)
合肥 中国科技大学

1.在半径为1的圆周上,任意给定两个点集A,B, 它们都由有限段互不相交的弧组成, 其中B的每段的长度都等于$\frac{\pi}{m}$, m是自然数. 用A^j表示将集合A逆时针方向在圆周上转动$\frac{j\pi}{m}$弧度所得的集合$(j=1,2,...)$.

求证:存在自然数k,使得$L(A^j\cap B)\geqslant\frac{1}{2\pi}L(A)L(B)$.

这里$L(X)$表示组成点集X的互不相交的弧的长度之和.

证明:我们把圆周上的点集E沿顺时针方向在圆周上转动$\frac{j\pi}{m}$弧度所得的集合记为E^{-j},于是$L(A^j\cap B)=L(A\cap B^{-j})$.

设$b_1,b_2,\ldots,b_n$为组成B的弧段,由已知它们两两不交且每段的长度均为$\frac{\pi}{m}$,因此有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2m}L(A^j\cap B) &= \sum_{j=1}^{2m}L(A\cap B^{-j})\\ &= \sum_{j=1}^{2m}L(A\cap(\cup_{i=1}^{n}b_i^{-j}))\\ &= \sum_{j=1}^{2m}\sum_{i=1}^{n}L(A\cap b_i^{-j})\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2m}L(A\cap b_i^{-j})\\ &= \sum_{i=1}^{n}L(A\cap(\cup_{j=1}^{2m}b_i^{-j}))\end{aligned}$$

因为$L(b_i)=\frac{\pi}{m}$,所以$\cup_{j=1}^{2m}b_i^{-j}$恰好是整个圆周,从而有 $L(A\cap(\cup_{j=1}^{2m}b_i^{-j}))=L(A)$.

$\therefore\sum_{j=1}^{2m}L(A^j\cap B)=nL(A)$,至少存在一个$k, 1\geqslant k\geqslant 2m$,使得

$$L(A^j\cap B)\geqslant\frac{n}{2m}L(A)=\frac{1}{2\pi}L(A)L(B).$$

2.设$x_1,x_2,\cdots,x_n$都是正数$(n\geqslant 2)$.且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$.求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

证明:不妨设$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_n$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_2}}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

由Chebyshev不等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}$$

由Cauchy不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)\geqslant n^2$$

又

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}\leqslant\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)}=\sqrt{n(n-1)}$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{n}{\sqrt{n(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sqrt{n\sum_{i=1}^{n}x_i}=\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geqslant\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}.$$

3.设S为复平面上的单位圆周 (即模为1的复数的集合),f为从S到S的映射,对于任意 $z\in S$,定义$f^{(1)}(z)=f(z),f^{(2)}(z)=f(f(z)),\cdots,f^{(k)}(z)=f(f^{(k-1)}(z))$. 如果 $c\in S$,使得$f^{(1)}(c)\neq c,f^{(2)}(c)\neq c,\cdots,f^{(n-1)}(c)\neq c,f^{(n)}(c)=c$. 则称 c 为f的$n-$周期点.设m是大于1的自然数, f定义为$f(z)=z^m$,试计算f的1989-周期点的个数.

解:记$A_n=\{z\in S|z$是f的$n-$周期点$\}$,$B_n=\{z\in S|f_n(z)=z\}$为f_n的不动点集合,显然$A_n\subseteq B_n$,又$f_1(z)=z^m$,$\therefore f_n(z)=z^{m^n}$

$\therefore f_n(z)=z\Leftrightarrow z^{m^n}=z$,又$|z|=1$,$\therefore z^{m^n-1}=1,|B_n|=m^n-1$.

我们证明B_n,A_n有如下性质:

(1)若$k|n$,则$B_k\subseteq B_n$;

事实上,令$n=kq$,若$c\in B_k,f_k(c)=c$,则$f_n(c)=f_{kq}(c)=\underbrace{f_k(f_k(\cdots f_k(c)\cdots))}_{q\text{个}}=c$.

$\therefore c\in B_n,B_k\subseteq B_n$.

(2)$B_k\cap B_n=B_{\gcd(k,n)}$,$\gcd(k,n)$为$k$与$n$的最大公约数.

由(1),$B_{\gcd(k,n)}\subseteq B_k,B_{\gcd(k,n)}\subseteq B_n,\therefore B_{\gcd(k,n)}\subseteq B_k\cap B_n$.

反之,设$c\in B_k\cap B_n$,$f_k(c)=c,f_n(c)=c$,不妨设$k<n$. 则$f_{n-k}(c)=f_{n-k}(f_k(c))=f_n(c)=c$,由辗转相除法知$f_{\gcd(k,n)}(c)=c,\therefore c\in B_{\gcd(k,n)},B_k\cap B_n\subseteq B_{\gcd(k,n)}$. $\therefore B_k\cap B_n=B_{\gcd(k,n)}$.

(3)$c\in B_n\setminus A_n\Leftrightarrow\exists k<n,k\in\mathbb{N}^*$,使$k|n$且$c\in B_k$.

充分性是显然的(由(1)),设$c\in B_n\setminus A_n,f_n(c)=c$.且存在$l<n$,使得$f_l(c)=c$,设$k=\gcd(l,n)$,则$f_k(c)=c,c\in B_k$,且$k\leqslant l<n,k|n$.证毕.

由$1989=3^2\times13\times17$,若$k|1989$,且$k<1989$,k必整除$3\times13\times17,3^2\times13,3^2\times17$中至少一个.

$\therefore B_k\subseteq B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117}$,

$\therefore A_{1989}=B_{1989}\setminus(\bigcup\limits_{\substack{k|1989\\k<1989}}B_k)=B_{1989}\setminus(B_{663}\cup B_{153}\cup B_{117})$.

由容斥原理f的1989-周期点个数为

$$\begin{aligned}|A_{1989}| &= |B_{1989}|-|B_{663}|-|B_{153}|-|B_{117}|+|B_{663}\cap B_{153}|+|B_{663}\cap B_{117}|+|B_{117}\cap B_{153}|\\ &\quad -|B_{663}\cap B_{153}\cap B_{117}|\\ &= |B_{1989}|-|B_{663}|-|B_{153}|-|B_{117}|+|B_{51}|+|B_{39}|+|B_{9}|-|B_{3}|\\ &= (m^{1989}-1)-(m^{663}-1)-(m^{153}-1)-(m^{117}-1)+(m^{51}-1)+(m^{39}-1)\\ &\quad +(m^{9}-1)-(m^{3}-1)\\ &= m^{1989}-m^{663}-m^{153}-m^{117}+m^{51}+m^{39}+m^{9}-m^{3}\end{aligned}$$

4.设点D,E,F分别在$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB上, 且$\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$的内切圆有相等的半径$r$, 又以$r_0$和R分别表示$\triangle DEF$和$\triangle ABC$的内切圆半径.

求证:$r+r_0=R$.

证明:设$\triangle ABC$周长为l,面积为S,内切圆为$\odot I$, 在各边的切点为P,Q,R,$\triangle DEF$周长为l',面积为S'.

$\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$的面积分别为$S_1,S_2,S_3$,内切圆分别为$\odot I_1,\odot I_2,\odot I_3$,

在各边的切点为$P_i,Q_i,R_i(i=1,2,3)$.

由面积公式$2S=Rl,2S'=r_0l'$,

$2S_1=r(AE+EF+FA),2S_2=r(BD+DF+FB),2S_3=r(CD+DE+EC)$.

又$S=S'+S_1+S_2+S_3,\therefore Rl=r_0l'+r(l+l')$,即$(R-r)l=(r+r_0)l'$.

又

$$\frac{AQ_1}{AQ}=\frac{AR_1}{AR}=\frac{BQ_2}{BQ}=\frac{BP_2}{BP}=\frac{CP_3}{CP}=\frac{CR_3}{CR}=\frac{r}{R}$$

$$\therefore \frac{l-Q_1Q_2-P_2P_3-R_1R_3}{l}=\frac{r}{R}$$

又$Q_1Q_2+P_2P_3+R_1R_3=Q_1F+FQ_2+P_2D+DP_3+R_3E+ER_1$

$=P_1F+R_2F+DR_2+DQ_3+EQ_3+EP_1=l'$.

$\therefore \frac{l'}{l}=1-\frac{r}{R}\therefore (R-r)R=(r+r_0)(R-r),R=r+r_0$.证毕.

5.空间中有1989个点,其中任何三点不共线, 把它们分成点数各不相同的30组, 在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形, 求三角形个数的最大值.

解:由分组情况有限,三角形个数必存在最大值,设分为30组,各组点数为$x_1<x_2<\cdots<x_{30}$, 三角形个数为$f(x_1,x_2,\ldots,x_{30})=\sum\limits_{1\leqslant i<j<k\leqslant 30}x_ix_jx_k$.

若存在$i\in\{1,2,\ldots,29\}, x_{i+1}-x_i\geqslant 3$, 则将$(x_1,x_2,\ldots,x_{30})$调整为$(x_1,\ldots,x_i+1,x_{i+1}-1,\ldots,x_{30})$.

$$\begin{aligned}
& f(x_1,\ldots,x_i+1,x_{i+1}-1,\ldots,x_{30})-f(x_1,x_2,\ldots,x_{30}) \\
= & [(x_i+1+x_{i+1}-1)\sum_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant 30\\ j,k\neq i,i+1}} x_jx_k+(x_i+1)(x_{i+1}-1)\sum_{j\neq i,i+1} x_j] \\
& -[(x_i+x_{i+1})\sum_{\substack{1\leqslant j<k\leqslant 30\\ j,k\neq i,i+1}} x_jx_k+x_ix_{i+1}\sum_{j\neq i,i+1} x_j] \\
= & (x_{i+1}-x_i-1)\sum_{j\neq i,i+1} x_j>0
\end{aligned}$$

f值增大,类似的,若存在$i,j\in\{1,2,\ldots,29\}, i<j, x_{i+1}-x_i\geqslant 2, x_{j+1}-x_j\geqslant 2$, 将$x_i$调整为$x_i+1$,$x_{j+1}$调整为$x_{j+1}-1$,$f$值增大.

所以当f取最大值时,$x_1,x_2,\ldots,x_{30}$中相邻两个的差最多有一个是2,其余均为1.

如果所有的均为1,$1989=x_1+(x_1+1)+\cdots+(x_1+29)=30x_1+435$,$x_1$不是整数,矛盾.

设$x_{t+1}-x_t=2, 1\leqslant t\leqslant 29$,

则$1989=x_1+x_2+\cdots+x_{30}=30x_1+(1+2+\cdots+t-1)+(t+1+\cdots+30)=30x_1+465-t$.

$30x_1-t=1524, x_1=51, t=6$.此时各组的点的个数分别为51,52,...,56,58,59,...,81.

6.设$f:(1,+\infty)\to(1,+\infty)$满足以下条件: 对于任意实数$x,y>1$,及$u,v>0$,有

$$f(x^uy^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}.$$

试确定所有这样的函数f.

解:令$x=y, u=v=\frac{t}{2}(t>0)$,则$f(x^t)\leqslant(f(x))^{\frac{1}{t}}$.

以x^t代x,$\frac{1}{t}$代t,则$f(x)\leqslant(f(x^t))^t$.

$\therefore f(x^t)=(f(x))^{\frac{1}{t}}$.

设$f(e)=c, c>1$,则$f(x)=f(e)^{\frac{1}{\ln x}}=c^{\frac{1}{\ln x}}$.

另外,当$f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}(c>1)$时,$f(x^uy^v)=c^{\frac{1}{u\ln x+v\ln y}}, f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}=c^{\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}}$.

由Cauchy不等式,$(u\ln x+v\ln y)(\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y})\geqslant 1$.$\therefore \frac{1}{u\ln x+v\ln y}\leqslant\frac{1}{4u\ln x}+\frac{1}{4v\ln y}$.

$\therefore f(x^uy^v)\leqslant f(x)^{\frac{1}{4u}}f(y)^{\frac{1}{4v}}$.

所以所求函数为$f(x)=c^{\frac{1}{\ln x}}(c>1)$.

第五届中国数学奥林匹克(1990年)

郑州 《中学生数理化》编辑部

1.在凸四边形$ABCD$中,AB与CD不平行, $\odot O_1$过A,B且与边CD相切于P,

$\odot O_2$过C,D且与边AB相切于Q, $\odot O_1$与$\odot O_2$相交于E,F.

求证:EF平分线段PQ的充分必要条件是$BC \parallel AD$.

证明:分两部分证明结论.

(1)EF平分PQ的充要条件为$PC \cdot PD = QA \cdot QB$.

设EF与PQ交于K,直线PQ于$\odot O_1, \odot O_2$分别交于J, I.

$\because PC \cdot PD = PI \cdot PQ, QA \cdot QB = PQ \cdot QJ,\ KQ \cdot KI = KE \cdot KF = KP \cdot KJ.$

$\therefore KQ \cdot (KP + IP) = KP \cdot (KQ + QJ), KQ \cdot IP = KP \cdot QJ.$

$\therefore KP = KQ \Leftrightarrow IP = QJ \Leftrightarrow PC \cdot PD = QA \cdot QB.$

(2)$BC \parallel AD$充要条件为$PC \cdot PD = QA \cdot QB$.

设AB与DC交于S.$BC \parallel AD \Leftrightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{SA}{SB}$.

而$SP^2 = SA \cdot SB, SQ^2 = SC \cdot SD$.

$\therefore PC \cdot PD = QA \cdot QB \Leftrightarrow (SC - SP)(SP - SD) = (SB - SQ)(SQ - SA)$

$\Leftrightarrow (SC + SD)SP - SP^2 - SC \cdot SD = (SB + SA)SQ - SQ^2 - SA \cdot SB$

$\Leftrightarrow (SC + SD)SP = (SB + SA)SQ$

$\Leftrightarrow (SC + SD)^2 \cdot SA \cdot SB = (SA + SB)^2 \cdot SC \cdot SD$

$\Leftrightarrow \frac{SC}{SD} + \frac{SD}{SC} + 2 = \frac{SA}{SB} + \frac{SB}{SA} + 2$

又$\frac{SD}{SC} < 1, \frac{SA}{SB} < 1, \therefore PC \cdot PD = QA \cdot QB \Leftrightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{SA}{SB} \Leftrightarrow BC \parallel AD.$

所以EF平分线段PQ的充分必要条件是$BC \parallel AD$.

2.设x是一个自然数,若一串自然数$x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_l = x$ 满足$x_{i-1}|x_i (i = 1, 2, \ldots, l)$, 则称$\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$为$x$的一条因子链. l称为该因子链的长度. $L(x)$与$R(x)$分别表示 x的最长因子链的长度和最长因子链的条数.

对于$x = 5^k \times 31^m \times 1990^n$,$k, m, n$都是自然数,试求$L(x)$与$R(x)$.

解:对于$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$,($p_1, p_2, \ldots, p_n$为互不相同的质数,$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为正整数). x的因子链$\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$是最长因子链的充要条件是$\frac{x_i}{x_{i-1}}$均为质数($i = 1, 2, \ldots, l$).

事实上,对于因子链$\{x_0, x_1, \ldots, x_l\}$,若存在$i$, $(1 \leqslant i \leqslant l)$,使得$\frac{x_i}{x_{i-1}} = q_1 q_2$,其中$q_1, q_2$均为大于1的正整数, 则$\{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, q_1 x_{i-1}, x_i, \ldots, x_l\}$是长度为$l+1$的因子链, 所以$\{x_0, x_1, \cdots, x_l\}$不是最长因子链.

反之,若$\frac{x_i}{x_{i-1}}$均为质数($i = 1, 2, \ldots, l$), 则$x = x_l = \frac{x_l}{x_{l-1}} \cdot \cdots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1 (x_0 = 1)$为$l$个质数的积.所以$l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. 而对$x$的任意一个因子链$\{x_0, x_1, \ldots, x_t\}$,$x = x_t = \frac{x_t}{x_{t-1}} \cdots \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1$是$t$个大于1的正整数之积,而$x$至多写成$l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$个大于1的正整数之积,所以$t \leqslant l$.所以$\{x_0, x_1, \cdots, x_l\}$是最长因子链.

$L(x)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

每个最长因子链对应一个排列$x_1,\frac{x_2}{x_1},\ldots,\frac{x_l}{x_{l-1}},l=L(x)$, 为$\alpha_1$个$p_1$,$\alpha_2$个$p_2$,$\ldots$,$\alpha_n$个$p_n$的一个排列.

$\therefore R(x)=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$.

当$x=5^k\times 31^m\times 1990^n=2^n\times 5^{n+k}\times 31^m\times 1990^n$时,

$L(x)=3n+k+m,R(x)=\frac{(3n+k+m)!}{(n!)^2(n+k)!m!}$.

3.设函数$f(x)$对$x\geqslant 0$有定义,且满足条件:

(1)对任何$x,y\geqslant 0,f(x)f(y)\leqslant y^2f(\frac{x}{2})+x^2f(\frac{y}{2})$;

(2)存在常数$M>0$,当$0\leqslant x\leqslant 1$时,$|f(x)|\leqslant M$.

求证:对任意$x\geqslant 0,f(x)\leqslant x^2$.

证明:令$x=y,(f(x))^2\leqslant 2x^2f(\frac{x}{2})$.

令$x=0,(f(0))^2\leqslant 0,\therefore f(0)=0$,满足结论.

假设存在$x>0$,使得$f(x)>x^2$,用归纳法证明

$$f(\frac{x}{2^n})>2^{2^n-2n-1}x^2(n\in\mathbb{N})$$

$n=0$时显然成立,设$n=k$时成立,$f(\frac{x}{2^k})>2^{2^k-2k-1}x^2$.

$$\therefore f(\frac{x}{2^{k+1}})\geqslant\frac{(f(\frac{x}{2^k}))^2}{2(\frac{x}{2^k})^2}>\frac{(2^{2^k-2k-1}x^2)^2}{2(\frac{x}{2^k})^2}=2^{2^{k+1}-2(k+1)-1}x^2$$

即$n=k+1$时也成立,所以对任意$n\in\mathbb{N},f(\frac{x}{2^n})>2^{2^n-2n-1}x^2$.

又$n\to+\infty$时,$2^n-2n-1\to+\infty,\frac{1}{2^n}\to 0$.

$\therefore\exists m_1$,当$n\geqslant m_1$时,$0<\frac{x}{2^n}<1,\exists m_2$,当$n\geqslant m_2$时,$2^{2^n-2n-1}x^2>M$.

取$m=\max\{m_1,m_2\}$,$0<\frac{x}{2^m}<1,f(\frac{x}{2^m})>M$,矛盾.所以对任意$x\geqslant 0,f(x)\leqslant x^2$.

4.设a是给定的正整数,A和B是两个实数,试确定方程组:

$$x^2+y^2+z^2=(13a)^2 \tag{1}$$

$$x^2(Ax^2+By^2)+y^2(Ay^2+Bz^2)+z^2(Az^2+Bx^2)=\frac{1}{4}(2A+B)(13a)^4 \tag{2}$$

有整数解的充分必要条件(用A,B的关系式表示,并予以证明).

解:$(2)-\frac{B}{2}\times(1)^2$,得$(A-\frac{B}{2})(x^4+y^4+z^4)=\frac{1}{2}(A-\frac{B}{2})(13a)^4$.

若$A=\frac{B}{2}$,(1)与(2)等价,不难验证$x=3a,y=4a,z=12a$为一组解.

若$A\neq\frac{B}{2}$,则

$$2(x^4+y^4+z^4)=(13a)^4 \tag{3}$$

$\therefore 2|a$,设$a=2a_1$,$x^4+y^4+z^4=8(13a_1)^4$.

若x,y,z不全为偶数,则必为两个奇数一个偶数,$x^4+y^4+z^4\equiv 2\pmod 4$,矛盾.

$\therefore 2|x,2|y,2|z$.设$x=2x_1,y=2y_1,z=2z_1$,则若(x,y,z,a)为(3)的解,(x_1,y_1,z_1,a_1)也为(3)的解. 类似可依次得到(x_2,y_2,z_2,a_2)也为(3)的解,等等.但这个过程不能一直进行下去,矛盾.

所以方程组有整数解的充分必要条件为$A=\frac{B}{2}$.

5.设X是一个有限集合, 法则f使得X的每一个偶子集E(偶数个元素组成的子集)都对应一个实数$f(E)$,满足条件:

(1)存在一个偶子集D,使得$f(D)>1990$;

(2)对于X的任意两个不相交的偶子集A,B,有$f(A\cup B)=f(A)+f(B)-1990$.

求证:存在X的子集P,Q,满足

(1)$P\cap Q=\emptyset$,$P\cup Q=X$;

(2)对P的任何非空偶子集S,有$f(S)>1990$;

(3)对Q的任何偶子集T,有$f(T)\leqslant 1990$.

证明:考虑X的所有偶子集经法则f得到的实数最大的一个为P,若不止一个,取元素个数最少的一个.

$Q=X\setminus P$.则$P\cap Q=\emptyset,P\cup Q=X$.

令$A=B=\emptyset$,则$f(\emptyset)=1990$.

对于$\forall S\subseteq P,S\neq\emptyset$,$f(P)=f(S)+f(P\setminus S)-1990$,显然$f(P\setminus S)<f(P)$,$\therefore f(S)>1990$.

对于$\forall T\subseteq Q$,若$T=\emptyset$,$f(T)=1990$,否则 $T\neq\emptyset$,由$f(P\cup T)=f(P)+f(T)-1990\leqslant f(P)$,$f(T)\leqslant 1990$.

$\therefore P,Q$满足条件.证毕.

6.凸n边形及$n-3$条在n边形内不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图.

求证:当且仅当$3|n$时,存在一个剖分图是可以一笔划的图 (即可以从一个顶点出发,经过图中各线段恰一次,最后回到出发点).

证明:因为$n-3$条在形内互不相交的对角线将凸n边形分为$n-2$个顶点均是n边形顶点的小区域, 每个区域的内角和不小于π,n边形的内角和为$(n-2)\pi$,所以每个小区域都是三角形.

先证必要性.用归纳法容易证明可将每个三角形区域涂成黑白两色之一,使得有公共边的三角形不同色. 假设已按照这样的要求染色,由于剖分图为可以一笔画的圈,所以由每个顶点引出的线段都是偶数条. 从而每个顶点都是奇数个三角形的顶点,因此以原多边形外边界为一边的三角形区域有着相同的颜色, 不妨设为黑色;另一方面,剖分图的每条对角线都是两种不同颜色三角形的公共边, 所以设黑三角形有m_1个,白三角形有m_2个.则$n=3m_1-3m_2$,所以$3|n$.

再证充分性,设$n=3m$,多边形为$A_1A_2\dots A_{3m}$.连接$A_1A_{3i},A_{3i}A_{3i+2},A_{3i+2}A_1(i=1,2,\dots,m-1)$这$3m-3$条对角线, 形成$m-1$个三角形,可由$A_1$出发,依次走过这些三角形,再走过凸多边形即可一笔画并回到初始点.证毕.

第六届中国数学奥林匹克(1991年)

武汉 华中师范大学

1.平面上有一凸四边形$ABCD$.

(1).如果平面上存在一点P,使得$\triangle ABP,\triangle BCP,\triangle CDP,\triangle DAP$面积都相等,

问四边形$ABCD$应满足什么条件?

(2).满足(1)的点P,平面上最多有几个?证明你的结论.

解:(1)(1.1)P在$ABCD$内部,若A,P,C,B,P,D分别三点共线,

显然$ABCD$为平行四边形,P为对角线的交点.

若A,P,C不共线,由于$\triangle PAB$,$\triangle PAD$等面积,AP必经过对角线BD的中点,同理CP过BD的中点,必有P为BD的中点,所以$\triangle ABD,\triangle BCD$面积相等.即一条对角线平分$ABCD$的面积,显然也是充分条件.

(1.2)P在$ABCD$之外,不妨设P与B,C在AD异侧,P必与A,B在CD同侧,与C,D在AB同侧.

由$\triangle PAB,\triangle PAD$面积相等,$PA\parallel BD$,同理$PD\parallel AC$.设$AC,BD$相交于$E$,$AEDP$为平行四边形.

$S_{AED}=S_{APD}=S_{ABP}+S_{CDP}+S_{PBC}-S_{ABCD}=3S_{APD}-S_{ABCD}$.

$\therefore S_{AED}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$.

这个条件也是充分条件,若$S_{AED}=\frac{1}{2}S_{ABCD}$,作平行四边形$AEDP$,显然$PB,PC$均在$APDCB$内.

$\therefore S_{ABP}=S_{APD}=S_{CDP}=S_{AED},S_{PBC}=S_{APD}+S_{ABCD}-S_{ABP}-S_{CDP}=S_{AED}$.$P$满足要求.

所以四边形$ABCD$有一条对角线平分面积,或者在对角线分成的四个三角形中有一个为四边形面积的一半.

(2)由(1)知,P在形内,形外都至多有一个,又由充要条件不同时取到,P最多有一个.

2.设$I=[0,1]$,$G=\{(x,y)|x,y\in I\}$.

求G到I的所有映射f,使得对任何$x,y,z\in I$有

(1)$f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))$;

(2)$f(x,1)=x,f(1,y)=y$;

(3)$f(zx,zy)=z^kf(x,y)$.这里,k是与x,y,z无关的正数.

解:由(3),$f(x,y)=f(y\cdot\frac{x}{y},y\cdot 1)=y^kf(\frac{x}{y},1)(0<x<y)$

$f(x,y)=f(x\cdot 1,x\cdot\frac{y}{x})=y^kf(1,\frac{y}{x})(0<y<x)$

再由(2),$f(x,y)=y^{k-1}x(0<x<y),f(x,y)=x^{k-1}y(0<y<x)$

又$x=y$时,$f(x,x)=x^kf(1,1)=x^k$.

在(1)中,取$0<x<y<z<1$,x充分小时,$y^{k-1}x<z,x<z^{k-1}y$.

$f(f(x,y),z)=f(y^{k-1}x,z)=z^{k-1}y^{k-1}x,f(x,f(y,z))=f(x,z^{k-1}y)=x(z^{k-1}y)^{k-1}$.

$\therefore z^{k-1}=z^{(k-1)^2},(k-1)(k-2)=0,k=1$或2.

$k=1$时,$f(x,y)=\min\{x,y\}$;$k=2$时,$f(x,y)=xy.(x>0,y>0)$

又$f(x,0)=f(x\cdot 1,x\cdot 0)=x^kf(0,1)=0,f(0,y)=0,f(0,0)=z^kf(0,0),f(0,0)=0.$

$\therefore k=1$时,$f(x,y)=\min\{x,y\}$;$k=2$时,$f(x,y)=xy.k\neq 1,k\neq 2$时,无解.

3.地面上有10只小鸟在啄食,其中任5只小鸟中至少有4只在一个圆上, 问有鸟最多的圆上最少有几只鸟?

解:用10个点表示10只鸟,若其中任意四点均共圆,则十个点共圆.

否则设$ABCD$不共圆,过其中任意不共线的三个点可作一个圆,最多有四个$S_i(i=1,2,3,4)$. 从其余六个点中任取一点P与$ABCD$构成5点组,其中必有4点共圆,必有P落在某个圆S_i上, 有抽屉原则,另六个点中必有两个点落在同一个圆上,这个圆上至少有5个点.

不妨设为A_1,A_2,A_3,A_4,A_5在C_1上,若存在P,Q不在C_1上,考察$\{A_1,A_2,A_3,P,Q\}$, 其中必有四点共圆C_2,显然$C_2\neq C_1$,A_1,A_2,A_3不全在C_2上,设$A_1,A_2,P,Q\in C_2$, $A_3,A_4,A_5\notin C_2$.

考察$\{A_3,A_4,A_5,P,Q\}$,必有四点共圆C_3,$C_3\neq C_1$, 设$A_3,A_4,P,Q\in C_3$, $A_1,A_2,A_5\notin C_3$,$C_3\neq C_2$.

考察$\{A_1,A_2,A_5,P,Q\}$,必有四点共圆C_4,$C_4\neq C_1$, $P,Q\in C_4$,A_1,A_3中至少有一个属于C_4.$C_4=C_2$或C_3.但是这显然均构成矛盾.

所以至多有一个点不在C_1上,又因为十个点中九点共圆而另一个不在这个圆上满足题意.所以有鸟最多的圆上最少有九只鸟.

4.求方程$x^{2n+1}-y^{2n+1}=xyz+2^{2n+1}$的所有满足条件 $n\geqslant 2,z\leqslant 5\times 2^{2n}$ 的正整数解组 (x,y,z,n).

解:显然$x>y$,且x,y奇偶性相同,所以$x-y\geqslant 2$.

当$x=3,y=1$时,$z=3^{2n}-\frac{1}{3}(1+2^{2n+1})$为整数,又$z\leqslant 5\times 2^{2n}$, $3^{2n}\leqslant 5\times 2^{2n}+\frac{1}{3}(1+2^{2n+1})=(5+\frac{2}{3})2^{2n}+\frac{1}{3}\leqslant 6\times 2^{2n}$. $\therefore n\leqslant 2$,$n=2$,$z=70$.

下面证不存在其他正整数解:

(1)若$y=1,x>4$,$y^{2n+1}+2^{2n+1}=2^{2n+1}+1,x^{2n+1}-xyz=z(x^{2n}-z)\geqslant x(x^{2n}-5\times 2^{2n})$

$\therefore x^{2n+1}-xyz>4(4^{2n}-5\times 2^{2n})=2^{2n+2}(2^{2n}-5)>2^{2n+1}$,矛盾.

(2)若$y\geqslant 2$,由$x\geqslant 2,z\leqslant 5\times 2^{2n},n\geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
x^{2n+1}-xyz &\geqslant x[(y+2)^{2n}-yz]\\
&> x[y^{2n}+4ny^{2n-1}+4n(2n-1)y^{2n-2}+2^{2n}-yz]\\
&\geqslant xy^{2n}+x\cdot 2^{2n}+x[4ny^{2n-1}+4n(2n-1)y^{2n-2}-5\times 2^{2n}y]\\
&> y^{2n+1}+2^{2n+1}+xy[4ny^{2n-2}+4n(2n-1)y^{2n-3}-5\times 2^{2n}]
\end{aligned}$$

$\because y\geqslant 2$,$4ny^{2n-2}+4n(2n-1)y^{2n-3}\geqslant 8\times 2^{2n-2}+8\times 3\times 2^{2n-3}>5\times 2^{2n}$.

$\therefore x^{2n+1}-xyz>y^{2n+1}+2^{2n+1}$,矛盾,所以只有一组正整数解$(x,y,z,n)=(3,1,70,2)$.

5.求所有自然数n,使得

$$\min_{k\in\mathbb{N}^*}(k^2+\left[\frac{n}{k^2}\right])=1991.$$

这里$[x]$表示x的整数部分.

解:条件等价于对于$\forall k\in\mathbb{N}^*,k^2+\frac{n}{k^2}\geqslant 1991$, 且$\exists k_0\in\mathbb{N}^*,k_0^2+\frac{n}{k_0^2}<1992$.

即对于$\forall k\in\mathbb{N}^*,k^4-1991k^2+n\geqslant 0$

即$(k^2-\frac{1991}{2})^2+n-\frac{1991^2}{4}\geqslant 0$

取k,使得$|k^2-\frac{1991}{2}|$最小,$k=32$,$32^4-1991\times 32^2+n\geqslant 0,n\geqslant 1024\times 967=990208$.

并且存在$k_0\in\mathbb{N}^*,k_0^4-1991k_0^2+n<0$

即$(k^2-996)^2+n-996^2<0$

由$|k_0^2-996|$的最小值为28,所以$n-996^2<-28^2,n<996^2-28^2=1024\times968=991232.$

$\therefore 990208\leqslant n\leqslant 991231.$

6.MO牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成, 它有以下特点:

(1)任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合;

(2)足球上每一个结点,恰好是三个多边形的顶点,每一结点的三条缝线颜色互不相同.

求证:可以在MO牌足球的每一结点上放置一个不等于1的复数, 使得每一多边形的所有顶点上放置的复数的乘积都等于1.

证明:设这三种颜色为红,黄,蓝,对每条边赋值,红色为1,黄色为$e^{\frac{2}{3}\pi i}$,蓝色为$e^{\frac{4}{3}\pi i}$.

对于每个节点,若三种颜色的线依逆时针方向依次为红,黄,蓝,则在这个结点放上$e^{\frac{2}{3}\pi i}$, 否则放上$e^{\frac{4}{3}\pi i}$.则结点上放置的数为逆时针方向一条边的复数除以下一条边的复数,

$$(e^{\frac{2}{3}\pi i}=\frac{1}{e^{\frac{4}{3}\pi i}}=\frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}=\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{1},e^{\frac{4}{3}\pi i}=\frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i}}=\frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{4}{3}\pi i}}=\frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{1})$$

所以对于任意一个多边形,沿顺时针方向走过每条边依次为$z_1,z_2,\dots,z_k$, 则顶点上依次放置$\omega_1=\frac{z_1}{z_2},\omega_2=\frac{z_2}{z_3},\dots,\omega_k=\frac{z_k}{z_1}$, $\therefore\omega_1\omega_2\cdots\omega_k=1$.满足题意,证毕.

第七届中国数学奥林匹克(1992年)

北京 北京数学奥林匹克发展中心

1.设方程$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0=0$的系数都是实数, 且适合条件$0<a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}\leqslant 1$.已知$\lambda$为方程的复根且$|\lambda|\geqslant 1$.

求证:$\lambda^{n+1}=1$.

证明:由$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$,$a_0>0,\lambda\neq 0$.

$\therefore a_0(\frac{1}{\lambda})^n+a_1(\frac{1}{\lambda})^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(\frac{1}{\lambda})+1=0$

$a_0(\frac{1}{\lambda})^{n+1}+a_1(\frac{1}{\lambda})^n+\cdots+a_{n-1}(\frac{1}{\lambda})^2+\frac{1}{\lambda}=0$

由$|\lambda|>1,|\frac{1}{\lambda}|\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}\therefore 1 &= a_0(\frac{1}{\lambda})^{n+1}+(a_1-a_0)(\frac{1}{\lambda})^n+\cdots+(1-a_{n-1})(\frac{1}{\lambda})\\ &= |a_0(\frac{1}{\lambda})^{n+1}+(a_1-a_0)(\frac{1}{\lambda})^n+\cdots+(1-a_{n-1})(\frac{1}{\lambda})|\\ &\leqslant a_0|\frac{1}{\lambda}|^{n+1}+(a_1-a_0)|\frac{1}{\lambda}|^n+\cdots+(1-a_{n-1})|\frac{1}{\lambda}|\\ &\leqslant a_0+(a_1-a_0)+\cdots+(1-a_{n-1})=1\end{aligned}$$

取等号条件为$\frac{a_0}{\lambda^{n+1}},\frac{a_1-a_0}{\lambda^n},\ldots,\frac{1-a_{n-1}}{\lambda}$的辐角相同, 且$|\lambda|=1$.

但是$\frac{a_0}{\lambda^{n+1}}+\frac{a_1-a_0}{\lambda^n}+\cdots+\frac{1-a_{n-1}}{\lambda}=1$ 所以它们均为非负实数,又$a_0>0,\therefore\lambda^{n+1}\in\mathbb{R}^+$.

又因为$|\lambda^{n+1}|=1,\therefore\lambda^{n+1}=1$.

2.设$x_1,x_2,\cdots,x_n$为非负实数,记$x_{n+1}=x_1,a=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,试证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}\leqslant n+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2$$

其中等号成立当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明:对n用数学归纳法,$n=1$时,$x_1=a$,结论显然成立.

设$n=k$时结论成立,当$n=k+1$时,不妨设$x_1=a$,由归纳假设

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}+\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant k+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{j=1}^{k}(x_j-a)^2$$

因此要证明

$$\sum_{i=1}^{k+1}\frac{1+x_i}{1+x_{i+1}}\leqslant k+1+\frac{1}{(1+a)^2}\sum_{i=1}^{k+1}(x_i-a)^2$$

只需证明

$$\frac{1+x_k}{1+x_{k+1}}+\frac{1+x_{k+1}}{1+x_1}-\frac{1+x_k}{1+x_1}\leqslant 1+\frac{(x_{k+1}-a)^2}{(1+a)^2}$$

即

$$\frac{(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_k)}{(1+x_{k+1})(1+x_1)}\leqslant\frac{(x_{k+1}-a)^2}{(1+a)^2}\tag{1}$$

由$x_{k+1}\geqslant x_1=a,x_k\geqslant x_1=a$,所以$(1+x_{k+1})(1+x_1)\geqslant(1+a)^2$,$(x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_k)\leqslant(x_{k+1}-a)^2$.
(1)显然成立,等号成立时当且仅当$x_1=x_2=\cdots=x_k$,且$x_{k+1}=x_k=x_1$. 所以$n=k+1$时结论成立.由归纳法,结论成立.

3.在平面上给出一个9×9的方格表, 并在其中每一方格中都任意填入+1或-1. 下面一种改变填入数字的方式称为一次变动: 对于任意一个小方格,将与此格有一条公共边的所有小方格 (不包含此格本身)中的数作连乘积,于是每取一个格, 就算出一个数.在所有小格都取遍后, 就将原来格中的数全部擦去,而将这些算出的数填入相应的小方格中. 试问是否总可以经过有限次变动,使得所有小方格中的数都变为+1?

解:未必,例如如下的4×4表格经变动后保持不变, 将它对称填入9×9格子的四个角的4×4方格, 并将正中一行与正中一列均填上+1,该9×9方格表经变动后保持不变.

+1	-1	-1	-1
-1	+1	-1	+1
-1	-1	+1	+1
-1	+1	+1	+1

4.凸四边形内接于$\odot O$,对角线AC与BD相交于P,$\triangle ABP$与$\triangle CDP$的外接圆相交于P和另一点Q,且O,P,Q三点两两不重合.试证$\angle OQP=90^\circ$.

证明:不妨设Q在$\angle BPC$内,连结AO,AQ,DO,DQ.

则$\angle AQD=\angle AQP+\angle DQP=\angle ABP+\angle DCP=2\angle ABD=\angle AOD$.

所以A,D,Q,O四点共圆.

$\therefore\angle OQP=\angle AQO+\angle PQA=\angle ADO+\angle ABD=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle AOD)+\frac{1}{2}\angle AOD=90^\circ$,证毕.

5.在有8个顶点的简单图中,没有四边形的图的边数的最大值是多少? (简单图是指任意顶点与自己没有边相连,而且任意两个顶点之间至多有一条边相连的图)

解:最大值为11,首先构造一个8顶点11条边的图,其中没有四边形.顶点为$A_i(i=1,2,\ldots,8)$, 边为$A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5,A_5A_1,A_5A_6,A_6A_7,A_7A_8,A_8A_4,A_1A_6,A_3A_8$.不难验证这个图满足题意.

下面证明:若简单图G中有8个顶点,12条边,其中必存在四边形.若不然,设G中度数最大的顶点(中的一个)为A,A的度数为d. 显然$8d\geqslant 2\times 12=24$,即$d\geqslant 3$.

(1)若$d\geqslant 5$,设与A有边相连的顶点组成的集合为S,$|S|=d$. 则S中不会有顶点与其他两个同在S中的顶点相连,顶点均在S中的边至多有$[\frac{d}{2}]$条, 而其他的顶点每个至多与S中一个顶点相连,所以图G中最多有边$f(d)=d+[\frac{d}{2}]+7-d+\binom{7-d}{2}$条, 不难验证$d\geqslant 5$时,$f(d)<12$,矛盾.

(2)$d=4$,(1)中的讨论仍适用,此时$f(d)=12$,必有所有取等号的条件都取到. 设$S=\{B_1,B_2,B_3,B_4\}$,另三个点为C_1,C_2,C_3.不妨设B_1,B_2相连,B_3,B_4相连,$C_1C_2C_3$构成三角形. $S_1=\{B_1,B_2\},S_2=\{B_3,B_4\}$,由于$C_1,C_2,C_3$每个向$S$中的一个点连出一条边,必有两个同向$S_1$或$S_2$中的点连出边, 不妨设为$C_1,C_2$都向$S_1$中的点连出边,$C_1$与$B_1$相连. 但是此时,若$C_2$与$B_1$相连,则$B_1C_1C_3C_2$为四边形; 若$C_2$与$B_2$相连,则$B_1C_1C_2B_2$为四边形.矛盾.

(3)$d=3$,则所有的顶点度数均为3,不妨设A,B之间没有边相连,从它们连出的边为$AA_i,BB_i(i=1,2,3)$.
则$S_1=\{A_1,A_2,A_3\},S_2=\{B_1,B_2,B_3\}$至多有一个公共元素.

(3.1)若它们没有公共元素,$A,A_1,A_2,A_3,B,B_1,B_2,B_3$为全部8个点,由(1)中的讨论知,$S_1$,$S_2$中顶点相连各自至多有一条边. 它们之间最多有3条边,最多有11条边,矛盾.

(3.2)若它们有公共元素,设$A_3=B_3$,第8个点为C,从它出发只能各向S_1,S_2连出一条边, 而它又不与A,B相连,所以C的度数小于3,矛盾.

综上所述,若简单图G中有8个顶点,12条边,其中必存在四边形.所以在有8个顶点的简单图中,没有四边形的图的边数的最大值是11.

6.已知整数序列$\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$满足条件:

(1)$a_{n+1}=3a_n-3a_{n-1}+a_{n-2},n=2,3,\ldots$

(2)$2a_1=a_0+a_2-2$.

(3)对任意的自然数m,存在k,使得$a_k,a_{k+1},\ldots,a_{k+m-1}$都为完全平方数.

试证:序列$\{a_0,a_1,a_2,\ldots\}$的所有项都是完全平方数.

证明:由(1)的特征方程$x^3=3x^2-3x+1$的三个根均为1知$a_n=an^2+bn+c(a,b,c$为待定实数.

代入(2)得$a=1$,$a_n=n^2+bn+c=(n+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}$.

$b=a_1-a_0-1,c=a_0$均为整数,令

$$(n+\frac{b-1}{2})^2<a_n=(n+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}<(n+\frac{b+1}{2})^2 \qquad (*)$$

只需

$$n>\frac{(b-1)^2}{4}-c,n>c-\frac{(b+1)^2}{4}.$$

令

$$n_0=[\max\{\frac{(b-1)^2}{4}-c,c-\frac{(b+1)^2}{4}\}]+1$$

则当$n\geqslant n_0$时,$(*)$成立.在(3)中令$m=n_0+1$,知道必存在$n\geqslant n_0$使a_n为完全平方数,必有$a_n=(n+\frac{b}{2})^2$,b为偶数.

所以$c-\frac{b^2}{4}=0$,$\therefore\ \forall n\in\mathbb{N},a_n=(n+\frac{b}{2})^2$为完全平方数,证毕.

第八届中国数学奥林匹克(1993年)

济南 山东大学

1.设n是奇数,试证明存在$2n$个整数$a_1,a_2,\dots,a_n;b_1,b_2,\dots,b_n$, 使得对于任意一个整数$k,0<k<n$.下列$3n$个数$a_i+a_{i+k},a_i+b_i,b_i+b_{i+k}$ $(i=1,2,\cdots,n,$其中$a_{n+j}=a_j,b_{n+j}=b_j)$被$3n$除时余数互不相同.

证明:令$a_i=3i,b_i=3i+1(i=1,2,\dots,n)$

则$a_i+a_{i+k}=3(2i+k)\equiv 0 \pmod 3$

$a_i+b_i=6i+1\equiv 1 \pmod 3$

$b_i+b_{i+k}=3(2i+k)+2\equiv 2 \pmod 3$

显然不同组的两数被$3n$除余数互不相同,只需说明同一组中任一两个数模$3n$互不相同, 即$c_i=6i$模$3n$互不相同.$(i=1,2,\dots,n)$

若$c_i\equiv c_j \pmod{3n}$,则$6(j-i)\equiv 0 \pmod 3$,即$n|2(j-i)$,但是n为奇数,$\therefore n|j-i$,又因为$|j-i|<n$,必有$j=i$.

所以这$3n$个数被$3n$除时余数互不相同.

2.给定自然数k及实数$a>0$, 已知$k_1+k_2+\cdots+k_r=k,k_i\in\mathbb{N}^*(i=1,2,\dots,r,1\leqslant r\leqslant k)$.求$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$的最大值.

解:当$a=1$时,$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}=r$,显然最大值为$k$.

当$a>0$,且$a\neq 1$时,$f(x)=a^x$在$[1,+\infty)$上为下凸函数, 即$a^{k_i}+a^{k_j}\leqslant a+a^{k_i+k_j-1}(k_i,k_j\in\mathbb{N}^*$. 这是由于它等价于$a(a^{k_i-1}-1)(a^{k_j-1}-1)\geqslant 0$,两括号内显然同号.

所以我们可以经过$r-1$次调整将其调整为$k_1=k_2=\cdots=k_{r-1}=1,k_r=k+1-r$的情况,而值始终不减. 设此时的值为$F(r)=(r-1)a+a^{k+1-r}$.

又$a+a^m\leqslant a^{m+1}\Leftrightarrow m\geqslant\log_a(\frac{a}{a-1})$.

若$k+1-r\geqslant\log_a(\frac{a}{a-1})$,则

$$F(r)=(r-2)a+a+a_{k+1-r}\leqslant(r-2)a+a_{k+2-r}\leqslant(r-3)a+a_{k+3-r}\leqslant\cdots\leqslant a^k=F(1)$$

若$k+1-r<\log_a(\frac{a}{a-1})$,则

$$F(r)=ra-a+a_{k+1-r}\leqslant ra+a_{k-r}\leqslant\cdots\leqslant ka=F(k)$$

所以F的最大值为$\max\{a^k,ka\}=\max\{a^k,ka\}$.

所以$a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$的最大值为

$$\max\{a^k,ka\}=\begin{cases} ka, \quad a\leqslant k^{\frac{1}{k-1}}(k\geqslant 2) & \text{当}r=k,k_1=k_2=\cdots=k_r=1\text{取等号}\\ a^k, \quad k=1\text{或}a>k^{\frac{1}{k-1}}(k\geqslant 2) & \text{当}r=1,k_1=k\text{取等号}\end{cases}$$

3.设圆K和K_1同心,它们的半径分别为R和$R_1,R_1>R$. 四边形$ABCD$内接于圆K,四边形$A_1B_1C_1D_1$内接于圆K_1, 点A_1,B_1,C_1,D_1分别在射线CD,DA,AB,BC上, 求证:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}\geqslant\frac{R_1^2}{R^2}.$$

证明:设$AB=a,BC=b,CD=c,DA=d,AB_1=w,BC_1=x,CD_1=y,DA_1=z$.则

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=1+\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{BC_1D_1}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{CD_1A_1}}{S_{ABCD}}+\frac{S_{DA_1B_1}}{S_{ABCD}}=1+\frac{w(a+x)}{ad+bc}+\frac{x(b+y)}{ab+cd}+\frac{y(c+z)}{ad+bc}+\frac{z(d+w)}{ab+cd}$$

由切割线定理,$(a+x)x=(b+y)y=(c+z)z=(d+w)w=R_1^2-R^2$.要证明

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}\geqslant\frac{R_1^2}{R^2}.$$

只需证明 $\quad (R_1^2-R^2)\left(\frac{w}{x(ad+bc)}+\frac{x}{y(ab+cd)}+\frac{y}{z(ad+bc)}+\frac{z}{w(ab+cd)}\right)\geqslant\frac{R_1^2-R^2}{R^2}$

即

$$\frac{w}{x(ad+bc)}+\frac{x}{y(ab+cd)}+\frac{y}{z(ad+bc)}+\frac{z}{w(ab+cd)}\geqslant\frac{1}{R^2}\qquad(*)$$

由均值不等式知$(*)$左边$\geqslant\frac{4}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}$.

再由均值不等式

$$\begin{aligned}(ad+bc)(ab+cd) &\leqslant \left(\frac{ad+bc+ab+cd}{2}\right)^2=\frac{1}{4}[(a+c)(b+d)]^2\\ &\leqslant \frac{1}{4}\left[\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2\right]^2=\frac{1}{64}(a+b+c+d)^4\end{aligned}$$

由圆内接四边形中正方形周长最长知$a+b+c+d\leqslant4\sqrt{2}R$.

$\therefore (ab+cd)(bc+ad)\leqslant16R^4$,显然有$(*)$成立.证毕.

4.给定集合$S=\{z_1,z_2,\cdots,z_{1993}\}$, 其中$z_1,z_2,\cdots,z_{1993}$是非零复数(可看作平面上的非零向量). 求证:可以把S中的元素分成若干组,使得

(1)S中每个元素属于且仅属于其中一组;

(2)每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过$90°$;

(3)将任意两组中复数分别求和,所得和数之间的夹角大于$90°$.

证明:取S中某些元素组成子集A,使得这些元素之和的模长最大.

由于元素个数有限,所以子集的取法有限,必然存在这样的A.

在$S\setminus A$中同样取元素之和模长最大的一些元素组成B.

$C=S\setminus A\setminus B$,下面我们证明$A,B,C$满足题意.

若不然,设A,B,C中元素之和分别为a,b,c,

(1)若存在$z\in A$,与a夹角大于$90°$,则$-z$与a夹角为锐角,则 $|(-z)+a|>|a|$,与A的选取矛盾.$\therefore A$中的元素与a的夹角均不超过$90°$,类似的这对B也成立.

(2)对于$z\notin A$,若z与a的夹角不大于$90°$,则 $|z+a|>|a|$,与A的选取矛盾. 所以任意不在A中的元素或它们的和与a的夹角大于$90°$.类似的, 任意在C中的元素或它们的和与b的夹角大于$90°$.

所以a,b,c两两夹角大于$90°$.

(3)若存在$z\in C$,z与c的夹角大于$90°$,则a,b,c,z两两夹角大于$90°$,矛盾. 所以C中的元素与c的夹角均不超过$90°$.

综上所述,A,B,C满足题意,证毕.

5.10人到书店买书,已知

(1)每人都买了三种书;

(2)任何两人所买的书,都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最(至)少有几人购买?说明理由.

解:至少有5个人.

设A买的书为1,2,3,其余9人每人至少买这三者之一,有抽屉原则至少有4人买了同一种书,再加上A,至少有5个人.

另外,若10个人买的书分别为(123),(123),(145),(167),(246),(246),(257),(347),(356),(356). 则不难验证满足条件,且购买人数最多的一种书恰有5人购买.

6.设函数$f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$满足以下条件: 对于任意正实数$x,y$,有$f(xy)\leqslant f(x)f(y)$.

试证:对任意的正实数x及自然数n,有

$$f(x^n)\leqslant f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

证明:设$F_n(x)=f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$,则$F_n(x)=F_{n-1}(x)f(x^n)^{\frac{1}{n}}$, $F_n^n(x)=F_{n-1}^n(x)f(x^n)$.

类似的,$F_{n-1}^{n-1}(x)=F_{n-2}^{n-1}(x)f(x^{n-1}),\cdots,F_2^2(x)=F_1^2(x)f(x^2),F_1(x)=f(x)$.

相乘得$F_n^n(x)=F_{n-1}(x)F_{n-2}(x)\cdots F_2(x)F_1(x)f(x^n)f(x^{n-1})\cdots f(x)$.

用归纳法证明$F_n(x)\geqslant f(x^n)$.对于$n=1$显然成立,设对$n\leqslant k$均成立,由归纳假设

$$\begin{aligned}
F_{k+1}^{k+1}(x) &= F_k(x)F_{k-1}(x)\cdots F_1(x)f(x^{k+1})f(x^k)\cdots f(x)\\
&\geqslant f(x^k)f(x^{k-1})\cdots f(x)f(x^{k+1})f(x^k)\cdots f(x)\\
&= f(x^{k+1})(f(x^k)f(x))(f(x^{k-1})f(x^2))\cdots(f(x)f(x^k))\\
&\geqslant (f(x^{k+1}))^{k+1}
\end{aligned}$$

$\therefore F_{k+1}(x)\geqslant f(x^{k+1})$,由数学归纳法知结论对于$\forall n\in\mathbb{N}^*$均成立.

$\therefore F_n(x)\geqslant f(x^n)$,即$f(x^n)\leqslant f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}}\cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$.证毕.

第九届中国数学奥林匹克(1994年)

上海 复旦大学

1.设$ABCD$是一个梯形($AB \parallel CD$),E是线段AB上一点,F是线段CD上一点, 线段CE与BF相交于点H,线段ED与AF相交于点G, 求证:$S_{EHFG} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果$ABCD$是一个任意的凸四边形, 同样结论是否成立?请说明理由.

证明:引理:在梯形$ABCD$中,AC,BD交于E.($AB \parallel CD$)则$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

引理的证明:显然$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$,都减去$S_{\triangle CDE}$,即有$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC}$,设为$S$.则

$$\frac{S}{S_{\triangle ABE}} = \frac{DE}{BE} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S}$$

$\therefore S_{\triangle ABE}S_{\triangle CDE} = S^2$,由均值不等式

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} + 2S \geqslant 2\sqrt{S_{\triangle ABE} \cdot S_{\triangle CDE}} + 2S = 4S$$

所以$S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

回到原题,由引理,$S_{\triangle EGF} \leqslant \frac{1}{4}S_{AEDF}, S_{\triangle EHF} \leqslant \frac{1}{4}S_{BECF}$.

相加得$S_{EHFG} \leqslant \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果$ABCD$是一个任意的凸四边形,结论未必成立.

当$DA \to 0, E \to B, F \to C$时,$S_{EFGH} \to S_{ABCD}$.

所以当$\frac{AD}{BC}, \frac{BE}{AB}, \frac{CF}{CD}$足够小时,$S_{EFGH} > \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

2.$n(n \geqslant 4)$个盘子里放有总数不少于4的糖块, 从任意的两个盘子各取一块糖,放入另一个盘子中, 称为一次操作,问能否经过有限次操作, 将所有的糖块集中到一个盘子中去?证明你的结论.

解:能够做到.用数学归纳法证明,设有m块糖,($m \geqslant 4$).

当$m = 4$时,至多有4个盘子中有糖,只有下面几种情况,不难看出结论均成立.

(1)$(1,1,1,1) \to (3,1,0,0) \to (2,0,2,0) \to (1,0,1,2) \to (0,0,0,4)$

(2)$(2,1,1,0) \to (4,0,0,0)$

(3)$(3,1,0,0) \to (2,0,2,0) \to (1,0,1,2) \to (0,0,0,4)$

(4)$(2,2,0,0) \to (1,1,2,0) \to (0,0,4,0)$

(5)$(4,0,0,0)$

设当小于m时结论均成立($m > 4$),当有m块糖时,可以先将$m-1$块糖集中到一个盘子内, 由归纳假设这是可以做到的.剩下的一块若也在同一个盘子内,显然结论成立.否则可由如下的过程将m块糖集中到一个盘子内.

$(m-1,1,0,0) \to (m-2,0,2,0) \to (m-3,2,1,0) \to (m-4,1,1,2) \to (m-2,0,1,1) \to (m,0,0,0)$

由归纳法,总可经有限次操作将所有的糖集中到同一个盘子中.

3.求适合以下条件的所有函数$f : [1,+\infty) \to [1,+\infty)$,

(1)$f(x) \leqslant 2(x+1)$;

$(2)f(x+1)=\frac{(f(x))^2-1}{x}$.

解:显然$f(x)=x+1$是一个符合条件的函数,若存在f满足条件,且$\exists x_0\in[1,+\infty)$,使得$f(x_0)\neq x_0+1$.

(1)$f(x_0)>x_0+1$,设$g(x)=f(x)-x-1,g(x_0)>0$,又由于$f(x)\leqslant 2(x+1)$,得到$g(x)\leqslant x+1$.

而且由条件(2)不难得到$g(x+1)=2g(x)+\frac{1}{x}[(g(x))^2+2g(x)]$.

$\therefore g(x_0+1)>2g(x_0)>0$,由数学归纳法不难证明$g(x_0+n)>2^n g(x_0)$,当$n$充分大时,$g(x_0+n)>2^n g(x_0)>x_0+n+1$,矛盾.

(2)$f(x_0)<x_0+1$,设$g(x)=x+1-f(x),g(x_0)>0$,由$f(x)\geqslant 1$,得到$g(x)\leqslant x$.

而且由条件(2)不难得到$g(x+1)=2g(x)-\frac{1}{x}[(g(x))^2-2g(x)]$.

$\therefore g(x_0+1)\geqslant 2g(x_0)-(g(x_0)-2)=g(x_0)+2$,由数学归纳法不难证明$f(x_0+n)\geqslant g(x_0)+2n$,当$n$充分大时,$g(x_0+n)\geqslant g(x_0)+2n>x_0+n$,矛盾.

综上所述,对于任意的$x\in[1,+\infty)$,$f(x)=x+1$,所以$f(x)=x+1$是唯一满足条件的函数.

4.已知$f(z)=C_0z^n+C_1z^{n-1}+C_2z^{n-2}+\cdots+C_{n-1}z+C_n$是一个$n$次复系数多项式, 求证:一定存在一个复数$z_0,|z_0|\leqslant 1$,满足$|f(z_0)|\geqslant|C_0|+|C_n|$.

证明:取$\omega,|\omega|=1$,使得$C_0\omega^n$与C_n辐角相同,($C_n=0$时,$\omega=1$即可). $\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$为$n$次单位根.

令$z_i=\omega\varepsilon^{i-1}(i=1,2,\ldots,n)$,则

$$f(z_1)+f(z_2)+\cdots+f(z_n)=n(C_0\omega^n+C_n),|z_1|=|z_2|=\cdots=|z_n|=1$$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}|f(z_i)|\geqslant|f(z_1)+f(z_2)+\cdots+f(z_n)|=n|C_0\omega^n+C_n|=n(|C_0|+|C_n|)$$

所以必然存在i,使得$f(z_i)\geqslant|C_0|+|C_n|,|z_i|=1$,显然结论成立.

5.对任何自然数n,求证恒等式:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{[\frac{n-k}{2}]}=\binom{2n+1}{n}$$

其中$\binom{0}{0}=1,[\frac{n-k}{2}]$表示$\frac{n-k}{2}$的整数部分.

证明:考虑函数$f(x)=(1+x)^{2n+1}$,显然$\binom{2n+1}{n}$为它的n次项系数.

另一方面 $$f(x)=(x^2+2x+1)^n(x+1)=\sum_{k=1}^{n}(x+1)(x^2+1)^{n-k}(2x)^k\binom{n}{k}$$

考虑每一项中x^n的系数,若$n-k$为偶数,$(x+1)(x^2+1)^{n-k}$中x^{n-k}的系数为$\binom{n-k}{\frac{n-k}{2}}$; 若$n-k$为奇数,$(x+1)(x^2+1)^{n-k}$中$x^{n-k}$的系数为$\binom{n-k}{\frac{n-k-1}{2}}$.

所以每一项中x^n的系数均为$\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{[\frac{n-k}{2}]}$.

$f(x)$中x^n的系数为

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{[\frac{n-k}{2}]}$$

$$\therefore\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\binom{n-k}{[\frac{n-k}{2}]}=\binom{2n+1}{n}$$

6.设M为平面上坐标为$(1994p, 7\times 1994p)$的点, 其中p是素数,求满足下述条件的直角三角形的个数:

(1)三角形的三个顶点都是整点,而且M是其直角顶点;

(2)三角形的内心是坐标原点.

解:设该直角三角形为MAB,并且MA斜率为正.

将坐标原点平移至M,设MA, MO的倾斜角分别为α, β,则$\tan\beta = 7$.

所以MA的斜率为$k = \tan\alpha = \tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\beta - 1}{1+\tan\beta} = \frac{3}{4}$.

MB的斜率为$-\frac{4}{3}$,设$A(-4t, -3t), B(3t', -4t')$,由$A, B$为整点,$t, t'$为正整数,$MA = 5t, MB = 5t'$.

由内心性质,并且$\angle M$是直角,$MA + MB - AB = 2r, \sqrt{2}r = MO = \sqrt{(1994p)^2 + (7\times 1994p)^2}$,

$MA > r, MB > r$.(r为内切圆半径)

$\therefore 5t + 5t' - 5\sqrt{t^2 + t'^2} = 1\times 5\times 1994p$,

$t^2 + t'^2 = (t + t' - 2\times 1994p)^2$,

$tt' - 2\times 1994p(t + t') + 2\times 1994^2p^2 = 0 (t > 1994p, t' > 1994p)$

$(t - 2\times 1994p)(t' - 2\times 1994p) = 2\times (1994p)^2$

设$m = t - 2\times 1994p, n = t' - 2\times 1994p. mn = 2^3\times 997^2\times p^2$.

不难知道m, n均为正整数,所以(m, n)一组正整数解对应一个直角三角形.

$\therefore$ 直角三角形的个数为$2^3\times 997^2\times p^2$的正因子个数.

$p\neq 2, p\neq 997$时为$(3+1)(2+1)(2+1) = 36$;

$p = 2$时为$(5+1)(2+1) = 18$;

$p = 997$时为$(3+1)(4+1) = 20$.

第十届中国数学奥林匹克(1995年)

合肥 中国科技大学

1.设$2n$个实数$a_1,a_2,\ldots,a_n;b_1,b_2,\ldots,b_n(n\geqslant 3)$满足

(1)$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$;

(2)$0<a_1=a_2,a_i+a_{i+1}=a_{i+2}(i=1,2,\ldots,n-2)$;

(3)$0<b_1\leqslant b_2,b_i+b_{i+1}\leqslant b_{i+2}(i=1,2,\ldots,n-2)$.

求证:$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$.

证明:若$a_1\leqslant b_1$,则由递推关系不难证明$a_i\leqslant b_i(i=1,2,\ldots,n)$,显然结论成立.

若存在$2\leqslant i\leqslant n$,使得$a_i\leqslant b_i,a_{i+1}\leqslant b_{i+1}$.

$i=n-1$时,显然有结论成立;$i<n-1$时,由递推关系不难证明$a_j\leqslant b_j(j\geqslant i)$,所以也有结论成立.

否则必有$a_1>b_1$,设$I=\{i|a_i\leqslant b_i\}$,则I中不存在相邻的正整数.

设$I'=\{j|j=i-1,i\in I\},I\cap I'=\emptyset$.

若$i\in I$,则$a_i\leqslant b_i,a_{i-1}>b_{i-1},a_{i+1}>b_{i+1}(i\leqslant n-2)$.

$\therefore a_i+a_{i-1}=a_{i+1}>b_{i+1}\geqslant b_i+b_{i-1}$. $\therefore \sum\limits_{i\in I\cup I'}a_i>\sum\limits_{i\in I\cup I'}b_i(i\leqslant n-2)$.

又若$i\in I\cup I'$,$a_i>b_i$.

$\therefore \sum\limits_{i=1}^{n-2}a_i>\sum\limits_{i=1}^{n-2}b_i$, 又$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, $\therefore a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$.

综上所述,$a_{n-1}+a_n\leqslant b_{n-1}+b_n$.

2.设$\mathbb{N}$为自然数集合, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$适合条件:$f(1)=1$,对于任何自然数$n$都有

$\circ$ $3f(n)f(2n+1)=f(2n)(1+3f(n))$;

$\circ$ $f(2n)<6f(n)$.

试求方程$f(k)+f(l)=293$,其中$k<l$的所有解.

解:由$\gcd(3f(n),1+3f(n))=1$, $\therefore 3f(n)|f(2n)$.

又因为$f(2n)<6f(n)$,所以$f(2n)=3f(n),f(2n+1)=3f(n)+1=f(2n)+1$.

由$f(1)=1$,由归纳法不难证明:若n的二进制表示为

$$(a_ma_{m-1}\ldots a_0)_2=a_m2^m+a_{m-1}2^{m-1}+\cdots+a_0(a_i=0\text{或}1)$$

则$f(n)$的三进制表示为

$$(a_ma_{m-1}\ldots a_0)_3=a_m3^m+a_{m-1}3^{m-1}+\cdots+a_0(a_i=0\text{或}1)$$

由$k<l$,显然$f(k)<f(l)$,

设$k=(a_ma_{m-1}\ldots a_0)_2,l=(b_mb_{m-1}\ldots b_0)_2,c_i=a_i+b_i,c_i=0,1,2(i=0,1,\ldots,m)$.

则$f(k)+f(l)=(c_mc_{m-1}\ldots c_0)_3$.

而$293=3^5+3^3+2\times3^2+3+2=(101212)_3$.所以由$f(k)<f(l),a_m\leqslant b_m,m=5$.

必有$a_5=0,b_5=1,a_4=b_4=0,a_2=b_2=a_0=b_0=1.a_3+b_3=1,a_1+b_1=1$.

不难知道只有四组解:

(1)$a_3=a_1=1$,$f(k)=(1111)_3,f(l)=(100101)_3,(k,l)=(15,37)$;

(2)$a_3=0,a_1=1$,$f(k)=(111)_3,f(l)=(101101)_3,(k,l)=(7,45)$;

(3)$a_3=1,a_1=0$,$f(k)=(1101)_3,f(l)=(100111)_3,(k,l)=(13,39)$;

(4)$a_3=a_1=0$,$f(k)=(101)_3,f(l)=(101111)_3,(k,l)=(5,47)$.

3.试求

$$\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

的最小值,其中x和y是任意实数.

解:设

$$F=\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{10}\sum_{k=1}^{10}|k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

$$F_1=\sum_{i=1}^{10}|x+y-10i|,F_2=\sum_{j=1}^{10}|x-2y-12j|,F_3=\sum_{k=1}^{10}k|x+5y-5k|$$

则$F=57F_1F_2F_3$.

引理:$a_1,a_2,\ldots,a_n$为n个实数,$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_k$.定义$b$为它们的中位数:

若$2|n,n=2m,a_m\leqslant b\leqslant a_{m+1}$;

若$2\nmid n,n=2m+1,b=a_{m+1}$.

设$g(x)=|x-a_1|+|x-a_2|+\cdots+|x-a_n|$,则$g(t)$的最小值为$g(b)$.

引理的证明:$\because |x-a_1|+|x-a_n|\geqslant a_n-a_1$(当$a_1\leqslant x\leqslant a_n$时取等号)

$|x-a_2|+|x-a_{n-1}|\geqslant a_{n-1}-a_2$(当$a_2\leqslant x\leqslant a_{n-1}$时取等号)$\cdots$

n为偶数时,$|x-a_{\frac{n}{2}}|+|x-a_{\frac{n}{2}+1}|\geqslant a_{\frac{n}{2}+1}-a_{\frac{n}{2}}$(当$a_{\frac{n}{2}}\leqslant x\leqslant a_{\frac{n}{2}+1}$时取等号)

n为奇数时,$|x-a_{\frac{n+1}{2}}|\geqslant 0$(当$x=a_{\frac{n+1}{2}}$时取等号)

$\therefore g(x)\geqslant(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_{[\frac{n}{2}]+1})-(a_{[\frac{n+1}{2}]}+\cdots+a_1)$ (当$x=b$时取等号)

回到原题,由引理分别应用到F_1,F_2,F_3上得

$F_1\geqslant 10\times(10+9+8+7+6-5-4-3-2-1)=250,50\geqslant x+y\geqslant 60$时取等号.

$F_2\geqslant 12\times(10+9+8+7+6-5-4-3-2-1)=300,60\geqslant x-2y\geqslant 72$时取等号.

$F_3\geqslant 5\times(10\times10+9\times9+8\times8-7\times6-6\times6-5\times5-4\times4-3\times3-2\times2-1)=560,x+5y=35$时取等号.

$\therefore F\geqslant 57\times250\times300\times560=2394000000$.

且不难验证$x=60,y=-5$时满足所有取等号条件,所以原式的最小值为2394000000.

4.空间有四个球,它们的半径分别为2,2,3,3,每个球都与其余3个球外切, 另有一个小球与这四个球都外切,求该小球的半径.

解:设四个球的球心分别为A,B,C,D,则$AB=4,CD=6,AC=BC=AD=BD=5$.

设E,F分别为AB,CD中点,小球球心为O,半径为r,则四面体$ABCD$关于平面ABF,CDE对称.

四个球也同样,所以由对称性O在EF上.

$OE=\sqrt{OA^2-AE^2}=\sqrt{(2+r)^2-2^2}=\sqrt{r^2+4r}$,

$OF=\sqrt{OD^2-DF^2}=\sqrt{(3+r)^2-3^2}=\sqrt{r^2+6r}$,

$EF=\sqrt{FA^2-AE^2}=\sqrt{DA^2-DF^2-AE^2}=\sqrt{5^2-3^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

$\therefore\sqrt{r^2+4r}+\sqrt{r^2+6r}=2\sqrt{3}$.

解得$r=\frac{6}{11}$.

5.设$a_1,a_2,\ldots,a_{10}$是任意10个两两不同的自然数, 它们的和为1995.试求$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$的最小值.

解:将$a_1,a_2,\ldots,a_{10}$按顺时针方向依次写在一个圆周上,于是所求表达式即为每相邻两数乘积的总和A.并且将$a_1,a_2,\ldots,a_{10}$的和记为$N,N\geqslant 55$.将和为N的任意10个不同自然数所对应的表达式的最小值记为$S(N)$.

先考虑这10个数为$1,2,\ldots,10$的情况,即$N=55$时.

不妨设$a_1=10$,我们通过调整证明$a_1,a_2,\ldots,a_{10}$依次为$10,1,9,3,7,5,6,4,8,2$时取到最大值.

若$a_j=1,j\neq 2$,将$(a_2,\ldots,a_{j-1},a_j)$这一段整个的按逆过来的顺序排列,即变为$(a_j,a_{j-1},\ldots,a_2)$, 设操作前所求表达式为A,操作后为A',

则$A'-A=(10+a_2a_{j+1})-10a_2-a_{j+1}=(a_2-1)(a_{j+1}-10)\leqslant 0$,$A$的值下降了.

同理若$a_{10}\neq 2$,通过类似的调整使$a_{10}=2$,且A的值减少; 类似的经过有限次操作即得到$(a_1,a_2,\ldots,a_{10})=(10,1,9,3,7,5,6,4,8,2)$,且每次操作$A$的值都下降.

$\therefore S(55)=10+9+27+21+35+30+24+32+16+20=224$.

对于$N>55$,显然最大的数大于10,第二大的数不小于9,...,最小的数不小于1.

不妨设a_1最大,经类似的讨论可知道若将$a_1,a_2,\ldots,a_{10}$从大到小依次以 $10,9,\ldots,1$代替,必有按照上面方式排列时取最小值.

设$(b_1,b_2,\ldots,b_{10})=(10,1,9,3,7,5,6,4,8,2)$,$c_i=a_i-b_i\geqslant 0,c_{11}=c_1,b_{11}=b_1,b_0=b_{10}$.

$$\begin{aligned}A&=a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1\\&=\sum_{i=1}^{10}b_ib_{i+1}+\sum_{i=1}^{10}c_ic_{i+1}+\sum_{i=1}^{10}c_i(b_{i-1}+b_{i+1})\\&\geqslant 224+(b_2+b_{10})(N-55)=3N+59\end{aligned}$$

而当$(a_1,a_2,\ldots,a_{10})=(N-45,1,9,3,7,5,6,4,8,2)$时,$A=3N+59$.$\therefore S(N)=3N+59$.

所以$N=1995$时,$a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_9a_{10}+a_{10}a_1$的最小值为$3\times 1995+59=6044$.

6.设n是大于1的奇数,已给 $y_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\ldots,x_{n-1}^{(0)},x_n^{(0)})=(1,0,\ldots,0,1)$.

设
$$x_i^{(k)}=\begin{cases}0 & x_i^{(k-1)}=x_{i+1}^{(k-1)}\text{时},i=1,2,\ldots,n\\ 1 & x_i^{(k-1)}\neq x_{i+1}^{(k-1)}\text{时},i=1,2,\ldots,n\end{cases}$$

其中$x_{n+1}^{(k-1)}=x_1^{(k-1)}$.

记$y_k=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_{n-1}^{(k)},x_n^{(k)}),k=1,2,\ldots$

若正整数m满足$y_0=y_m$.求证:m是n的倍数.

证明:将一个圆周n等分,将$x_1^{(k)},x_2^{(k)},\ldots,x_{n-1}^{(k)},x_n^{(k)}$依次按顺时针方向写在这些分点上表示$y_k$.

对于y_0,显然它有唯一的对称轴,不妨设为竖直线.

因为$x_i^{(k)} \equiv x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)} \pmod 2$.

所以将y_k中每两个相邻点上的数的和除以2的余数放在这段弧的中点上,再将原先的数撤去,显然对称轴是不变的. 而再将它逆时针旋转$\frac{\pi}{n}$时,即得到y_{k+1}.所以y_{k+1}的对称轴是y_k的对称轴逆时针旋转$\frac{\pi}{n}$.

若$y_0 = y_m$,它们的对称轴也相同,而中间变换了m次,对称轴旋转了$\frac{m\pi}{n}$,而它重合于竖直线, 所以它旋转了π的整数倍,记为$k\pi$.$\therefore \frac{m\pi}{n} = k\pi, m = kn$,即$m$是$n$的倍数.

第十一届中国数学奥林匹克(1996年)

天津 南开大学

1. 设H是锐角$\triangle ABC$的垂心, 由A向以BC为直径的圆作切线AP,AQ,切点分别为P,Q.

求证:P,H,Q三点共线.

证明:设三条高的垂足分别为D,E,F,BC中点为O,PQ与AO交于R,则$AO\perp PR$.

由$\angle APO=\angle ARP=90^\circ$,$\triangle APO\backsim\angle ARP, AO\cdot AR=AP^2$.

又$\angle ADC=\angle BEC=90^\circ$,$\therefore H,D,C,E$四点共圆.$\therefore AE\cdot AC=AH\cdot AD$.

由切割线定理$AE\cdot AC=AP^2$.

$\therefore AO\cdot AR=AH\cdot AD$.

若D与O重合,则H与R重合,P,H,Q显然共线.

否则,O,D,H,R四点共圆,$\angle ORH=\angle ODH=90^\circ$.

$\therefore AO\perp RH$,P,H,Q共线,证毕.

2.设$S=\{1,2,\ldots,50\}$,求最小自然数k,使S的任一k元子集中, 都存在两个不同的数a和b,满足$a+b$整除ab.

解:设$a,b\in S$,满足$a+b$整除ab.设$c=\gcd(a,b)$,于是$a=ca_1,b=cb_1$,其中$a_1,b_1\in\mathbb{N}$,且$\gcd(a_1,b_1)=1$.因此

$$c(a_1+b_1)=a+b|ab=c^2a_1b_1, a_1+b_1|ca_1b_1$$

$\because\gcd(a_1+b_1,a_1)=\gcd(a_1+b_1,b_1)=1$,所以$a_1+b_1|c$.

因为$a,b\in S$,$a+b\leqslant 99$,$c(a_1+b_1)\leqslant 99$.所以$3\leqslant a_1+b_1\leqslant 9$.

易知S中所有满足$a+b$整除ab的不同数对共有23对如下:

$a_1+b_1=3:(6,3)(12,6)(18,9)(24,12)(30,15)(36,18)(42,21)(48,24)$

$a_1+b_1=4:(12,4)(24,8)(36,12)(48,16)$

$a_1+b_1=5:(20,5)(40,10)(15,10)(30,20)(45,30)$

$a_1+b_1=6:(30,6)$

$a_1+b_1=7:(42,7)(35,14)(28,21)$

$a_1+b_1=8:(40,24)$

$a_1+b_1=9:(45,36)$

令$M=\{6,12,15,18,20,21,24,35,40,42,45,48\}$,$|M|=12$.并且上述23个数对中每一对都至少包含$M$中1个元素. 因此,若令$T=S\setminus M$,则$|T|=38$,且$T$中任何两数都不满足题中条件,所以$k\geqslant 39$.

而下列12个满足题中条件的数对互不相交:

(6,3)(12,4)(20,5)(42,7)(24,8)(18,9)(40,10)(35,14)(30,15)(48,16)(28,21)(45,36)

对于S的任意一个39元子集R,只比S少11个元素,而这11个元素至多属于上述12个数对中的11对,从而必有一对属于R.

综上可知,所求的最小自然数$k = 39$.

3.设$\mathbb{R}$为实数集合, 函数$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$适合条件

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)((f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2), x, y\text{为实数}.$$

试证:对一切实数x,都有$f(1996x) = 1996f(x)$.

证明:令$x = y = 0$,有$f(0) = 0$.令$y = 0$, $f(x^3) = x(f(x))^2$.

所以$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2, x \in \mathbb{R}$.

由此可知$x \geqslant 0$时,$f(x) \geqslant 0$;$x \leqslant 0$时,$f(x) \leqslant 0$.

设$S = \{a > 0|\text{对于}\forall x \in \mathbb{R}, f(ax) = af(x)\}$.

显然$1 \in S$,若$a \in S$,由$f(x) = x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2$,

$ax(f(x))^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f(a^{\frac{1}{3}}x)^3) = a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2$.

所以$(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2 = (a^{\frac{1}{3}}f(x))^2$,$f(a^{\frac{1}{3}}x) = a^{\frac{1}{3}}f(x)$.

即$a^{\frac{1}{3}} \in S$.

若$a, b \in S$,则$a^{\frac{1}{3}}, b^{\frac{1}{3}} \in S$

$$\begin{aligned}
f((a+b)x) &= f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3) \\
&= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}[(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2 - f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) + (f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2] \\
&= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(f(x^{\frac{1}{3}}))^2 \\
&= (a+b)x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}})^2) = (a+b)f(x)
\end{aligned}$$

$\therefore a + b \in S$.

由$1 \in S, 1 + 1 = 2 \in S$,由归纳法易知所有自然数$n \in S$.

$\therefore 1996 \in S$,即$f(1996x) = 1996f(x)$.

4.8位歌手参加艺术会,准备为他们安排m次演出, 每次由其中4位登台表演.要求8位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多, 请设计一种方案,使得演出的次数m最少.

解:设任两位同时演出r次,则$r\binom{8}{2} = m\binom{4}{2}$,即$14r = 3m$.

$\therefore 3|r, r \geqslant 3, m \geqslant 14$.

用1,2,...,8代表8位歌手,如下14次演出满足要求:

(1,2,3,4);(1,2,5,6);(1,2,7,8);(1,3,5,7);(1,3,6,8);(1,4,5,8);(1,4,6,7);

(2,3,5,8);(2,3,6,7);(2,4,5,7);(2,4,6,8);(3,4,5,6);(3,4,7,8);(5,6,7,8).

$\therefore m = 14$.

5.设n为自然数,$x_0 = 0, x_i > 0, i = 1, 2, \ldots, n$且$\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$.求证:

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1}}\sqrt{x_i + \cdots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

证明:设$x_0 + x_1 + \cdots + x_{i-1} = \cos\theta_i$,则$x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = 1 - \cos\theta_i (i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

$\therefore x_i = \cos\theta_{i+1} - \cos\theta_i, \theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$\theta_1=\frac{\pi}{2}>\theta_2>\cdots>\theta_n>\theta_{n+1}=0$.

往证:

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i}{\sqrt{1+\cos\theta_i}\sqrt{1-\cos\theta_i}}<\frac{\pi}{2}$$

即

$$1\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}<\frac{\pi}{2}$$

而由$\sin\theta_i\in(0,1](i=1,2,\dots,n)$

$$\therefore\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\geqslant\sum_{i=1}^{n}(\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i)=\cos\theta_{n+1}-\cos\theta_1=1$$

又由于$\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}<\theta_i$,$\sin x<x(0<x<\frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad&\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\theta_{i+1}-\cos\theta_i}{\sin\theta_i}\\=\quad&\sum_{i=1}^{n}\frac{2\sin\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}}{\sin\theta_i}\\\leqslant\quad&\sum_{i=1}^{n}\frac{2\sin\theta_i\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}}{\sin\theta_i}\\=\quad&2\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\\<\quad&2\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i-\theta_{i+1}}{2}\\=\quad&\theta_1-\theta_{n+1}=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

所以原不等式成立.

6.在$\triangle ABC$中,$\angle C=90°,\angle A=30°,BC=1$,求$\triangle ABC$的内接三角形(三顶点分别在$\triangle ABC$三边上的三角形)的最长边的最小值.

解:令$\triangle DEF$为内接三角形,D,E,F分别在BC,CA,AB上.

对于BC上的任意一点D,令$\angle EDF=60°$保持不变,设G,H分别在AC,AB上,$\angle ADG=\angle ADH=60°$.显然当$E$从$G$运动到$A$时,$F$从$A$运动到$H$.

因为$\angle DGA>\angle C=90°$,所以$DG>DA$;

又$\angle DHA=\angle B+\angle BDH=\angle ADB>\angle C=90°$,所以$DA>DH$.

所以必然存在某个E,使得$DE=DF$,即$\triangle DEF$为等边三角形.并且E从G运动到A时,DE严格增,DF严格减,所以有唯一的E,使得$\triangle DEF$为等边三角形.

设$BD=x$,令$CE=\frac{\sqrt{3}}{2}x,BF=1-\frac{x}{2}$.由余弦定理

$DF^2=x^2+(1-\frac{x}{2})^2-2x(1-\frac{x}{2})\cos 60°=\frac{7}{4}x^2-2x+1$

$DE^2=(1-x)^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1$

$EF^2=(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2+(1+\frac{x}{2})^2-2\sqrt{3}(1-\frac{x}{2})(1+\frac{x}{2})\cos 30^\circ=\frac{7}{4}x^2-2x+1$

即$DF=DE=EF$,此时$\triangle DEF$为等边三角形,即D固定时唯一的等边三角形.

设DEF为等边三角形,记AB,AC中点分别为M,N,BM中点为S,T在AB上,$BT=\frac{1}{3}AB$.

D从B运动到C时,E从C运动到N,F从M运动到S.设$\triangle DEF$的边长为a.

$a^2=\frac{7}{4}x^2-2x+1=\frac{7}{4}(x-\frac{4}{7})^2+\frac{3}{7}$.

当$x=\frac{4}{7}$时,有最小值$\sqrt{\frac{3}{7}}$.设此时在$\triangle PQR$的位置.

下面证明对任意内接三角形XYZ,最大边长不小于$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

考虑Z在AB上的位置,

(1)Z在AM上,则$ZX\geqslant\frac{1}{2}AC=\frac{\sqrt{3}}{2}>\sqrt{\frac{3}{7}}$;

(2)Z在BT上,则$ZY\geqslant\frac{2}{3}BC=\frac{2}{3}>\sqrt{\frac{3}{7}}$;

(3)Z在MT上,按照前面的方法作出正三角形DEF,$(F=Z)$,$x<\frac{1}{3}$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}BF=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\frac{x}{2})>\frac{\sqrt{3}}{2}x=CE$.则$DE=DF=EF\geqslant\sqrt{\frac{3}{7}}$.

(3.1)X在CD上,$XZ\geqslant DF\geqslant\sqrt{\frac{3}{7}}$;

(3.2)Y在CE上,$\angle FEC>90^\circ$,$YZ\geqslant EF\geqslant\sqrt{\frac{3}{7}}$;

(3.3)X在BD上,Y在AE上,$XY=\sqrt{CX^2+CY^2}\geqslant\sqrt{CD^2+CE^2}=DE\geqslant\sqrt{\frac{3}{7}}$.

综上所述,$\triangle ABC$的内接三角形的最长边的最小值为$\sqrt{\frac{3}{7}}$.

第十二届中国数学奥林匹克(1997年)

杭州 浙江大学

1.设实数$x_1,x_2,\ldots,x_{1997}$满足如下两个条件:

(1)$-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant x_i\leqslant\sqrt{3}(i=1,2,\ldots,1997)$

(2)$x_1+x_2+\cdots+x_{1997}=-318\sqrt{3}$

试求$x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的最大值,并说明理由.

解:考虑函数$f(x)=(t+x)^{12}+(t-x)^{12}$,($t$为常数).

显然$f(x)$为偶函数且展开式中所有偶次项系数均为正,所有奇次项均为0,所以$f(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数.

所以对于$\forall i,j,1\leqslant i<j\leqslant 1997,x_i+x_j$为定值时, 当$|x_j-x_i|$的值越大时,$x_i^{12}+x_j^{12}$越大.

这样我们逐次进行调整,过程如下:每次选取 $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x_i\leqslant x_j<\sqrt{3}$,保持它们的和不变. 若$x_i+x_j>\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}$,则将$(x_i,x_j)$调整为$(x_i+x_j-\sqrt{3},\sqrt{3})$; 否则将$(x_i,x_j)$调整为$(x_i+x_j+\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})$. 这样调整后$F=x_1^{12}+x_2^{12}+\cdots+x_{1997}^{12}$的值增大,经过有限次这样的调整后, 最多有一个$x_i$不等于$-\frac{1}{\sqrt{3}}$或$\sqrt{3}$,此时达到最大值.

设此时有k个$\sqrt{3}$,$1996-k$个$-\frac{1}{\sqrt{3}}$,另一个为$m\in[-\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}]$.

则$k\sqrt{3}+(1996-k)(-\frac{1}{\sqrt{3}})+m=-318\sqrt{3}$,$m=\frac{1}{\sqrt{3}}(1042-4k)$.

$\therefore -1\leqslant 1042-4k\leqslant 3,\frac{1039}{4}\leqslant k\leqslant\frac{1043}{4}$

又因为$k\in\mathbb{Z}$,$\therefore k=260,m=\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$\therefore F\leqslant 260(\sqrt{3})^{12}+1736(-\frac{1}{\sqrt{3}})^{12}+(\frac{2}{3}\sqrt{3})^{12}=189548$

当有260个x_i为$\sqrt{3}$,1个x_i为$\frac{2}{3}\sqrt{3}$,其他均为$-\frac{1}{\sqrt{3}}$时取等号.

2.点P是凸四边形$A_1B_1C_1D_1$内一点, 且P到各顶点的连线与四边形过该点的两条边的夹角均为锐角. 递推定义A_k,B_k,C_k和D_k分别为P关于直线 $A_{k-1}B_{k-1}$,$B_{k-1}C_{k-1}$, $C_{k-1}D_{k-1}$和$D_{k-1}A_{k-1}$的对称点$(k=2,3,\ldots)$.考察四边形序列$A_jB_jC_jD_j(j=1,2,\ldots)$.

试问:(1)前12个四边形中,哪些必定与第1997个相似,哪些未必;

(2)假设第1997个是圆内接四边形,那么在前12个四边形中,哪些必定是圆内接四边形,哪些未必.

解:设$\angle D_jA_jP,\angle A_jB_jP,\angle B_jC_jP,\angle C_jD_jP$分别为$\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j$;

$\angle PA_jB_j,\angle PB_jC_j,\angle PC_jD_j,\angle PD_jA_j$分别为$\alpha'_j,\beta'_j,\gamma'_j,\delta'_j$.

不难知道A_j为$\triangle D_{j+1}A_{j+1}P$的外心,所以$\alpha_{j+1}=\frac{1}{2}\angle D_{j+1}A_jP=\alpha_j$.

类似地,我们可以知道

$(\alpha_{j+1},\beta_{j+1},\gamma_{j+1},\delta_{j+1})=(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$

$(\alpha'_{j+1},\beta'_{j+1},\gamma'_{j+1},\delta'_{j+1})=(\beta'_j,\gamma'_j,\delta'_j,\alpha'_j)$

$\therefore(\alpha_{j+4},\beta_{j+4},\gamma_{j+4},\delta_{j+4})=(\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j)$

$(\alpha'_{j+4},\beta'_{j+4},\gamma'_{j+4},\delta'_{j+4})=(\alpha'_j,\beta'_j,\gamma'_j,\delta'_j)$

$\therefore A_{j+4}B_{j+4}C_{j+4}D_{j+4}\backsim A_jB_jC_jD_j$

又因为$(\alpha_{j+2}+\alpha'_{j+2})+(\gamma_{j+2}+\gamma'_{j+2})=\alpha_j+\gamma'_j+\gamma_j+\alpha'_j=(\alpha_j+\alpha'_j)+(\gamma_j+\gamma'_j)$

所以$A_{j+2}B_{j+2}C_{j+2}D_{j+2}$与$A_jB_jC_jD_j$相应的对角和相等.

于是有(1)前12个四边形中,第1,5,9个必定与第1997个相似;

(2)假设第1997个是圆内接四边形,那么在前12个四边形中,第1,3,5,7,9,11个必定是圆内接四边形.

下面说明对于前12个四边形中其他的四边形未必成立.

考虑筝形$A_1B_1C_1D_1,P$为其对角线交点,$A_1B_1=A_1D_1,C_1B_1=C_1D_1,\angle B_1=\angle D_1<90°$.它不是圆内接四边形.

设$(\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, 则$(\alpha'_1,\beta'_1,\gamma'_1,\delta'_1)=(\alpha,\delta,\gamma,\beta)$.

所以$(\alpha_2,\beta_2,\gamma_2,\delta_2)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$; $(\alpha'_2,\beta'_2,\gamma'_2,\delta'_2)=(\delta,\gamma,\beta,\alpha)$,$(\beta+\delta<90°)$

$\therefore\angle A_2=\angle D_2=\alpha+\delta,\angle B_2+\angle C_2=\beta+\gamma$,$A_2B_2C_2D_2$为等腰梯形,是圆内接四边形.

类似的可知$A_3B_3C_3D_3$为筝形,不是圆内接四边形.且$\angle A_3=\angle C_3=\alpha+\gamma>90°$.

$A_4B_4C_4D_4$为等腰梯形,是圆内接四边形.

这四个四边形互不相似,而四边形的形状显然是以4为周期变化. 所以在这个四边形序列中,前12个四边形中,只有第1,5,9个与第1997个相似.

在上述序列中,以$A_2B_2C_2D_2$为第一个四边形,不难知道所有的第$2k+1$个四边形均为圆内接四边形, 而其他四边形均不是圆内接四边形,所以第1997个是圆内接四边形,在前12个四边形中,只有第1,3,5,7,9,11个是圆内接四边形.

综上所述(1)前12个四边形中,第1,5,9个必定与第1997个相似,其他未必;

(2)假设第1997个是圆内接四边形,在前12个四边形中,第1,3,5,7,9,11个必定是圆内接四边形,其他未必.

3.求证存在无穷多个正整数n,使得可将$1,2,\dots,3n$列成数表

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{matrix}$$

满足如下两个条件:

(1)$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=\cdots=a_n+b_n+c_n$且为6的倍数;

(2)$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$且为6的倍数.

证明:显然$6n|\frac{1}{2}(3n)(3n+1),18|\frac{1}{2}(3n)(3n+1)$.

必有$n\equiv1 \pmod 4),n\equiv0 \pmod 3$,所以$n\equiv9 \pmod{12}$.

下面A_i中第1,2,3行分别记为$\alpha(i),\beta(i),\gamma(i)$,且$\alpha(i)+k$表示将$\alpha(i)$中每个数都加上$k$,其他类似.

先构造A_9满足条件:设

$$A_3=\begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

显然各行各列之和均为15,令

$$A_9=\begin{pmatrix}\alpha(3) & \beta(3)+18 & \gamma(3)+9\\ \beta(3)+9 & \gamma(3) & \alpha(3)+18\\ \gamma(3)+18 & \alpha(3)+9 & \beta(3)\end{pmatrix}$$

易知A_9中的27个元素为1,2,...,27,并且各列之和为$15+9+18=42\equiv 0 \pmod 6$;

各行之和为$3(15+9+18)=126\equiv 0 \pmod 6$.所以9是满足条件的正整数.

设m满足条件,且形成的数表(矩阵)为A_m,各行之和为$6u$,各列之和为$6v$.

构造A_{3m}如下:

$$A_{3m}=\begin{pmatrix}\alpha(m) & \beta(m)+6m & \gamma(m)+3m\\ \beta(m)+3m & \gamma(m) & \alpha(m)+6m\\ \gamma(m)+6m & \alpha(m)+3m & \beta(m)\end{pmatrix}$$

则A_{3m}中$9m$个元素为$1,2,\ldots,9m$,并且各行之和为$18u+9m^2$,各列之和为$6v+9m$.

构造A_{9m}如下:

$$A_{9m}=\begin{pmatrix}\alpha(3m) & \beta(3m)+18m & \gamma(3m)+9m\\ \beta(3m)+9m & \gamma(3m) & \alpha(3m)+18m\\ \gamma(3m)+18m & \alpha(3m)+9m & \beta(3m)\end{pmatrix}$$

则A_{9m}中$27m$个元素为$1,2,\ldots,27m$,并且各行之和为$54u+108m^2\equiv 0 \pmod 6$,

各列之和为$6v+36m\equiv 0 \pmod 6$.

$\therefore$ $9m$也是满足条件的正整数,由归纳法不难证明对$\forall k\in\mathbb{N}^*$, 9^k是满足条件的正整数,显然有无穷多个.

4.四边形$ABCD$内接于$\odot O$,其边AB与DC的延长线交于点P, AD与BC的延长线交于点Q,过Q作该圆的两条切线QE和QF, 切点分别为E,F.求证:P,E,F三点共线.

证明:连接PQ,并且在PQ上取一点M,使得B,C,M,P四点共圆,则$QE^2=QM\cdot QP=QC\cdot QB$,

并且$\angle PMC=\angle CBA=\angle PDQ$.所以$C,D,Q,M$四点共圆. 所以$PM\cdot PQ=PC\cdot PD$.

$PQ^2=PM\cdot PQ+QM\cdot PQ=QC\cdot QB+PC\cdot PD$.

连接PF,设PF与圆的另一交点为E',作$QG\perp PF$,垂足为G.

则$PD\cdot PC=PE'\cdot PF,QF^2=QC\cdot QB$.

所以$PE'\cdot PF+QF^2=PQ^2$,即$PE'\cdot PF=PQ^2-QE^2$.

又因为$PQ^2-QF^2=PG^2-GF^2=(PG-GF)(PG+GF)=PF(PG-GF)$,

从而$PG-GF=PE'=PG-GE'$.即$GF=GE'$.

故E'与E重合,P,E,F三点共线.

另证:设过A,D的切线相交于R,过B,C的切线相交于S,AC,BD相交于T.

则R为AD的极点,S为BC的极点.由于AD过点Q,BC过点Q,所以Q的极线EF过点R,S.

在退化六边形$AACDDB$中,由Pascal定理,P,R,T三点共线;类似的在$ACCDBB$中,P,S,T三点共线.

所以P,R,S,T四点共线,即P在直线EF上.证毕.

5.设$A=\{1,2,3,\ldots,17\}$,对于映射$f:A\to A$,记

$$f^{[1]}(x)=f(x),f^{[k+1]}=f(f^{[k]}(x))(k\in\mathbb{N}).$$

设从A到A的一一映射f满足条件:存在自然数M,使得:

(1)当$m<M,1\leqslant i\leqslant 16$时,有

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\not\equiv\pm 1\pmod{17},$$

$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\not\equiv\pm 1\pmod{17}$$

(2)当$1\leqslant i\leqslant 16$时,有

$$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\equiv 1\text{或}-1\pmod{17},$$

$$f^{[m]}(1)-f^{[m]}(17)\equiv 1\text{或}-1\pmod{17}$$

试对满足上述条件的一切f,求所对应的M的最大可能值,并证明你的结论.

证明:所求$M_{\max}=8$.

令1与18相同.将所有的$f^{[m]}(i+1),f^{[m]}(i)(i=1,2,\ldots,17;m=1,2,\ldots,M-1)$配成一对, 则所有的这样的数对均不相同.

否则设存在$(f^{[m_1]}(i+1),f^{[m_1]}(i))=(f^{[m_2]}(j+1),f^{[m_2]}(j))$.

因为f为双射,必然存在反函数f^{-1}.

若$m_1=m_2$,必有$(i+1,i)=(j+1,j)$.

否则设$m_1<m_2$,

$f^{-1[m_1]}(f^{[m_1]}(i+1))=i+1,f^{-1[m_1]}(f^{[m_1]}(i))=i$;

$f^{-1[m_1]}(f^{[m_2]}(j+1))=f^{[m_2-m_1]}(j+1),f^{-1[m_1]}(f^{[m_2]}(j))=f^{[m_2-m_1]}(j)$.

$\therefore (f^{[m_2-m_1]}(j+1),f^{[m_2-m_1]}(j))=(i+1,i)$.

$\therefore f^{[m_2-m_1]}(j+1)-f^{[m_2-m_1]}(j)\equiv 1\text{或}-1\pmod{17}$,矛盾.

所有这样的对共有$17(M-1)$对,但是由于没有任一对中两数之差的绝对值为1,所以最多有$\binom{17}{2}-17$对.

$\therefore 17(M-1)\leqslant\binom{17}{2}-17,M\leqslant 8$.

令$f(i)\equiv 3i+2\pmod{17}$,由归纳法不难证明$f^{[m]}(i)\equiv 3^m i+3^m-1\pmod{17}$.

而且$3^m\not\equiv\pm 1\pmod{17}(m=1,2,\ldots,7),3^8\equiv -1\pmod{17}$.

所以$f^{[m]}(i+1)-f^{[m]}(i)\equiv 3^m\not\equiv\pm 1\pmod{17}(i=1,2,\ldots,17)$

$f^{[8]}(i+1)-f^{[8]}(i)\equiv 3^8\equiv -1\pmod{17}(i=1,2,\ldots,17)$

即f满足条件并且$M=8$,所以$M_{\max}=8$.

6.设非负数列$a_1,a_2,\ldots$满足条件$a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,m,n\in\mathbb{N}$

求证:对任意$n\geqslant m$均有$a_n\leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m$.

证明:若$n=m$,结论显然成立.

否则设$n=km+r(1\leqslant r\leqslant m,k\in\mathbb{N}^*)$,则 $a_n\leqslant ka_m+a_r$.

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m} &\leqslant \frac{ka_m+a_r}{n}-\frac{a_m}{m}=\frac{(mk-n)a_m+ma_r}{mn}\\ &= \frac{ma_r-ra_m}{mn}=\frac{r}{n}(\frac{a_r}{r}-\frac{a_m}{m})\end{aligned}$$

而$a_r \leqslant ra_1, r \leqslant m.$

$$\therefore \frac{a_n}{n}-\frac{a_m}{m} \leqslant \frac{m}{n}(a_1-\frac{a_m}{m})$$

化简后即得到$a_n \leqslant ma_1+(\frac{n}{m}-1)a_m.$

第十三届中国数学奥林匹克(1998年)

广州 广州师范学院

1.在一个非钝角$\triangle ABC$中,$AB > AC, \angle B = 45^\circ$,$O$和$I$分别是$\triangle ABC$的外心和内心, 且$\sqrt{2}OI = AB - AC$,求$\sin A$.

解:由Euler公式$OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

$\therefore 2(R^2 - 2Rr) = (b-c)^2$.

又$r = \frac{1}{2}(a+c-b)\tan\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(a+c-b)$.

并且$\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.

所以$1 - 2(\sqrt{2}-1)(\sin A + \sin C - \sin B) = 2(\sin B - \sin C)^2$.

$\because \angle B = 45^\circ$,$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\sin C = \sin(135^\circ - A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A)$.

$\therefore 2\sin A\cos A - (2-\sqrt{2})\sin A - \sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$.

即$(\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0$.

所以$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$或者$\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$即$\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

综上所述,$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$或者$\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

2.给定大于1的正整数n,是否存在$2n$个两两不同的正整数, 同时满足以下两个条件:

(1)$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$;

(2)$n - 1 - \frac{1}{1998} < \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} < n - 1$.

请说明理由.

解:存在.

令$a_i = M + i, b_i = i (i = 1, 2, \ldots, n-1), a_n = k, b_n = k + (n-1)M$,其中$k, M$待定.

$$\begin{aligned}\therefore S &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M}{M+2i} - \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} \\ &= n - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M+2i} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M+2k}\right)\end{aligned}$$

显然$S < n-1$,而且$S > n - 1 - \frac{1}{1998}$等价于

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M+2i} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M+2k} < \frac{1}{1998}$$

令$M = 3996n(n-1), k = 1998(n-1)M$.则

$$T < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M+2k} = \frac{n(n-1)}{M} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M+2k} = \frac{1}{3996} + \frac{1}{3997} < \frac{1}{1998}$$

所以当$a_i=3996n(n-1)+i, b_i=i(i=1,2,\ldots,n-1)$,

$a_n=2\times 1998^2 n(n-1)^2+3996n(n-1)^2, b_n=2\times 1998^2 n(n-1)^2$时, 满足题设条件,证毕.

3.设$S=\{1,2,\ldots,98\}$, 求最小自然数n,使得S的任一n元子集中都可以选出10个数, 无论怎样将这10个数均分成两组, 总有一组中存在一个数与另外4个数都互质, 而另一组中存在一个数与另外4个数都不互质.

解:$n=50$.

设$A=\{x|x为偶数, x\in S\}$,则$|A|=49$.并且A中任一两数均不互质,所以A的任一10元子集均不满足要求, 无论怎样分组都不存在一个数与其余4个数都互质.

$\therefore n\geqslant 50$,下面证明S的任一50元子集T中都存在这样10个数,其中一个与其他九个数均互质, 而其他九个数有一个公因子,显然这十个数满足题意.用反证法,假设不存在这样的十个数.

$B_1=\{1,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97\}, |B_1|=11$,为1和大于49的质数组成的集合.

(1)如果$B_1\cap T\neq\emptyset$,设$a\in B_1, a\in T$,显然a与T中其他数均互质,所以T中不存在九个数有公因子,至多有8个偶数,8个3的倍数.

因为$C=\{x|x为奇数, 3|x, x\in S\}, |C|=16$,

所以$|T|\leqslant 8+8+(98-49-16)=49$,矛盾.

$B_2=\{13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}, |B_2|=10$,为大于12小于49的质数组成的集合.

(2)$T\cap B_1=\emptyset, T\cap B_2\neq\emptyset$,则$T$中至多有38个奇数,至少有12个偶数,$|T\cap A|\geqslant 12$.

设B_2中的$b\in T$,类似(1),$T\cap A$中至多有8个与b互质;

因为$[\frac{49}{b}]\leq 3$,所以$T\cap A$中不与b互质的至多有3个,$|T\cap A|\leqslant 11$,矛盾.

$B_3=\{5\times 11, 5\times 13, 5\times 17, 5\times 19, 7\times 7, 7\times 11, 7\times 13\}, |B_3|=7$.

(3)$T\cap B_1=T\cap B_2=\emptyset, T\cap B_3\neq\emptyset$,则$T$中至多有28个奇数,$|T\cap A|\geqslant 22$.

设B_3中$c\in T$,类似(1),$T\cap A$中至多有8个与b互质;

因为$[\frac{49}{5}]+[\frac{49}{11}]-[\frac{49}{5\times 11}]=13, [\frac{49}{7}]=7$,

所以$T\cap A$中不与c互质的至多有13个,$|T\cap A|\leqslant 21$,矛盾.

$B_4=\{5\times 7, 5\times 5, 3\times 31, 3\times 29, 3\times 23, 3\times 19, 3\times 17, 3\times 13, 3\times 11\}, |B_4|=9$.

(4)$T\cap B_1=T\cap B_2=T\cap B_3=\emptyset, T\cap B_4\neq\emptyset$,则$T$中至多有21个奇数,$|T\cap A|\geqslant 29$.

设B_4中$d\in T$,类似(1),$T\cap A$中至多有8个与d互质;

因为$[\frac{49}{5}]+[\frac{49}{7}]-[\frac{49}{5\times 7}]=15, [\frac{49}{3}]+[\frac{49}{11}]-[\frac{49}{3\times 11}]=19$,

所以$T\cap A$中不与d互质的至多有19个,$|T\cap A|\leqslant 27$,矛盾.

$B_5=S-A-B_1-B_2-B_3-B_4, |B_5|=12$,$B_5$中的数最多有2个不同质因子,$(3\times 5\times 7=105>98)$.

(5)$T\cap B_1=T\cap B_2=T\cap B_3=T\cap B_4=\emptyset, T\cap B_5\neq\emptyset$,则$T$中至多有12个奇数,$|T\cap A|\geqslant 38$.

设B_5中$s\in T$,类似(1),$T\cap A$中至多有8个与s互质;

因为$[\frac{49}{3}]+[\frac{49}{5}]-[\frac{49}{3\times 5}]=22$, 所以$T\cap A$中不与$s$互质的至多有22个,$|T\cap A|\leqslant 30$,矛盾.

(6)$T\cap B_i=\emptyset(i=1,2,3,4,5)$,$T$中没有奇数,所以$|T|\leqslant|A|=49$,矛盾.

综上所述,S的任一50元子集T中都存在这样10个数.所以$n=50$.

4.求所有大于3的自然数n, 使得$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$整除$2^{2000}$.

解:$1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)=\frac{1}{6}(n+1)(n^2-n+6)=2^k(k\leqslant 2000)$.

$\therefore (n+1)(n^2-n+6)=3\times 2^{k+1}$,$\because n>3, n+1>4, n^2-n+6>12$.

(1)$n+1=2^m, n^2-n+6=(2^m-1)^2-(2^m-1)+6=2^{2m}-3\times 2^m+8=3\times 2^t$.

$\because m\geqslant 3$,如果$m=3$,$n^2-n+6=48, n=7$,满足条件.

否则$m>3$,$n^2-n+6=2^{2m}-3\times 2^m+8\equiv 8 \pmod{16}$,

$\therefore 3\times 2^t\equiv 8 \pmod{16}, t=3, n^2-n=18$,$n$不是整数.

(2)$n+1=3\times 2^m, n^2-n+6=(3\times 2^m-1)^2-(3\times 2^m)+6=9\times 2^{2m}-9\times 2^m+8=2^t$.

$\because m\geqslant 1$,如果$m\geqslant 4$,$n^2-n+6\equiv 8 \pmod{16}$,

$\therefore 2^t\equiv 8 \pmod{16}, t=3.\therefore n^2-n+6=8, n^2-n=2, n=2, m=0$,矛盾.

否则$1\leqslant m\leqslant 3$,

$m=1, n=5, n^2-n+6=26$,不可能.

$m=2, n=11, n^2-n+6=116$,不可能.

$m=3, n=23, n^2-n+6=512=2^9$,$t=9$.

综上所述,$n=7,23$.经检验均符合条件.

5.设D为锐角三角形ABC内部一点,且满足条件:

$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA.$$

试确定D点的几何位置,并证明你的结论.

解:建立复平面,设A, B, C所对应的复数分别为z_1, z_2, z_3,D对应的复数为z.

考虑多项式$f(z)\equiv 1$,由Lagrange插值公式:

$$f(z)=\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}f(z_3)+\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}f(z_2)+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}f(z_1)=1$$

所以对于任意的$z\in\mathbb{C}$,

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}+\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}+\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}=1$$

$$\left|\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)}\right|+\left|\frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)}\right|+\left|\frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right|\geqslant 1$$

即对于平面上任意一点D,

$$\frac{DA\cdot DB}{CA\cdot CB}+\frac{DA\cdot DC}{BA\cdot BC}+\frac{DB\cdot DC}{AB\cdot AC}\geqslant 1$$

$$DA\cdot DB\cdot AB+DB\cdot DC\cdot BC+DC\cdot DA\cdot CA=AB\cdot BC\cdot CA$$

等号成立当且仅当$-\omega_1\omega_2, -\omega_2\omega_3, -\omega_3\omega_1\in\mathbb{R}^+$,

其中$\omega_1=\frac{z-z_1}{z_2-z_3}, \omega_2=\frac{z-z_2}{z_3-z_1}, \omega_3=\frac{z-z_3}{z_1-z_2}$.

所以$-\omega_j^2\in\mathbb{R}^+$,$\omega_j=k_j\mathrm{i}, k_j\in\mathbb{R}^+(j=1,2,3)$.

$\therefore \frac{z-z_1}{z_2-z_3}=\omega_1=k_1\mathrm{i}$,所以$DA\perp BC$,类似的有$DB\perp AC, DC\perp AB$.即$D$为$\triangle ABC$的垂心.

6.设$n \geqslant 2, x_1, x_2, \ldots, x_n$为实数,且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

对于每一个固定的自然数$k(1 \leqslant k \leqslant n)$,求$|x_k|$的最大值.

解:由于x_i与x_{n+1-i}在式中的对称性,可以设

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ = \quad & (\sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_2}x_2)^2 + (\sqrt{a_2}x_2 + \sqrt{1-a_3}x_3)^2 + \cdots + (\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1} + \sqrt{1-a_k}x_k)^2 \\ & +(\sqrt{1-a_{n+1-k}}x_k + \sqrt{a_{n-k}}x_{k+1})^2 + \cdots + (\sqrt{1-a_2}x_{n-1} + \sqrt{a_1}x_n)^2 \\ & +[1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]x_k^2 = 1 \end{aligned}$$

其中数列$\{a_n\}$满足:$a_1 = 1, 2\sqrt{a_i}\sqrt{1-a_{i+1}} = 1$.

即$a_{i+1} = 1 - \frac{1}{4a_i}$,

由数学归纳法不难证明:$a_i = \frac{i+1}{2i}, 1 - a_i = \frac{i-1}{2i}(i = 1, 2, \ldots)$.并且有$0 \leqslant a_i \leqslant 1$.

$\therefore [1-(1-a_k)-(1-a_{n+1-k})]x_k^2 \leqslant 1(k = 1, 2, \ldots, n)$.

即$|x_k| \leqslant \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$,等号成立当且仅当

$\sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_2}x_2 = \sqrt{a_2}x_2 + \sqrt{1-a_3}x_3 = \cdots = \sqrt{a_{k-1}}x_{k-1} + \sqrt{1-a_k}x_k = 0$,

并且$\sqrt{1-a_{n+1-k}}x_k + \sqrt{a_{n-k}}x_{k+1} = \cdots = \sqrt{1-a_2}x_{n-1} + \sqrt{a_1}x_n = 0$.

由$x_k = \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$,可以求得$x_1, x_2, \ldots, x_n$的值,所以等号可以取到.

所以$|x_k|$的最大值为$\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$.

第十四届中国数学奥林匹克(1999年)

北京 北京大学

1.在锐角$\triangle ABC$中, $\angle C > \angle B$, 点D是边BC上的一点,使得$\angle ADB$是钝角,H是$\triangle ABD$ 的垂心,点F在$\triangle ABC$内部且在$\triangle ABD$ 的外接圆上.

求证:点F是$\triangle ABC$垂心的充分必要条件是:HD平行于CF且H在$\triangle ABC$的外接圆上.

证明:不难证明如下的结论:点F是$\triangle ABC$的垂心的充分必要条件为$CF\perp AB$并且$\angle AFB = 180^\circ - \angle C$.

$\because H$是$\triangle ABD$的垂心,$\therefore HD\perp AB, \angle AHB = 180^\circ - \angle ADB$.

又因为A, B, D, F四点共圆,所以$\angle ADB = \angle AFB$.

所以点F是$\triangle ABC$垂心的充分必要条件是:HD平行于CF且$\angle AHB = \angle C$.

而$\angle AHB = \angle C \Leftrightarrow H$在$\triangle ABC$的外接圆上(因为$\angle ADB$为钝角,$H$不可能在劣弧$\widehat{AB}$上,必然与$C$在$AB$同侧).所以原命题成立,证毕.

2.给定实数a,设实系数多项式序列$\{f_n(x)\}$满足:

$$f_0(x)=1, f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_n(ax),$$

其中$n=0,1,\ldots$.

(1)求证:$f_n(x) = x^n f_n(\frac{1}{x})$,其中$n=0,1,\ldots$.

(2)求$f_n(x)$的明显表达式.

解:当$a=1$时,$f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(x)$,由数学归纳法有$f_n(x) = (x+1)^n$.则

$f_n(x) = (x+1)^n = x^n(\frac{1}{x}+1)^n = x^n f_n(\frac{1}{x})$.

当$a\neq 1$时,定义$T_n = (a^n-1)(a^{n-1}-1)\cdots(a-1), (n\in\mathbb{N}^*), T_0 = 1$.

$S_n^k = \frac{T_n}{T_k T_{n-k}}(k\leqslant n)$.我们用归纳法证明:$f_n(x) = S_n^n x^n + S_n^{n-1}x^{n-1} + \cdots + S_n^0$.

对于$n=0$,显然是成立的,假设对于$n=k$成立,

对于$n=k+1$,由归纳假设,$f_{k+1}(x)$的m次项系数为$S_k^{m-1} + a^m S_k^m$,只需证明

$S_k^{m-1} + a^m S_k^m = S_{k+1}^m$

$\Leftrightarrow \frac{T_k}{T_{m-1}T_{k+1-m}} + a^m\frac{T_k}{T_m T_{k-m}} = \frac{T_{k+1}}{T_m T_{k+1-m}}$

$\Leftrightarrow (a^m-1) + a^m(a^{k+1-m}-1) = a^{k+1}-1$,这显然是成立的.

所以$f_{k+1}(x) = S_{k+1}^{k+1}x^{k+1} + S_{k+1}^k x^k + \cdots + S_{k+1}^0$.

所以$f_n(x) = S_n^n x^n + S_n^{n-1}x^{n-1} + \cdots + S_n^0$对于任意的$n\in\mathbb{N}$均成立.

由于$S_n^k = S_n^{n-k}$,所以

$$\begin{aligned} x^n f_n(\frac{1}{x}) &= x^n(S_n^n\frac{1}{x^n} + S_n^{n-1}\frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + S_n^0) \\ &= S_n^n + S_n^{n-1}x + \cdots + S_n^0 x^n = S_n^n x^n + \cdots + S_n^0 = f_n(x) \end{aligned}$$

综上所述结论(1)成立,并且

$$f_n(x) = \begin{cases} (x+1)^n & a=1 \\ S_n^n x^n + S_n^{n-1}x^{n-1} + \cdots + S_n^0 & a\neq 1(\text{其中}S_n^k\text{定义如前}) \end{cases}$$

3.MO太空城由99个空间站组成,任何两空间站之间都有一条管形通道相连. 规定其中99条通道为双向通行的主干道.其余通道严格单向通行, 如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站, 则称这四个站的集合为一个互通四站组.试为MO太空城设计一个方案, 使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数,并证明你的结论).

解:如果从某个空间站到另三个空间站的通道均是由该站单向发出, 那么这四个空间站不是互通四站组,将所有这样的四站组记为A类非互通四站组. 其余非互通四站组记为B类.

将空间站编号为1,2,...,99,设从第i各空间站出发的单向通道有k_i条,

则$|A|=\sum\limits_{i=1}^{99}\binom{k_i}{3}$,并且$\sum\limits_{i=1}^{99}k_i=\binom{99}{2}-99=99\times 48$.

$\because$ 当$k>l$时,$k\geqslant l+1$,而$\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}=\binom{k-1}{2}$.

$\therefore \binom{k-1}{2}\geqslant\binom{l}{2}\Leftrightarrow\binom{k}{3}-\binom{k-1}{3}\geqslant\binom{l+1}{3}-\binom{l}{3}\Leftrightarrow\binom{k}{3}+\binom{l}{3}\geqslant\binom{k-1}{3}+\binom{l+1}{3}$.

所以经有限次调整知$|A|\geqslant 99\times\binom{48}{3}$,而$|B|\geqslant 0$.

所以互通四站组最多有$\binom{99}{4}-99\binom{48}{3}=2052072$个.

构造一种方案使得互通四站组的个数达到最大值,将所有空间站编号为1,2,...,99,并且按照该顺序排列在一个圆上.

(1,2),(2,3),...,(98,99),(99,1)为双向主干道.

其余的通道(i,j),若从i到j顺时针经过偶数个空间站,则(i,j)为由i到j的单向通道.

因为i到j顺时针经过偶数个空间站等价于从j到i顺时针经过奇数个空间站,所以可以这样安排.

非互通四站组若不含双向主干道,要么有一站到另三个空间站的通道均是由该站单向发出,即为A类非互通四站组; 要么有一站到另三个空间站的通道均是向该站发出,设$B\to A,C\to A,D\to A$,且顺时针方向依次为A,B,C,D.不难知道$B\to C$,$B\to D$,所以B到另三个空间站的通道均是由该站单向发出,为A类非互通四站组.

若四站组含有双向主干道,则易知其他任意空间站到这两站均为一进一出,必为互通四站组.

所以没有B类非互通四站组,且从每个空间站均发出48条单向通道.即此时互通四站组的个数达到最大值2052072.

4.设m是给定的整数.求证:存在整数a,b和k, 其中a,b均不能被2整除, $k\geqslant 0$, 使得

$$2m=a^{19}+b^{99}+k\times 2^{1999}.$$

解:若$x\not\equiv y \pmod{2^{1999}}$,$x,y$为奇数,则由$x^{19}-y^{19}=(x-y)(x^{18}+x^{17}y+\cdots+y^{18})$.

因为后一个括号中为奇数,所以与2^{1999}互质,所以$x^{19}\not\equiv y^{19} \pmod{2^{1999}}$.

所以当a取遍2^{1999}的既约剩余系时,a^{19}也取遍2^{1999}的既约剩余系.

令$b=1$,存在a,$a^{19}\equiv 2m-1 \pmod{2^{1999}}$,并且有无穷多个这样的$a$. 当$a$足够小时,不难知道$k$为正整数,证毕.

5.求最大的实数λ,使得当实系数多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$的所有根都是非负实数时, 只要$x\geqslant 0$,就有$f(x)\geqslant\lambda(x-a)^3$.并问上式中等号何时成立?

解:$\lambda=-\frac{1}{27}$.设$f(x)$的三个根为α,β,γ,$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

不妨设$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$,则$-a=\alpha+\beta+\gamma$,$x-a=x+\alpha+\beta+\gamma\geqslant 0$.

(1)$0 \leqslant x \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$;

$f(x) = -(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x) \geqslant -(\frac{\alpha+\beta+\gamma-3x}{3})^3 \geqslant -(\frac{\alpha+\beta+\gamma+x}{3})^3 = -\frac{1}{27}(x-a)^3$.

(2)$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < x \leqslant \gamma$;

$f(x) = -(x - \alpha)(x - \beta)(\gamma - x) \geqslant -(\frac{-\alpha-\beta+x+\gamma}{3})^3 \geqslant -(\frac{\alpha+\beta+\gamma+x}{3})^3 = -\frac{1}{27}(x-a)^3$.

(3)$\alpha < x \leqslant \beta$或者$x > \gamma$;

$f(x) \geqslant 0 \geqslant -\frac{1}{27}(x-a)^3$.

综上所述$f(x) \geqslant -\frac{1}{27}(x-a)^3$.并且$x = 0, \alpha = \beta = \gamma$或者$\alpha = \beta = 0, \gamma = 2x$时等号成立.

6.$4 \times 4 \times 4$的大正方体由64个单位正方体组成. 选取其中的16个单位正方体涂成红色, 使得大正方体中每个由4个单位正方体组成的$1 \times 1 \times 4$的小长方体中, 都恰有1个红色单位正方体.问16个红色单位正方体共有多少种不同取法?说明理由.

解:在底面16个正方形中每个写上1,2,3,4之一,表示该竖直$1 \times 1 \times 4$小长方体中从下往上第几个为红色.形成一个4×4的数表,其中每行每列均为1,2,3,4的一个排列,称为4阶拉丁方, 并将第一行第一列按顺序均为1,2,3,4的拉丁方称为4阶标准拉丁方,显然16个红色单位正方体不同取法数目为4阶拉丁方的数目.

显然将4阶拉丁方任两行(列)调换仍为4阶拉丁方,对于任意一个4阶拉丁方,先通过调换列使之第一行为1,2,3,4; 再通过调换2,3,4行使第一列为1,2,3,4,形成唯一一个4阶标准拉丁方.而每个4阶标准拉丁方,对应$4! \times 3!$个4阶拉丁方, (第一行有4!中排列,第一列后三个格有3!中排列).只需求4阶标准拉丁方的个数.

考虑第二行第二列那个各种所填的数,显然不为2.

(1)填1,第二行第二列已经确定,剩下4个方格填入2个1,2个2,显然有两种填法.

(2)填3,第二行第二列已经确定,易知剩下4个方格也已经确定.填4类似.

所以共有4个4阶标准拉丁方.所以4阶拉丁方有$4 \times 4! \times 3! = 576$个.

所以16个红色单位正方体不同取法数目为576.

第十五届中国数学奥林匹克(2000年)
合肥 中国科技大学

1.设a,b,c为$\triangle ABC$的三条边, $a \leqslant b \leqslant c$, R和r分别为$\triangle ABC$的外接圆半径和内切圆半径. 令$f = a+b-2R-2r$,试用角C的大小来判定f的正负.

解:用A,B,C分别表示$\triangle ABC$的三个内角.由公式

$a = 2R\sin A, b = 2R\sin B, r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

$$\begin{aligned}
f &= a+b-2R-2r \\
&= 2R(\sin A+\sin B-1-4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\
&= 2R(2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-1-2\sin\frac{C}{2}(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2})) \\
&= 2R(2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}-1-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin^2\frac{C}{2}) \\
&= 2R(2\cos\frac{A-B}{2}(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2})-(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2})) \\
&= 2R(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2})(2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2})
\end{aligned}$$

$\because a \leqslant b \leqslant c, \therefore \angle A \leqslant \angle B \leqslant C$.

$\therefore 0 \leqslant \frac{B-A}{2} < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant \frac{B-A}{2} < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$.

$\therefore \cos\frac{A-B}{2} > \cos\frac{C}{2}, \frac{A-B}{2} > \cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$.

$\therefore 2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2} > 0$.

$\therefore f > 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2} > 0 \Leftrightarrow \angle C < \frac{\pi}{2}$;

$f = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow \angle C = \frac{\pi}{2}$;

$f < 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2} < 0 \Leftrightarrow \angle C > \frac{\pi}{2}$.

2.数列$\{a_n\}$定义如下:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2}na_{n-1}+\frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2}+(-1)^n(1-\frac{n}{2})(n \geqslant 3).$$

试求

$$f_n = a_n+2\binom{n}{1}a_{n-1}+3\binom{n}{2}a_{n-2}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n-2}a_2+n\binom{n}{n-1}a_1$$

的最简表达式.

解:令$b_n = \dfrac{a_n}{(-1)^n n!}$,则$b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_n = -\frac{1}{2}b_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-2}+\frac{2-n}{2n!}(n \geqslant 3)$.

设$c_n = b_n+b_{n-1}, 2c_{n-1} = c_{n-2}+\frac{2-n}{n!}(n \geqslant 3)$.

$\therefore 2c_{n+1} = c_n-\frac{n}{(n+2)!}(n \geqslant 1)$.

$2(c_{n+1}-\frac{1}{(n+2)!}) = c_n-\frac{n}{(n+2)!}-\frac{2}{(n+2)!} = c_n-\frac{1}{(n+1)!}$.

并且$c_1 = b_1+b_2 = \frac{1}{2}, \therefore c_1-\frac{1}{2!} = 0$.

$\therefore c_n-\frac{1}{(n+1)!} = 0, c_n = \frac{1}{(n+1)!}$,

即$b_n+b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

令
$$g_n=\frac{f_n}{n!}=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\binom{n}{n-k}a_k=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n-k+1}{(n-k)!}b_k$$

$$\begin{aligned}\therefore g_{n+1}-g_n &= \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}b_k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{n-k+1}{(n-k)!}b_k\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}b_k-\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1}\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}b_{k-1}\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}(b_k+b_{k-1})\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\frac{n-k+2}{(n+1-k)!}\frac{1}{k!}\\ &= \sum_{k=2}^{n+1}\frac{(-1)^k}{(n+1-k)!k!}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!k!}\\ &= \frac{1}{(n+1)!}\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}+\frac{1}{n!}\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\end{aligned}$$

$$\because\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}=(1-1)^{n+1}=0,\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1-1)^n=0$$

$$\therefore g_{n+1}-g_n=\frac{0+n+1-1}{(n+1)!}+\frac{0+n-1}{n!}=\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n-1}{n!}=\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

$\because g_3=2b_2+b_3=\dfrac{4}{3}$

$$\therefore f_n=n!g_n=n!\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{(k-2)!}-\sum_{k=4}\frac{1}{k!}+g_3\right)=n!\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)=2n!-n-1(n\geqslant 3)$$

不难验证对于$n=1,2$也成立,所以$f_n=2n!-n-1$.

3.某乒乓俱乐部组织交流活动,安排符合以下规则的双打赛程表,规则为:

(1)每个参赛者至多属于两个对子;

(2)任意两个不同对子之间至多进行一次双打;

(3)凡表中同属一对的两人就不在任何双打中作为对手相遇.

统计各人参加的双打次数，约定将所有不同的次数组成的集合称为“赛次集”.

给定由不同的正整数组成的集合$A=\{a_1,a_2,\dots,a_k\}$,其中每个数都能被6整除. 试问至少必须有多少人参加活动,才可以安排符合上述规则的赛程表, 使得相应的赛次集恰为A,请证明你的结论.

解:设$a_1<a_2<\cdots<a_k$,必存在某个参赛者参加了a_k场比赛.

若该参赛者只属于一个对子,则有a_k个对子与该对进行比赛,至少有a_k+2人;

若该参赛者属于两个对子,至少有$\frac{1}{2}a_k$对与这两对进行比赛,至少有$\frac{a_k}{2}+3$人.

所以至少有$\frac{a_k}{2}+3$人参加比赛.

下面用归纳法构造$\frac{a_k}{2}+3$人参赛的赛程表.

$k=1$,将$\frac{a_1}{2}+3$人分成3人小组,每组三人两两结成对子,每人恰参加两个对子.

让每个对子都与其他小组的对子进行比赛,显然每个人都进行了a_1场比赛,满足条件.

$k=2$,将$\frac{a_2}{2}+3$人分成两大组$S,T,|S|=\frac{a_1}{2},|T|=\frac{a_2-a_1}{2}+3$.

同样将每大组分为3人小组,每组三人两两结成对子,每人恰参加两个对子.

S大组中任一对都与其他小组的对子进行比赛,每个人都比赛了a_2场;

T大组中任一对都只与S大组中的所有对子比赛,每个人都比赛了a_1场.满足条件.

设$k-1,k$时命题成立,存在这样的赛次集.当$k+1$时$(k>1)$,

将$\frac{a_1}{2}+3$人分成三大组$S,T,U.|S|=\frac{a_1}{2},|T|=\frac{a_k-a_1}{2}+3,|U|=\frac{a_{k+1}-a_k}{2}$.

同样将每大组分成3人小组,每组三人两两结成对子,每人恰参加两个对子.

S大组中任一对都与其他小组的对子进行比赛,每个人都比赛了a_{k+1}场;

U大组中任一对都只与S大组中的所有对子比赛,每个人都比赛了a_1场.

由归纳假设,可在T大组中安排赛程,使得赛次集为$\{a_2-a_1,a_3-a_1,\dots,a_k-a_1\}$.

又因为T大组中任一对都与S大组中的所有对子比赛,每个人又都比赛了a_1场.

所以T大组中的人比赛场次所组成的集合为$\{a_2,a_3,\dots,a_k\}$,

所以所有选手的赛次集为A,满足条件.

由归纳法存在$\frac{a_k}{2}+3$人参赛的赛程表,使得赛次集为A.

综上所述,最少有$\frac{a_k}{2}+3$人参加.

4.设$n\geqslant 2$.对n元有序实数组

$$A=(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

令

$$b_k=\max_{1\leqslant i\leqslant k}a_i,(k=1,2,\dots,n).$$

称$B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$为A的“创新数组”;

称B中的不同元素个数为A的“创新阶数”.

考察$1,2,\dots,n$的所有排列(将每种排列都视为一个有序数组), 对其中创新阶数为2的所有排列,求它们的第一项的算术平均值.

解:设第一项为k的创新阶数为2的排列有x_k个,显然$x_n=0$.

而$k=1,2,\dots,n-1$时,排列中所有大于k小于n的数必排在n之后.

其他的数的位置可以任意取.

即所有大于k的$n-k$个数中n排在最前,恰占全部排列的$\frac{1}{n-k}$.

$\therefore x_k=\frac{(n-1)!}{n-k}$.

所以所求平均值为

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}kx_k}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}x_k}=\frac{(n-1)!\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{n-k}}{(n-1)!\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{n-k}}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\left(\dfrac{n}{k}-1\right)}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{k}}=n-\frac{n-1}{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n-1}}$$

5.若对正整数n,存在k,使得

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1,$$

其中$n_1, n_2, \ldots, n_k$都是大于3的整数,则称n具有性质P. 求具有性质P的所有数n.

解:显然n为奇数,并且存在$m \in \mathbb{N}^*, n = 2^m - 1$.

当$m = 1, 2, \ldots, 9$时,不难验证只有$m = 3, n = 7$满足要求.

当$m \geqslant 10$时,由归纳法不难证明:$2^m - 1 > m^3$.

$$2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1 > \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3$$

而由$n_i > 3, n_i \geqslant 5$,所以
$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3 \geqslant 4\left(\frac{n_i - 1}{2}\right) > n_i$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1 > n_1 n_2 \cdots n_k$$

所以具有性质P的n只有7.

6.某次考试有5道选择题,每题都有4个不同答案供选择, 每人每题恰选1个答案,在2000份答卷中发现存在一个n, 使得任何n份答卷中都存在4份, 其中每两份的答案都至多3道题相同.求n的最小可能值.

解:将每个题的答案记为1,2,3,4.每份答案记为(a, b, c, d, e),其中$a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4\}$.

将$(1, b, c, d, e)(2, b, c, d, e)(3, b, c, d, e)(4, b, c, d, e)$记作一组.共$4^4 = 256$组, 由抽屉原则,至少有一组有$[\frac{2000}{256}] + 1 = 8$份答卷; 去掉该组后仍然还有一组有8份答卷,再去掉这组后仍然还有一组有8份答卷. 这24份答卷中任4份至少有两个在同一组,它们有4题答案相同.所以$n \geqslant 25$.

$n = 25$时,构造如下2000份答卷满足题意,每份答卷都使得$a + b + c + d + e \equiv 0 \pmod 4$, 所以前面每一组中至多有一份答卷,共256种不同的答卷,任两份不同的答卷都至多有3题答案相同. 任取其中250种,每种恰有8份答卷,任取25份答卷,必有4份不同的答卷,它们之间任两份至多有3题答案相同.所以$n = 25$.

第十六届中国数学奥林匹克(2001年)

香港 数学奥林匹克委员会

1.给定$a,\sqrt{2}<a<2$. 内接于单位圆 Γ的凸四边形$ABCD$适合以下条件:

(1)圆心在这凸四边形内部;

(2)最大边长是a,最小边长是$\sqrt{4-a^2}$.

过点A,B,C,D依次作圆Γ的四条切线L_A,L_B,L_C,L_D. 已知L_A与L_B,L_B与L_C,L_C与L_D, L_D与L_A分别相交于 A',B',C',D'四点.求面积之比$\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}$的最大值与最小值.

解:设圆Γ的圆心为O,并记$\angle AOB=2\theta_1,\angle BOC=2\theta_2,\angle COD=2\theta_3,\angle DOA=2\theta_4$.于是$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$都是锐角,且$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\pi$.不难求得

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sin 2\theta_i, S_{A'B'C'D'}=\sum_{i=1}^{4}\tan\theta_i$$

由于上式关于$\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$对称, 不妨设$AB=a,AD=\sqrt{4-a^2},\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\theta_3\geqslant\theta_4$.

则$\sin\theta_1=\frac{a}{2},\sin\theta_4=\frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$, 易知$\theta_1+\theta_4=\frac{\pi}{2},\theta_2+\theta_3=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \tan\theta_1+\tan\theta_4=\frac{\sin(\theta_1+\theta_4)}{\cos\theta_1\cos\theta_4}=\frac{1}{\cos\theta_1\sin\theta_1}=\frac{2}{\sin 2\theta_1}$$

$$\tan\theta_2+\tan\theta_3=\frac{2}{\sin 2\theta_2}$$

$$T=\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}=\frac{\dfrac{2}{\sin 2\theta_1}+\dfrac{2}{\sin\theta_2}}{\sin 2\theta_1+\sin\theta_2}$$

而$\sin 2\theta_1=\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}$, $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta_2\leqslant\theta_1$,

$\therefore \frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}\leqslant\sin 2\theta_2\leqslant 1$.

由于T是关于$\sin 2\theta_2$的严格减函数,

$$T_{\max}=\frac{2}{(\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2})^2}=\frac{8}{a^2(4-a^2)},T_{\min}=\frac{\dfrac{4}{a\sqrt{4-a^2}}+2}{\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}+1}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$$

2.设$X=\{1,2,3,\dots,2001\}$, 求最小的正整数m,满足要求:对X的任何一个m元子集W, 都存在u,v(u和v允许相同),使得$u+v$是2的方幂.

解:令$Y=\{2001,2000,\dots,1025\}\cup\{46,45,\dots,33\}\cup\{17\}\cup\{14,13,\cdots,9\}$, 则$|Y|=998$,并且可以证明对于任何$u,v\in Y$,$u+v$都不是2的方幂.

事实上,当$u,v\in Y$时,不妨设$u\geqslant v$并且有$2^r<u\leqslant 2^r+a<2^{r+1}$,其中当$r$分别取值10,5,4,3时,相应的$a$值依次为977,14,1,6.

(1)若$2^r<v\leqslant u$,则$2^{r+1}<u+v<2^{r+2}$;

(2)若$1\leqslant v<2^r$,则当$2^r<u\leqslant 2^r+a,1\leqslant a<2^r$时,$1\leqslant v<2^r-a$.于是$2^r<u+v<2^{r+1}$.

这表明$u+v$不是2的方幂.证毕.

故知所求的最小正整数$m \geqslant 999$.

将X划分成下列999个互不相交的子集:

$A_i=\{1024-i,1024+i\}, i=1,2,\ldots,977;$

$B_j=\{32-j,32+j\}, j=1,2,\ldots,14;$

$C=\{15,17\};$

$D_k=\{8-k,8+k\}, k=1,2,3,4,5,6;$

$E=\{1,8,16,32,1024\}.$

对于X的任何一个999元子集W,若$W \cap E \neq \emptyset$,则从中任取一个元素的2倍都是2的方幂;若$W \cap E = \emptyset$,则W中的999各元素分属于前面的998个2元子集,由抽屉原理知W中必有不同的u和v属于其中同一个子集, 显然$u+v$是2的方幂.

综上所述,所求的最小正整数$m=999$.

3.在正n边形的每个顶点上各停有一只喜鹊.突然受到惊吓, 众喜鹊都飞去.一段时间后,它们又都回到这些顶点上, 仍是每个顶点上一只,但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数n,使得一定存在3只喜鹊, 以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形, 或同为直角三角形,或同为钝角三角形.

解:对于$n=3$,结论显然成立.

若$n \geqslant 4$,n为偶数,设A,B原来的位置为直径的两端点,若回来后仍为直径的两端点,则任取另一只C,可知前后$\triangle ABC$均为直角三角形;否则设回来后A的对径点为C,则前后$\triangle ABC$均为直角三角形,结论成立.

若$n \geqslant 7$,n为奇数,不妨设A回到原顶点,否则可通过旋转使得A回到原顶点. 作以A为一个端点的直径,在直径两侧各有$\frac{n-1}{2} \geqslant 3$个点. 考虑原来在同一侧的三个点,由抽屉原则,回来后必有两个仍在同一侧,不妨设为B,C,则$\triangle ABC$前后均为钝角三角形,结论成立.

$n=5$时,设原先按顺时针排列为A,B,C,D,E,返回后按顺时针排列为A,C,E,B,D,则此时不难验证所有的钝角三角形变为锐角三角形, 所有的锐角三角形变为钝角三角形,结论不成立.

综上所述,所求的n为所有不小于3且不等于5的整数.

4.设$a,b,c,a+b-c,a+c-b,b+c-a,a+b+c$是7个两两不同的质数, 且$a,b,c$中有两数之和是800.设$d$是这7个质数中最大数与最小数之差. 求$d$的最大可能值.

解:不妨设$a<b<c$,显然$a+b-c$最小,$a+b+c$最大,所以$d=2c$.只需求c的最大值.

$\because a+b-c>0, c<a+b, c<a+c, c<b+c, \therefore c<800.$

小于800的质数从大到小依次为797,787,...

若$c=797, a+b=800, a+b-c=3, a+b+c=1597,$

令$a=13, b=787, a+c-b=23, b+c-a=1571$.不难验证均为质数,所以$d_{\max}=2\times 797=1594$.

5.将周长为24的圆周等分成24段.从24个分点中选取8个点, 使得其中任何两点间所夹的弧长都不等于3和8. 问满足要求的8点组的不同取法共有多少种?说明理由.

解:将这些点按顺时针方向依次标为1,2,. . . ,24,并排成如下3×8的表格:

1	4	7	10	13	16	19	22
9	12	15	18	21	24	3	6
17	20	23	2	5	8	11	14

在表中,同一列相邻两数所代表的点之间所夹弧长为8,同一行相邻两数所代表的点之间所夹弧长为3,(第一列与第八列也是相邻的,第一行与第三行也是相邻的).所以在表中每相邻两数所代表的点均不能同时取. 即每一列只能取一个数,并且恰好取一个数.

记从$3\times n$数表中每列恰取一个数且任何相邻两列(包括第n列与第一列)所取得数均不同行的取法为x_n种.

从第一列取一个数有3种取法,第一列取定后,第2列所取得数不能与第一列同行,只有两种不同取法,以后每一列均有两种取法, 共3×2^n种取法,但是第一列与最后一列所取的数同行的所有取法都不满足要求, 这时将这两列看作一列,即为$n-1$列时的所有取法,所以$x_n+x_{n-1}=3\times 2^{n-1}$.

$$\begin{aligned}\therefore x_8 &= 3\times 2^7-x_7=3\times 2^7-(3\times 2^6-x_6)\\ &= 3\times(2^7-2^6)+x_6=\cdots\\ &= 3\times(2^7-2^6+2^5-2^4+2^3-2^2+2)=258\end{aligned}$$

既满足题中要求的不同取法总数为258.

6.记$a=2001$.设A是适合下列条件的正整数对(m,n)所组成的集合:

(1)$m<2a$;

(2)$2n|(2am-m^2+n^2)$;

(3)$n^2-m^2+2mn\leqslant 2a(n-m)$.

令
$$f=\frac{2am-m^2-mn}{n},$$

求$\min\limits_{(m,n)\in A} f$和$\max\limits_{(m,n)\in A} f$.

解:(1)先求f的最小值,令
$$p=\frac{2am-m^2+n^2}{2n}\qquad(*)$$

由条件(1)和(2)可知,p为正整数且有
$$(2a-m)m=(2p-n)n\qquad(**)$$

$\because 2a-m>0$,所以$2p-n>0$.由条件(3)可得

$$2am-m^2+n^2=2am-2mn+2mn-m^2+n^2\leqslant 2am-2mn+2a(n-m)=2n(a-m)$$

从而由$(*)$,$p\leqslant a-m$.所以$2p-n<2p\leqslant 2(a-m)<2a-m$.

由$(**)$知,m,n同奇偶,且$n>m$.

设$(m,n)\in A$,令$n'=2p-n=\frac{2am-m^2}{n}$,显然$n'$也是正整数而且容易验证$(m,n)\in A\Leftrightarrow(m,n')\in A$.事实上,不难验证下面两式成立

$$p'=\frac{2am-m^2+n'^2}{2n'}=\frac{2am-m^2+n^2}{2n}=p$$

$$n'^2-m^2+2mn'-2a(n'-m)=\frac{2am-m^2}{n^2}[n^2-m^2+2mn-2a(n-m)]$$

由$2a>m$,便知关于(m,n')的条件(2)(3)成立的充要条件是关于(m,n)的条件(2)(3)成立. 即$(m,n)\in A\Leftrightarrow(m,n')\in A$.

这样一来,易知$(m,n)\in A$时,$f(m,n)=n'-m,f(m,n')=n-m$.

$\therefore f(m,n)=n'-m\geqslant 2$.

取$m=2$,条件化为$2n|4a-4+n^2$. 即$\frac{4000}{n}+\frac{n}{2}$为正整数,$n^2-3998n+8000\leqslant 0$. 又$n$为正整数,$3\leqslant n\leqslant 3995$,又$n$为4000的偶因子,取$n=2000,f(2,2000)=2$.

综上可知 $\min\limits_{(m,n)\in A} f=2$.

(2)再求f的最大值.因为$(m,n)\in A$时,m,n奇偶性相同且$n>m$,令$n=m+2u,u$为正整数,于是有

$$\begin{aligned}f(m,n)&=\frac{2am-m^2-mn}{n}\\&=\frac{2(a-u)m-2m^2}{m+2u}\\&=\frac{2(a-u)(m+2u)-2(a-u)2u}{m+2u}-\frac{2(m+2u)^2+8(m+2u)u-8u^2}{m+2u}\\&=(2a+6u)-2\left[m+2u+\frac{2u(a+u)}{m+2u}\right]\end{aligned}$$

由(3),知$(m+2u)^2-m^2+2m(m+2u)\leqslant 4ua$,

即$m^2+4um-2au+2u^2\leqslant 0,m\leqslant -2u+\sqrt{2u(a+u)},m+2u\leqslant\sqrt{2u(a+u)}$. 所以当$u$固定时,$f(m,m+2u)$关于$m$严格递增.

$\because f(m,m+2u)$为偶数,所以$m+2u$必为$2u(a+u)$的因子,

$u=1$时,$2(a+1)=4004=4\times 7\times 11\times 13$. 而若要$m+2u+\frac{2u(a+u)}{m+2u}$尽量大,$m+2u$应尽量接近$\sqrt{2u(a+u)}=\sqrt{4004}$,

$m+2|4004,n=m+2=52,m=50,(m,n)\in A,f(50,52)=4002+6-2(52+\frac{4004}{52})=3750$.

所以有$f(m,m+2)\leqslant 3750$.

以下证明:对于任意的$(m,n)\in A$,都有$f(m,n)\leqslant 3750$.

上面已证$n=m+2$时,结论成立,由于m,n奇偶性相同且$n>m$,故可以设$n\geqslant m+4$,于是

$$f(m,n)=\frac{(2a-m)m}{n}-m\leqslant\frac{(2a-m)m}{m+4}-m$$

只需证明:对于任意的$1\leqslant m<2a=4002$,都有

$$\frac{(2a-m)m}{m+4}-m\leqslant 3750$$

整理后得$m^2-124m+2\times 3750\geqslant 0$.

由于$\Delta=124^2-8\times 3750=4(62^2-7500)<0$,所以结论是成立的.

综上可知,$\max\limits_{(m,n)\in A} f=3750$.

第十七届中国数学奥林匹克(2002年)

上海 上海中学

1.三角形ABC的三边长分别为$a,b,c,b<c$, AD是角A的内角平分线,点D在边BC上.

(1)求在线段AB,AC内分别存在点E,F(不是顶点)满足$BE=CF$和$\angle BDE=\angle CDF$ 的充分必要条件(用角A,B,C表示);

(2)在点E和F存在的情况下,用a,b,c表示BE的长.

解:(1)因为AD平分$\angle BAC$,所以D到AB,AC距离相等,又由于$BE=CF$,所以$S_{\triangle DBE}=S_{\triangle DFC}$.

$\because \angle BDE=\angle CDF$,$\therefore BD\cdot DE=CD\cdot DF$.

又$BE=CF$,$BD^2+DE^2-2BD\cdot DE\cos\angle BDE=CD^2+DF^2-2CD\cdot DF\cos\angle CDF$.

$\therefore BD^2+DE^2=CD^2+DF^2$.所以$BD=CD,DE=DF$或者$BD=DF,CD=DE$.

因为$b<c$,所以$BD>DC$,所以$BD=DF,CD=DE$.

可以得到$\triangle BDE\cong\triangle FDC$,$\angle B=\angle DFC,\angle C=\angle BED$,并且$\angle BDE=\angle CDF=\angle A$.

而$\angle C>\angle B=\angle DFC>\angle DAC=\frac{1}{2}\angle A$, $\therefore 2\angle B>\angle A$.

反之,如果$2\angle B>\angle A$,作$\angle CDF=\angle BDE=\angle A$,则$F,E$分别在$AC,AB$上,

$\triangle FDC\backsim\triangle BAC\backsim\triangle BDE$.

又D到FC,BE距离相等,所以$\triangle BDE\cong\triangle FDC$,$BE=CF$.

所以充要条件为$2\angle B>\angle A$.

(2)因为$\triangle BAC\backsim\triangle BDE$,所以$\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{BE}{BC}$,$BE=\dfrac{BC\cdot BD}{BA}$.

再由角平分线定理,$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$,$\therefore BD=\dfrac{ac}{b+c}$,所以$BE=\dfrac{a^2}{b+c}$.

2.设多项式序列$\{P_n(x)\}$满足:$P_1(x)=x^2-1,P_2(x)=2x(x^2-1)$, 且

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x)=(P_n(x))^2-(x^2-1)^2,n=2,3,\ldots.$$

设s_n为$P_n(x)$各项系数的绝对值之和.

对于任意正整数n,求非负整数k_n,使得$2^{-k_n}s_n$为奇数.

解:设$P_i(x)=Q_i(x)(x^2-1)$,则$Q_1(x)=1,Q_2(x)=2x,Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x)=(Q_n(x))^2-1$.

设t_n为$Q_n(x)$各项系数的绝对值之和,

因为$Q_{n+1}Q_{n-1}=Q_n^2-1,Q_{n+2}Q_n=Q_{n+1}^2-1$,所以$Q_{n+1}Q_{n-1}+Q_{n+1}^2=Q_{n+2}Q_n+Q_n^2$.

所以$\dfrac{Q_{n+2}+Q_n}{Q_{n+1}}=\dfrac{Q_{n+1}+Q_{n-1}}{Q_n}$,$\therefore$对于$\forall n\in\mathbb{N}^*$,$\dfrac{Q_{n+2}+Q_n}{Q_{n+1}}=\dfrac{Q_3+Q_1}{Q_2}=2x$.

$\therefore Q_{n+2}(x)=2xQ_{n+1}(x)-Q_n(x)$.

由归纳法不难证明如下结论:

(1)$Q_n(x)$为首项系数为正的$n-1$次整系数多项式;

(2)$Q_{2k}(x)$只有奇数项,$Q_{2k+1}(x)$只有偶数项,$(k\in\mathbb{N})$;

(3)$Q_n(x)$所有系数不为0的项的系数从大到小为正负交替.

所以$t_{n+2}=2t_{n+1}+2t_n$,$s_n=2t_n$.补充定义$t_0=s_0=0$.

由$t_1=1,t_2=2$知对于$n\in\mathbb{N}$,

$$t_n=\frac{1}{2\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n],s_n=\frac{1}{\sqrt{2}}[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]$$

设$r_n=(1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n$,则$r_n+\sqrt{2}s_n=2(1+\sqrt{2})^n$,并且$r_n,s_n$均为正整数.

所以$r_n=2\sum\limits_{m=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2m}2^m=2(1+\sum\limits_{m=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2m})$, 显然$\frac{1}{2}r_n$为奇数.

对于$\forall m,n\in\mathbb{N},r_{n+m}+\sqrt{2}s_{n+m}=2(1+\sqrt{2})^{n+m}=\frac{1}{2}(r_n+\sqrt{2}s_n)(r_m+\sqrt{2}s_m)$.

$\therefore r_{n+m}=s_ms_n+\frac{1}{2}r_mr_n,s_{m+n}=\frac{1}{2}(r_ns_m+r_ms_n)$.

$\therefore s_{2m}=r_ms_m,k_{2m}=k_m+1$,又因为$k_1=1$,所以$k_{2^m}=m+1$.

当$k_m\neq k_n$时,$s_{m+n}=(\frac{1}{2}r_n)s_m+(\frac{1}{2}r_m)s_n$,$k_{m+n}=\min\{k_m,k_n\}$.

设$n=2^{m_0}+2^{m_1}+\cdots+2^{m_l},0\geqslant m_0<m_1<\cdots<m_l$为正整数.

则$k_n=m_0+1$,即$2^{m_0}\|n$时,$k_n=m_0+1$.

3.18支足球队进行单循环赛,即每轮将18支球队分成9组, 每组的两队赛一场,下一轮重新分组进行比赛,共赛17轮, 使得每队都与另外17支队各赛一场. 按任意可行的程序比赛了n轮之后,总存在4支球队,它们之间总共只赛了1场.求n的最大可能值.

解:考察如下的比赛程序:

1.(1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,18)(10,11)(12,13)(14,15)(16,17)

2.(1,3)(2,4)(5,7)(6,9)(8,17)(10,12)(11,13)(14,16)(15,18)

3.(1,4)(2,5)(3,6)(8,9)(7,16)(10,13)(11,14)(12,15)(17,18)

4.(1,5)(2,7)(3,8)(4,9)(6,15)(10,14)(11,16)(12,17)(13,18)

5.(1,6)(2,8)(3,9)(4,7)(5,14)(10,15)(11,17)(12,18)(13,16)

6.(1,7)(2,9)(3,5)(6,8)(4,13)(10,16)(11,18)(12,14)(15,17)

7.(1,8)(2,6)(4,5)(7,9)(3,12)(10,17)(11,15)(13,14)(16,18)

8.(1,9)(3,7)(4,6)(5,8)(2,11)(10,18)(12,16)(13,15)(14,17)

9.(2,3)(4,8)(5,9)(6,7)(1,10)(11,12)(13,17)(14,18)(15,16)

10.(1,11)(2,12)(3,13)(4,14)(5,15)(6,16)(7,17)(8,18)(9,10)

11.(1,12)(2,13)(3,14)(4,15)(5,16)(6,17)(7,18)(8,10)(9,11)

12.(1,13)(2,14)(3,15)(4,16)(5,17)(6,18)(7,10)(8,11)(9,12)

13.(1,14)(2,15)(3,16)(4,17)(5,18)(6,10)(7,11)(8,12)(9,13)

14.(1,15)(2,16)(3,17)(4,18)(5,10)(6,11)(7,12)(8,13)(9,14)

15.(1,16)(2,17)(3,18)(4,10)(5,11)(6,12)(7,13)(8,14)(9,15)

16.(1,17)(2,18)(3,10)(4,11)(5,12)(6,13)(7,14)(8,15)(9,16)

17.(1,18)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)(9,17)

将前9支球队称为A组,后9支球队称为B组,显然9轮之后,同组两支球队均已经比赛过, 所以任意四支球队之间至少已经赛过两场比赛,当然不满足题中要求.

如果把上述程序颠倒过来,然后按照新的程序比赛,则8轮比赛过后,同组任何两队均未比赛过. 而不全同组的四支球队之间至少赛过两场,也不满足题中要求.

综上所述,n的最大可能值不大于7.

设已进行了7轮比赛且任何4队都不满足题中要求.

选取已经比赛过的两队A_1, A_2,于是每支球队都与另外6支球队比赛过,两个队至多与另外12支球队比赛过. 从而至少有4支球队B_1, B_2, B_3, B_4与A_1, A_2均未比赛过,由反证假设可知,B_1, B_2, B_3, B_4之间的比赛都已经进行了.

所以最多有10支球队与B_1, B_2其中至少一队比赛过,又导致至少存在$C_1, C_2, \ldots, C_6$与B_1, B_2均未比赛. 由反证假设可知,$C_1, C_2, \ldots, C_6$之间的比赛都已经进行了.

类似的,最多有8支球队与C_1, C_2其中至少一队比赛过,又导致至少存在$D_1, D_2, \ldots, D_8$与C_1, C_2均未比赛. 由反证假设可知,$D_1, D_2, \ldots, D_8$之间的比赛都已经进行了.所以D_1, D_2与其他10支球队均未比赛,但是由于只进行了7轮比赛,其中必存在两支球队E_1, E_2之间没有比赛,D_1, D_2, E_1, E_2之间只进行了一场比赛,与假设矛盾.

综上所述,n的最大可能值为7.

4.对于平面上任意四个不同点P_1, P_2, P_3, P_4,求

$$\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j}{\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j} \text{的最小值.}$$

解:先证明如下的引理:

引理:在$\triangle ABC$中,若$AB \geqslant m, AC \geqslant m, \angle BAC = \alpha$,则$BC \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$.

引理的证明:作$\angle A$的角平分线AD,由正弦定理,有

$$BC = BD + DC = AB\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB} + AC\frac{\sin\angle CAD}{\sin\angle ADC} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\angle ADB}(AB+BC) \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}$$

所以引理成立.

回到原题,记$m = \min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j, k = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} P_iP_j$.我们证明:$k \geqslant (5+\sqrt{3})m$.

(1)若P_1, P_2, P_3, P_4中有3点共线,不妨设为P_1, P_2, P_3,则$P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1 \geqslant 4m$,

从而$k \geqslant 7m > (5+\sqrt{3})m$.

(2)若四个点的凸包为三角形,不妨设P_4在$\triangle P_1P_2P_3$内部,且$\angle P_1P_4P_2 \geqslant 120°$,

由引理$P_1P_2 \geqslant 2m\sin\frac{1}{2}\angle P_1P_4P_2 \geqslant 2m\sin 60° = \sqrt{3}m$.所以$k \geqslant (5+\sqrt{3})m$.

(3)凸包为四边形$P_1P_2P_3P_4$.若该四边形有一个内角不小于120°,不妨设为$\angle P_2P_1P_4$,

由引理类似(2),$P_2P_4 \geqslant \sqrt{3}m$.所以$k \geqslant (5+\sqrt{3})m$.

否则四个内角均小于120°,必有两个相邻内角之和不小于180°,

不妨设$\alpha + \beta = \angle P_4P_1P_2 + \angle P_1P_2P_3 \geqslant 180°$,且$\alpha \geqslant \beta$.

由于$\alpha < 120°$,所以$\beta > 60°$,所以$\frac{\alpha+\beta}{4} \geqslant 45°$, $0 \leqslant \frac{\alpha-\beta}{4} < 15°$.

由引理,有$P_2P_4 \geqslant 2m\sin\frac{\alpha}{2}, P_1P_3 \geqslant 2m\sin\frac{\beta}{2}$,

则 $$\begin{aligned} P_1P_3+P_2P_4 &\geqslant 2m(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2})=4m\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \\ &\geqslant 4m\sin 45^\circ\cos 15^\circ=2m(\sin 60^\circ+\sin 30^\circ)=(\sqrt{3}+1)m \end{aligned}$$

所以$k\geqslant(5+\sqrt{3})m$.

又$P_1P_2P_3P_4$为有一个内角为60°的菱形时,$k=(5+\sqrt{3})m$.

所以所求式子的最小值为$5+\sqrt{3}$.

5.平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点. 证明平面上的全体有理点可以分为三个两两不相交的集合,满足条件:

(1)在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含这三个集合中每个集合的点.

(2)在任意一条直线上不可能有三个点分别属于这三个集合.

证明:显然任意有理点均可唯一的表示成$(\frac{u}{w},\frac{v}{w})$的形式,其中$u,v,w$都是整数,$w>0$并且$\gcd(u,v,w)=1$.

令$A=\{(\frac{u}{w},\frac{v}{w})|2\nmid u\},B=\{(\frac{u}{w},\frac{v}{w})|2|u,2\nmid v\},C=\{(\frac{u}{w},\frac{v}{w})|2|u,2|v\}$.

下面证明A,B,C满足题中的条件.

(1)先证明A,B,C满足条件(1);

设D是以有理点$(\frac{u_0}{w_0},\frac{v_0}{w_0})$为中心,$r$为半径的圆, 取正整数$k$,使得$2^k>\max\{w_0,\frac{1}{r}(|u_0|+|v_0|+1)\}$.

不难验证如下三个有理点

$$\left(\frac{u_02^k+1}{w_02^k},\frac{v_02^k}{w_02^k}\right)\in A,\left(\frac{u_02^k}{w_02^k},\frac{v_02^k+1}{w_02^k}\right)\in B,\left(\frac{u_02^k}{w_02^k+1},\frac{v_02^k}{w_02^k+1}\right)\in C$$

都在$\odot D$内部.这表明条件(1)成立.

(2)再证明A,B,C满足条件(2).

设平面上直线方程为$ax+by+c=0$,如果其上有两个不同的有理点$(x_1,y_1)(x_2,y_2)$,则$ax_i+by_i+c=0(i=1,2)$, 如果$c=0$,当然可以取a,b均为有理数;否则不妨设$c=1$,从联立方程中即可解出a,b,显然均是有理数. 再通分即可使a,b,c都是整数,且$\gcd(a,b,c)=1$.

设有理点$(\frac{u}{w},\frac{v}{w})$在直线$ax+by+c=0$上,则$L:au+bv+cw=0$.

(a)$2\nmid c$,若$2|u,2|v$,必有$2|cw,2|w$,与$\gcd(u,v,w)=1$矛盾.所以L上不能有C中的点.

(b)$2|c,2\nmid b$,若$2\nmid v$,则$2\nmid au$,从而$2\nmid u$,因此L上不能有B中的点.

(c)$2|c,2|b$,则$2|au$,由$\gcd(a,b,c)=1$,$2\nmid a$,$2|u$,L上不能有A中的点.

综上所述,A,B,C满足条件(2).

所以A,B,C满足题中的条件.

6.给定实数c,$\frac{1}{2}<c<1$,求最小的常数M, 使得对任意整数$n\geqslant 2$,及实数$0<a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$,只要满足

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k,$$

总有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k\leqslant M\sum_{k=1}^{m}a_k,$$

其中m为不超过cn的最大整数.

解:设$r=cn, s_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_k, s_0=0$.

$\therefore \sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=ns_n-(s_1+s_2+\cdots+s_{n-1})=rs_n$

$$\therefore (n+1-r)s_n=\sum_{i=1}^{n}s_i \tag{$*$}$$

先证明这样两个事实:

(1)对于$\forall j,k,1\leqslant j<k\leqslant n$,总有$js_k\leqslant ks_j$.

这是由于$js_k\leqslant ks_j \Leftrightarrow j(a_k+\cdots+a_{j+1})\geqslant (k-j)(a_j+\cdots+a_1)$.

而$j(a_k+\cdots+a_{j+1})\geqslant j(k-j)a_{j+1}\geqslant j(k-j)a_j\geqslant (k-j)(a_j+\cdots+a_1)$.

所以$js_k\leqslant ks_j$,$\therefore \sum\limits_{i=1}^{m-1}s_i\leqslant \sum\limits_{i=1}^{m-1}\dfrac{i}{m}s_m=\dfrac{m-1}{2}s_m$.

(2)对于$k=0,1,\ldots,n-m, s_{m+k}\leqslant \frac{1}{n-m}[(n-m-k)s_m+ks_n]$.

这是由于$s_{m+k}-s_m\leqslant ka_{m+k}$,$(n-m-k)a_{m+k}\leqslant s_n-s_{m+k}$.

$\therefore (n-m-k)(s_{m+k}-s_m)\leqslant k(n-m-k)a_{m+k}\leqslant k(s_n-s_{m+k})$.

化简后即为$s_{m+k}\leqslant \frac{1}{n-m}[(n-m-k)s_m+ks_n]$.

$\therefore \sum\limits_{k=m}^{n}s_k=\sum\limits_{k=0}^{n-m}s_{m+k}\leqslant \frac{1}{n-m}[s_m\sum\limits_{k=0}^{n-m}(n-m-k)+s_n\sum\limits_{k=0}^{n-m}k]=\frac{n+1-m}{2}(s_m+s_n)$.

代入($*$),$(n+1-r)s_n\leqslant \frac{m-1}{2}s_m+\frac{n+1-m}{2}(s_m+s_n)=\frac{n}{2}s_m+\frac{n+1-m}{s}{}_n$.

$\therefore s_n\leqslant \frac{n}{n+1+m-2r}s_m$,

而$r<m+1$,所以$s_n<\frac{n}{n-r}s_m=\frac{1}{1-c}s_m$.$\therefore M\leqslant \frac{1}{1-c}$.

令$a_1=a_2=\cdots=a_m=1, a_{m+1}=a_{m+2}=\cdots=a_n=t\geqslant 1$.

可知$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\frac{m(m+1)}{2}+\frac{(m+1+n)(n-m)}{2}t=cn(m+(n-m)t)=cn\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$.

解得$t=\frac{2cnm-m(m+1)}{(n+m+1)(n-m)-2cn(n-m)}$.

所以$t\geqslant 1\Leftrightarrow n\geqslant \frac{1}{2c-1}$.满足以上的条件$\because cn-1<m\leqslant cn$.

$$\begin{aligned}\therefore M &\geqslant \frac{s_n}{s_m}=\frac{m+(n-m)t}{m}=1+\frac{2cn-m-1}{n+m+1-2cn}\\ &= \frac{n}{n+m+1-2cn}=\frac{1}{1-2c+\frac{m+1}{n}}\geqslant\frac{1}{1-c+\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

令$n\to+\infty$,$M\geqslant \frac{1}{1-c}$.

所以$M=\frac{1}{1-c}$.

第十八届中国数学奥林匹克(2003年)

湖南 长沙市第一中学

1.设点I,H分别为锐角三角形的内心和垂心, 点B_1,C_1分别为边AC,AB的中点. 已知射线B_1I交边AB于点$B_2(B_2\neq B)$,射线C_1I交AC的延长线于C_2,B_2C_2与BC相交于K,A_1为$\triangle BHC$的外心.

试证:A,I,A_1三点共线的充分必要条件是$\triangle BKB_2,\triangle CKC_2$的面积相等.

证明:首先证明A,I,A_1三点共线$\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$.

设O为$\triangle ABC$的外心,连BO,CO,则$\angle BHC=180^\circ-\angle BAC$,$\angle BA_1C=2(180^\circ-\angle BHC)=2\angle BAC$.

因此,$\angle BAC=60^\circ\Leftrightarrow \angle BAC+\angle BA_1C=180^\circ\Leftrightarrow A_1$在$\triangle ABC$的外接圆$\odot O$上.

$\Leftrightarrow AI$与AA_1重合(因为,A_1在BC的中垂线上) $\Leftrightarrow A,I,A_1$三点共线.

其次,再证$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$.

作$IP\perp AB$于点P,$IQ\perp AC$于点Q,则 $S_{\triangle AB_1B_2}=\dfrac{1}{2}IP\cdot AB_2+\dfrac{1}{2}IQ\cdot AB_1$.

注意到$S_{\triangle AB_1B_2}=\dfrac{1}{2}AB_1\cdot AB_2\sin A$. 所以$IP\cdot AB_2+IQ\cdot AB_1=AB_1\cdot AB_2\sin A$.

设$IP=r$(r为$\triangle ABC$的内切圆半径),则$IQ=r$.令$BC=a,AC=b,AB=c$,则$r=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

再由$AB_1=\dfrac{b}{2},2AB_1\sin A=h_c=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c}$,有 $AB_2\cdot\left(\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{c}-2\cdot\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right)=b\cdot\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

则$AB_2=\dfrac{bc}{a+b-c}$,类似的$AC_2=\dfrac{bc}{a+c-b}$.

因此$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$

$\Leftrightarrow bc=\dfrac{bc}{a+b-c}\cdot\dfrac{bc}{a+c-b}\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow \angle BAC=60^\circ$(由余弦定理).

所以命题成立.

2.求出同时满足如下条件的集合S的元素个数的最大值:

(1)S中的每个元素都是不超过100的正整数;

(2)对于S中任意两个不同的元素a,b,都存在S中的元素c, 使得a与c的最大公约数等于1,并且b与c的最大公约数也等于1;

(3)对于S中任意两个不同的元素a,b,都存在S中异于a,b的元素d, 使得a与d的最大公约数大于1,并且b与d的最大公约数也大于1.

解:最大个数为72.

将不超过100的每个正整数n表示成$n=2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}5^{\alpha_3}7^{\alpha_4}11^{\alpha_5}q$.

其中q是不能被2,3,5,7,11整除的正整数,$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$为非负整数.

我们选取满足条件“$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$中恰有1个或2个非零”的那些正整数组成集合$S$, 即$S$中包括50个偶数2,4,$\ldots$,100,但除去$2\times3\times5$,$2^2\times3\times5$, $2\times3^2\times5$,$2\times3\times7$,$2^2\times3\times7$,$2\times5\times7$,$2\times3\times11$这7个数; 3的奇数倍3×1,3×3,$\ldots$,3×33共17个数;最小素因子为5的数5×1, 5×5,5×7,5×11,5×13,5×17,5×19共7个数; 最小素因子为7的数7×1,7×7,7×11,7×13共4个数;以及素数11.

从而,S中总共有$50-7+17+7+4+1=72$个数.

下面证明如此构造的S满足题述条件.

条件(1)显然满足.

对于条件(2),注意到在$\mathrm{lcm}(a,b)$的素因子中至多出现2,3,5,7,11中的4个数,记某个未出现的数为p,显然$p\in S$,并且$\gcd(p,a)\leqslant\gcd(p,\mathrm{lcm}(a,b))=1,\gcd(p,b)\leqslant\gcd(p,\mathrm{lcm}(a,b))=1$.于是,取$c=p$即可.

对于条件(3),当$\gcd(a,b)=1$时,取a的最小素因子p和b的最小素因子q易见$p\neq q$,并且$p,q\in\{2,3,5,7,11\}$.于是,$pq\in S$,并且$\gcd(pq,a)\geqslant p>1$,$\gcd(pq,b)\geqslant q>1$.a,b互质保证了pq异于a,b.从而,取$d=pq$即可.

当$\gcd(a,b)=e>1$时,取p为e的最小素因子,q为满足$q\nmid[a,b]$的最小素数,易见$p\neq q$,并且$p,q\in\{2,3,5,7,11\}$.

于是,$pq\in S$,并且$\gcd(pq,a)\geqslant\gcd(p,a)=p>1$,$\gcd(pq,b)\geqslant\gcd(p,b)=p>1$. $q\nmid[a,b]$保证了pq异于a,b.从而,取$d=pq$即可.

下面证明任意满足题述条件的集合S的元素数目不会超过72.

显然,$1\in S$对于任意的两个大于10的质数p,q,因为与p,q均不互质的数最小是pq已大于100, 故据条件(3)知,10与100之间的21个质数中最多有一个出现在S中.记除1和这21个质数外的其余78个不超过100的自然数构成集合T. 我们断言T中至少有7个数不在S中,从而S中最多有$78-7+1=72$个元素.

(I)当有某个大于10的质数p属于S时,S中所有各数最小素因子只可能是2,3,5,7和p.运用条件(2)可得出以下结论:

(i)若$7p\in S$,因为$2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5$与$7p$包括了所有的最小素因子, 故由条件(2)知,$2\times3\times5,2^2\times3\times5,2\times3^2\times5\notin S$;若$7p\notin S$,注意$2\times7p>100$,而$p\in S$,故由条件(3)知$7\times1,7\times7,7\times11,7\times13\notin S$.

(ii)若$5p\in S$,则$2\times3\times7,2^2\times3\times7\notin S$;若$5p\notin S$,则$5\times1,5\times5\notin S$.

(iii)$2\times5\times7$,$3p$不同属于S.

(iv)$2\times3p$,5×7不同属于S.

(v)若$5p,7p\notin S$,则$5\times7\notin S$.

当$p=11$或13时,由(i)(ii)(iii)(iv)可分别得出至少有3,2,1,1个T中的数不属于S,合计7个;

当$p=17$或19时,由(i)(ii)(iii)可分别得出至少有4,2,1个T中的数不属于S,合计7个;

当$p>20$时,由(i)(ii)(v)可分别得出至少有4,2,1个中T的数不属于S,合计7个.

(II)如果没有大于10的质数属于S,则S中的最小素因子只可能是2,3,5,7.于是,下面7对数中的每对都不能同时在S中出现:

$(3,2\times5\times7)$,$(5,2\times3\times7)$,$(7,2\times3\times5)$,$(2\times3,5\times7)$,$(2\times5,3\times7)$, $(2\times7,3\times5)$,$(2^2\times7,3^2\times5)$.

从而,T中至少有7个数不在S中.

综上所述,本题的答案为72.

3.给定正整数n,求最小的正数λ,使得对于任何$\theta_i\in(0,\frac{\pi}{2}),(i=1,2,\dots,n)$ 只要

$$\tan\theta_1\tan\theta_2\cdots\tan\theta_n=2^{\frac{n}{2}}$$

就有$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n$不大于$\lambda$.

解:当$n=1$时,$\cos\theta_1=(1+\tan^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,有$\lambda=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当$n=2$时,可以证明$\cos\theta_1+\cos\theta_2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 并且当$\theta_1=\theta_2=\arctan\sqrt{2}$时等号成立.事实上,

$\cos\theta_1+\cos\theta_2\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}\Leftrightarrow\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2\leqslant\frac{4}{3}$,

即
$$\frac{1}{1+\tan^2\theta_1}+\frac{1}{1+\tan^2\theta_2}+2\sqrt{\frac{1}{(1+\tan^2\theta_1)(1+\tan^2\theta_1)}}\leqslant\frac{4}{3}$$
由$\tan\theta_1\tan\theta_2=2$,并且设$x=\tan^2\theta_1+\tan^2\theta_2$,则只需证明
$$\frac{2+x}{5+x}+2\sqrt{\frac{1}{5+x}}\leqslant\frac{4}{3}$$
即
$$2\sqrt{\frac{1}{5+x}}\leqslant\frac{14+x}{3(5+x)}\Leftrightarrow 36(5+x)\leqslant 196+28x+x^2\Leftrightarrow x^2-8x+16=(x-4)^2\geqslant 0$$
显然成立,于是$\lambda=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当$n\geqslant 3$时,不妨设$\theta_1\geqslant\theta_2\geqslant\cdots\geqslant\theta_n$, 则 $\tan\theta_1\tan\theta_2\tan\theta_3\geqslant 2\sqrt{2}$.

由于$\cos\theta_i=\sqrt{1-\sin^2\theta_i}<1-\frac{1}{2}\sin^2\theta_i$,则

$\cos\theta_2+\cos\theta_3<2-\frac{1}{2}(\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3)<2-\sin\theta_2\sin\theta_3$.

由$\tan^2\theta_1\geqslant\dfrac{8}{\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}$,有
$$\frac{1}{\cos^2\theta_1}\geqslant\frac{8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}{\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}$$
即
$$\cos\theta_1\leqslant\frac{\tan\theta_2\tan\theta_3}{\sqrt{8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3}}=\frac{\sin\theta_2\sin\theta_3}{\sqrt{8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}}$$
于是
$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<2-\sin\theta_2\sin\theta_3\left(1-\frac{1}{\sqrt{8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3}}\right)$$
注意到$8\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3+\sin^2\theta_2\sin^2\theta_3\geqslant 1$

$\Leftrightarrow 8+\tan^2\theta_2\tan^2\theta_3\geqslant\dfrac{1}{\cos^2\theta_2\cos^2\theta_3}=(1+\tan^2\theta_2)(1+\tan^2\theta_3)\Leftrightarrow\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3\leqslant 7$.

所以当$\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3\leqslant 7$时,$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<2$.

若$\tan^2\theta_2+\tan^2\theta_3>7$时,因此$\tan^2\theta_1\geqslant\tan^2\theta_2>\frac{7}{2}$,

所以$\cos\theta_1\leqslant\cos\theta_2<\sqrt{\dfrac{1}{1+\frac{7}{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

于是,$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3<\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+1<2$,

所以$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n<n-1$.

另一方面,取$\theta_2=\theta_3=\cdots=\theta_n=\alpha>0,\alpha\to 0$,

则 $\theta_1=\arctan\dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{\tan^{n-1}\alpha}$,$\theta_1\to\frac{\pi}{2}$,

从而$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n\to n-1$.

综上可得$\lambda=n-1$.

4.求所有满足$a\geqslant 2,m\geqslant 2$的三元正整数组$(a,m,n)$, 使得$a^n+203$是$a^m+1$的倍数.

解:对于分三种情况考虑.

(1)$n<m$时,由$a^n+203\geqslant a^m+1$,有$202\geqslant a^m-a^n\geqslant a^n(a-1)\geqslant a(a-1)$.

所以$2\leqslant a\leqslant 14$.

当$a=2$时,n可取$1,2,\dots,7$;当$a=3$时,n可取$1,2,3,4$;当$a=4$时,n可取$1,2,3$; 当$a=5,6$时,n可取$1,2$;
当$a=7,8,\dots,14$时,$n=1$.
由$a^m+1|a^n+203$可知,解为(2,2,1),(2,3,2)和(5,2,1).
(2)$n=m$时,$a^m+1|202$.由于202仅有1,2,101,202四个约数,而$a\geqslant 2,m\geqslant 2$,只有$a^m=100$,解为(10,2,2).
(3)$n>m$时,由$a^m+1|203(a^m+1)$,有$a^m+1|a^n+203-203(a^m+1)$,即$a^m+1|a^m(a^{n-m}-203)$.
又因为$\gcd(a^m+1,a^m)=1$,所以$a^m+1|a^{n-m}-203$.
(i)若$a^{n-m}<203$,则令$n-m=s\geqslant 1$,有$a^m+1|203-a^s$.所以$203-a^s\geqslant a^m+1$,
有$202\geqslant a^s+a^m\geqslant a^m+a=a(a^{m-1}+1)\geqslant a(a+1)$,所以$2\leqslant a\leqslant 13$.
类似(1)的讨论,可知(a,m,s)的解为:(2,2,3),(2,6,3),(2,4,4),(2,3,5),(2,2,7),(3,2,1),(4,2,2),(5,2,3),(8,2,1).
所以(a,m,n)为:(2,2,5),(2,6,9),(2,4,8),(2,3,8),(2,2,9),(3,2,3),(4,2,4),(5,2,5),(8,2,3).
(ii)$a^{n-m}=203$时,则$a=203,n-m=1$,即解为$(203,m,m+1),m\geqslant 2$.
(iii)$a^{n-m}>203$时,令$n-m=s\geqslant 1$,则$a^m+1|a^s-203$.
又$a^s-203\geqslant a^m+1$,则$s>m$,由$a^m+1|a^s-203+203(a^m+1)=a^m(a^{s-m}+203)=a^m(a^{n-2m}+203)$,
又因为$\gcd(a^m+1,a^m)=1$,所以$a^m+1|a^{n-2m}+203$.
又因为$s>m\Leftrightarrow n-m>m\Leftrightarrow n>2m\Leftrightarrow n-2m>0$.此时的解只能由前面的解派生出来,即由$(a,m,n)\to(a,m,n+2m)\to\cdots\to(a,m,n+2km)$, 并且每一个派生出来的解都满足$a^m+1|a^n+203$.
综上所述,所有解(a,m,n)为:
$(2,2,4k+1),(2,3,6k+2),(2,4,8k+8),(2,6,12k+9),(3,2,4k+3),$
$(4,2,4k+4),(5,2,4k+1),(8,2,4k+3),(10,2,4k+2),(203,m,(2k+1)m+1),$
其中k为任意非负整数,且$m\geqslant 2$为整数.
5.某公司需要录用一名秘书,共有10人报名, 公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试,前三个人面试后一定不录用. 自第4个人开始将他与前面面试过的人比较, 如果他的能力超过了前面所有已面试过的人, 就录用他;否则就不录用,继续面试下一个. 如果前9个人都不录用,那么就录用最后一个面试的人.
假定这10个人的能力各不相同,可以按能力由强到弱排为第1,第2,...,第10. 显然该公司到底录用到哪一个人,与这10个人报名的顺序有关. 大家知道,这样的排列共有10!种. 我们以A_k表示能力第k的人能够被录用的不同报名顺序的数目, 以表示他被录用的可能性.
证明:在该公司经理的方针下,有
(1)$A_1>A_2>\cdots>A_8=A_9=A_{10}$;
(2)该公司有超过70%的可能性录用到能力最强的3个人之一, 而只有不超过10%的可能性录用到能力最弱的3个人之一.
证明:将前3个面试者中能力最强的排名名次记为a.显然$a\leqslant 8$. 将此时能力排名第k的人被选上的排列集合记作$A_k(a)$,相应的排列数目记作$|A_k(a)|$.在以下过程中,“:=”表示“记为”.
(1)显然,$a=1$时,必然录取最后一个面试的人,此时除能力第1的人之外,各人机会均等,不难知道
$|A_k(1)|=3\times 8!:=r_1,k=2,3,\dots,10$.
当$2\leqslant a\leqslant 8$时,对于$a\leqslant k\leqslant 10$,能力排名的k的人无录用机会.对于$1\leqslant k<a$,此时机会均等.

事实上,此时能力排名第a的人排在前三个,有3种选择位置.而能力排名1到$a-1$的人都排在后7个位置上, 并且谁位于他们之首谁就被录用,有排法$\binom{7}{a-1}(a-2)!$种,其余$10-a$人可以在剩下的位置上任意排列,有$(10-a)!$种排法.故有

$$|A_k(a)| = \begin{cases} 3\binom{7}{a-1}(a-2)!(10-a)! := r_a, & k=1,\ldots,a-1 \\ 0, & k=a,\ldots,10. \end{cases}$$

上述结果表明:

$A_8 = A_9 = A_{10} = r_1 = 3\times 8! > 0$;

$A_k = r_1 + r_{k+1} + \cdots + r_8, k = 2,\ldots,7$;

$A_1 = r_2 + r_3 + \cdots + r_8$.

显然$A_2 > A_3 > \cdots > A_8 = A_9 = A_{10} > 0$.而$A_1 - A_2 = r_2 - r_1 = 3\times 7\times 8! - 3\times 8! > 0$.

综上所述,问题(1)获证.

(2)由(1)可知

$\dfrac{A_8+A_9+A_{10}}{10!} = \dfrac{3r_1}{10!} = \dfrac{3\times 3\times 8!}{10!} = 10\%$

所以,录用到能力最弱的三人之一的可能性等于10%.

并且

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{a=2}^{8} r_a = \sum_{a=2}^{8} 3\binom{7}{a-1}(a-2)!(10-a)! \\ &= 3\times 7!\sum_{a=2}^{8}\frac{(9-a)(10-a)}{a-1} \\ &= 3\times 7!\times\left(56+21+10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right) \\ &= 3\times 7!\times 95\frac{24}{35} > 3\times 7!\times 95\frac{2}{3} = 287\times 7! \\ A_2 &= r_1 + \sum_{a=3}^{8} r_a \\ &= 3\times 8! + 3\times 7!\times\left(21+10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right) \\ &= 3\times 7!\times 47\frac{24}{35} > 3\times 7!\times 47\frac{2}{3} = 143\times 7! \\ A_3 &= r_1 + \sum_{a=4}^{8} r_a \\ &= 3\times 8! + 3\times 7!\times\left(10+5+\frac{12}{5}+1+\frac{2}{7}\right) \\ &= 3\times 7!\times 26\frac{24}{35} > 3\times 7!\times 26\frac{2}{3} = 80\times 7! \end{aligned}$$

所以$\dfrac{A_1+A_2+A_3}{10!} > \dfrac{287+143+80}{720} = \dfrac{17}{24} > 70\%$.

即录用到能力最强的三人之一的可能性大于70%.

6.设a,b,c,d为正实数,满足$ab+cd=1$; 点$P_i(x_i,y_i)(i=1,2,3,4)$是以原点为圆心的单位圆上的四个点.

求证:
$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant 2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd}).$$

证明:
$$\because (ab+cd)(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd})=a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{abc}{d}+\frac{abd}{c}+\frac{acd}{b}+\frac{bcd}{a}$$

是关于a,b,c,d对称的式子,
$$\therefore (ab+cd)(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd})=(ad+bc)(\frac{a^2+d^2}{ad}+\frac{b^2+c^2}{bc})$$

由Cauchy不等式
$$(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2\leqslant(ad+bc)(\frac{(ay_1+dy_4)^2}{ad}+\frac{(by_2+cy_3)^2}{bc})$$
$$(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\leqslant(ad+bc)(\frac{(ax_4+dx_1)^2}{ad}+\frac{(bx_3+cx_2)^2}{bc})$$
$$(ay_1+dy_4)^2\leqslant(a^2+d^2)(y_1^2+y_4^2),(ax_4+dx_1)^2\leqslant(a^2+d^2)(x_4^2+x_1^2)$$
$$(by_2+cy_3)^2\leqslant(b^2+c^2)(y_2^2+y_3^2),(bx_3+cx_2)^2\leqslant(b^2+c^2)(x_3^2+x_2^2)$$

而$x_i^2+y_i^2=1(i=1,2,3,4),ab+cd=1$.所以
$$\begin{aligned}
&(ay_1+by_2+cy_3+dy_4)^2+(ax_4+bx_3+cx_2+dx_1)^2\\
\leqslant\ &(ad+bc)(\frac{2(a^2+d^2)}{ad}+\frac{2(b^2+c^2)}{bc})\\
=\ &2(ad+bc)(\frac{a^2+d^2}{ad}+\frac{b^2+c^2}{bc})\\
=\ &2(ab+cd)(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd})\\
=\ &2(\frac{a^2+b^2}{ab}+\frac{c^2+d^2}{cd})
\end{aligned}$$

第十九届中国数学奥林匹克(2004年)

澳门 教育暨青年局

1.凸四边形$EFGH$的顶点E,F,G,H分别在凸四边形$ABCD$的边AB,BC,CD,DA上, 满足$\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}=1$, 而点$A,B,C,D$分别在凸四边形$E_1F_1G_1H_1$的边$E_1F_1$,$F_1G_1$, G_1H_1,H_1E_1上,满足$E_1F_1\parallel EF,F_1G_1\parallel FG,G_1H_1\parallel GH,H_1E_1\parallel HE$.

已知$\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$,求$\frac{F_1C}{CG_1}$的值.

解:(1)若$EF\parallel AC$,则$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{FC}$.

代入已知条件,可以得到$\frac{DH}{HA}=\frac{DG}{GC}$,所以$HG\parallel AC$,从而$E_1F_1\parallel AC\parallel H_1G_1$,故$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$.

(2)若EF与AC不平行,设FE的延长线与CA的延长线相交于点T,则由Menelaus定理得

$$\frac{CF}{FB}\cdot\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

结合题设有

$$\frac{CG}{GD}\cdot\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AT}{TC}=1$$

由Menelaus定理逆定理可以知道,T,H,G三点共线,设TF,TG与E_1H_1分别交于点M,N.

由$E_1B\parallel EF$,得$E_1A=\frac{BA}{EA}\cdot AM$,同理$H_1A=\frac{AD}{AH}\cdot AN$,所以

$$\frac{E_1A}{H_1A}=\frac{AM}{AN}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}$$

又因为

$$\frac{EQ}{QH}=\frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AHC}}=\frac{S_{\triangle ABC}\cdot AE\cdot AD}{S_{\triangle ADC}\cdot AB\cdot AH}$$

所以

$$\frac{E_1A}{AH_1}=\frac{EQ}{QH}\cdot\frac{AB}{AE}\cdot\frac{AH}{AD}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$

同理

$$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$

所以$\frac{F_1C}{CG_1}=\frac{E_1A}{AH_1}=\lambda$.

2.已知正整数c,设数列$x_1,x_2,\ldots$满足:

$$x_1=c,x_n=x_{n-1}+\left[\frac{2x_{n-1}-(n+2)}{n}\right]+1(n=2,3,\ldots)$$

其中$[x]$表示不大于x的最大整数.求数列$\{x_n\}$的通项公式.

解:显然当$n\geqslant 2$时

$$x_n=x_{n-1}+\left[\frac{2(x_{n-1}-1)}{n}\right]$$

令$a_n=x_n-1$,则$a_1=c-1$,

$$a_n=a_{n-1}+\left[\frac{2a_{n-1}}{n}\right]=\left[\frac{n+2}{n}a_{n-1}\right]n=2,3,\ldots \tag{1}$$

设$u_n=A\frac{(n+1)(n+2)}{2},n=1,2,\ldots$,其中$A$为非负整数.由于当$n\leqslant 2$时,有

$$\left[\frac{n+2}{n}u_{n-1}\right]=\left[A\frac{n+2}{2n}n(n+1)\right]=A\frac{(n+1)(n+2)}{2}=u_n$$

所以数列$\{u_n\}$满足(1).

设$y_n = n, n = 1, 2, \ldots$.当$n \leqslant 2$时,有

$$\left[\frac{n+2}{n}y_{n-1}\right] = \left[\frac{(n+2)(n-1)}{n}\right] = \left[n+1-\frac{2}{n}\right] = n = y_n$$

所以数列$\{y_n\}$满足(1).

设$z_n = \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right], n = 1, 2, \ldots$.当$n = 2m(m \geqslant 1)$时,有

$$\left[\frac{n+2}{n}z_{n-1}\right] = \left[\frac{m+1}{m}\left[\frac{(2m+1)^2}{4}\right]\right] = \left[\frac{m+1}{m}m(m+1)\right] = (m+1)^2 = z_n$$

当$n = 2m+1(m \geqslant 1)$时,有

$$\left[\frac{n+2}{n}z_{n-1}\right] = \left[\frac{2m+3}{2m+1}\left[\frac{(2m+2)^2}{4}\right]\right] = \left[\frac{2m+3}{2m+1}(m+1)^2\right] = (m+1)(m+2) = z_n$$

所以数列$\{z_n\}$满足(1).

对于任意非负整数A,令$v_n = u_n + y_n = A\frac{(n+1)(n+2)}{2} + n$, $w_n = u_n + z_n = A\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right], n = 1, 2, \ldots$, 显然$\{v_n\}, \{w_n\}$都满足(1).

由于$u_1 = 3A, y_1 = 1, z_1 = 2$,所以当$3|a_1$时,$a_n = \frac{a_1}{6}(n+1)(n+2)$; 当$a_1 \equiv 1 \pmod 3$时,$a_n = \frac{a_1-1}{6}(n+1)(n+2) + n$; 当$a_1 \equiv 2 \pmod 3$时,$a_n = \frac{a_1-2}{6}(n+1)(n+2) + \left[\frac{(n+2)^2}{4}\right]$. 综上可得

$$\begin{aligned} x_n &= \tfrac{c-1}{6}(n+1)(n+2) + 1, & &\text{当}c \equiv 1 \pmod 3, \\ x_n &= \tfrac{c-2}{6}(n+1)(n+2) + n + 1, & &\text{当}c \equiv 2 \pmod 3, \\ x_n &= \tfrac{c-3}{6}(n+1)(n+2) + \left[\tfrac{(n+2)^2}{4}\right] + 1, & &\text{当}c \equiv 0 \pmod 3. \end{aligned}$$

3.设M是平面上n个点组成的集合,满足:

(1)M中存在7个点,是一个凸七边形的7个顶点;

(2)M中任意5个点,若这5个点是一个凸五边形的5个顶点,则此凸五边形内部至少含有M中的一个点.

求n的最小值.

解:先证$n \geqslant 11$.

设顶点在M中的一个凸七边形为$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$,连A_1A_5,由条件(2)知, 在凸五边形$A_1A_2A_3A_4A_5$中至少有M中的一个点,记为P_1;连P_1A_1, P_1A_5, 则在凸五边形$A_1P_1A_5A_6A_7$内部至少有M中的一个点,记为P_2,且P_2异于P_1; 连直线P_1P_2,$A_1, A_2, \ldots, A_7$至少有5个点不在直线P_1P_2上,有抽屉原则知, 在直线P_1P_2的某一侧必有其中3个顶点,这3个顶点与点P_1, P_2构成的凸五边形内至少含有M中的一个点P_3,并且P_3异于P_1, P_2.

再作直线P_1P_3, P_2P_3,令直线P_1P_2对应区域为π_3:它是以直线P_1P_2为边界且在三角形$P_1P_2P_3$异侧的一个半平面 (不含直线P_1P_2),类似定义区域π_1, π_2.这样3个区域π_1, π_2, π_3覆盖了平面上除三角形$P_1P_2P_3$之外的所有点. 由抽屉原则,$A_1, A_2, \ldots, A_7$中必有3个在同一区域内,不妨设为π_3. 这三个点与P_1, P_2构成的凸五边形内至少含有M中的一个点P_4,并且P_4异于P_1, P_2, P_3.所以$n \geqslant 11$.

构造一个例子,在Oxy平面上,取整点$A_1(0,1), A_2(1,3), A_3(2,3), A_4(3,2), A_5(3,1), A_6(2,0), A_7(1,0)$ 构

成一个凸七边形,再加上其内部的所有四个整点(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)构成点集M,显然满足条件(1).

下面证明M也满足条件(2),若不然,假设存在一个整点凸五边形,其内部不含整点, 显然所有整点多边形的面积均是$\frac{1}{2}$的整数倍.必存在一个面积最小的内部不含整点的整点凸五边形$ABCDE$. 考虑顶点坐标的奇偶性,只有四种情况:(奇,偶)(偶,奇)(偶,偶)(奇,奇).从而这五个顶点中必有两个顶点的坐标奇偶性完全相同, 于是它们连线中点P也是整点,又因为它不在五边形内部,必然在某条边上,不妨设在AB上,则P为AB中点,连PE, 则$PBCDE$是面积更小的内部不含整点的整点凸五边形,矛盾.

综上所述,n的最小值为11.

4.给定实数a和正整数n,求证:

(1)存在唯一的实数数列$x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$满足:

$$x_0 = x_{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_{i-1}) = x_i + x_i^3 - a^3 (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2)(1)中的数列$x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$满足$|x_i| \leqslant |a|$.

解:(1)存在性:由$x_{i+1} = 2x_i + 2x_i^3 - 2a^3 - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$,及$x_0 = 0$, 我们知道$x_i$是$x_1$的$3^{i-1}$次实系数多项式,从而$x_{n+1}$为$x_1$的$3^n$次实系数多项式, 由$3^n$为奇数,故存在$x_1$,使得$x_{n+1} = 0$,由此$x_1$及$x_0 = 0$即可求出$x_i$, 如此得到的数列$x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$满足题设条件.

唯一性:设$w_0, w_1, \dots, w_{n+1}$以及$v_0, v_1, \dots, v_{n+1}$为满足条件的两个数列,则

$\frac{1}{2}(w_{i+1} + w_{i-1}) = w_i + w_i^3 - a^3$, $\frac{1}{2}(v_{i+1} + v_{i-1}) = v_i + v_i^3 - a^3$.

所以$\frac{1}{2}(w_{i+1} - v_{i+1} + w_{i-1} - v_{i-1}) = (w_i - v_i)(1 + w_i^2 + w_i v_i + v_i^2)$.

设$|w_{i_0} - v_{i_0}|$最大,则

$$|w_{i_0} - v_{i_0}| \leqslant |w_{i_0} - v_{i_0}|(1 + w_{i_0}^2 + w_{i_0} v_{i_0} + v_{i_0}^2) \leqslant \frac{1}{2}|w_{i_0+1} - v_{i_0+1}| + \frac{1}{2}|w_{i_0-1} - v_{i_0-1}| \leqslant |w_{i_0} - v_{i_0}|$$

从而$|w_{i_0} - v_{i_0}| = 0$或者$1 + w_{i_0}^2 + w_{i_0} v_{i_0} + v_{i_0}^2 = 1$,

由后一种情况可以推出$w_{i_0}^2 + v_{i_0}^2 + (w_{i_0} + v_{i_0})^2 = 0$,$w_{i_0} = v_{i_0} = 0$.

所以总有$|w_{i_0} - v_{i_0}| = 0$,再由$|w_{i_0} - v_{i_0}|$最大,

所以所有$|w_i - v_i| = 0$,即$w_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$.唯一性得证.

(2)设$|x_{i_0}|$最大,则

$$|x_{i_0}| + |x_{i_0}|^3 = |x_{i_0}|(1 + x_{i_0}^2) = |\frac{1}{2}(x_{i_0+1} + x_{i_0-1}) + a^3| \leqslant \frac{1}{2}|x_{i_0+1}| + \frac{1}{2}|x_{i_0-1}| + |a|^3 \leqslant |x_{i_0}| + |a|^3$$

因此$|x_{i_0}| \leqslant |a|$,所以$|x_i| \leqslant |a|, i = 0, 1, 2 \dots, n+1$.

5. 给定正整数$n \geqslant 2$,设正整数$a_i (i = 1, 2, \dots, n)$满足:$a_1 < a_2 < \dots < a_n$以及 $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leqslant 1$.求证:对任意实数$x$,有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i^2 + x^2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}$$

解:当$x^2 \geqslant a_1(a_1-1)$时,由$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} \leqslant 1$,可得

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2a_i|x|}\right)^2 = \frac{1}{4x^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)^2 \leqslant \frac{1}{4x^2} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}$$

当$x^2 < a_1(a_1-1)$时,由Cauchy不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i^2+x^2}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2}$$

对于正整数$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$,有$a_{i+1} \geqslant a_i+1, i=1,2,\ldots,n-1$,并且

$$\begin{aligned}
\frac{2a_i}{(a_i^2+x^2)^2} &\leqslant \frac{2a_i}{\left(a_i^2+x^2+\frac{1}{4}\right)^2-a_i^2}\\
&= \frac{2a_i}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)\left(\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}\\
&= \frac{1}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)} - \frac{1}{\left(\left(a_i+\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}\\
&\leqslant \frac{1}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)} - \frac{1}{\left(\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}, i=1,2,\ldots,n-1
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(a_i^2+x^2)^2} &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\left(\left(a_i-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)} - \frac{1}{\left(\left(a_{i+1}-\frac{1}{2}\right)^2+x^2\right)}\right)\\
&\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(a_1-\frac{1}{2}\right)^2+x^2}\\
&\leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a_1(a_1-1)+x^2}
\end{aligned}$$

6.证明:除了有限个正整数外,其他的正整数n均可表示为2004个正整数之和 $n=a_1+a_2+\cdots+a_{2004}$,且满足:$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2004}, a_i|a_{i+1} \quad (i=1,2,\ldots,2003)$

解:将证明如下更一般的结论:

对任给的正整数$r \geqslant 2$,总存在$N(r)$,当$n \geqslant N(r)$时,存在正整数$a_1,a_2,\ldots,a_r$,使得$n=a_1+a_2+\ldots+a_r$, $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_r$,$a_i|a_{i+1}, i=1,2,\ldots,r-1$.

当$r=2$时,有$n=1+n-1$,取$N(2)=3$即可.

假设当$r=k$时,结论成立,当$r=k+1$时,取$N(k+1)=4N(k)^3$.

设$n=2^\alpha(2l+1)$,如果$n \geqslant N(k+1)=4N(k)^3$,则$2^\alpha \geqslant 2N(k)^2$或者$2l+1 > 2N(k)$.

若$2^\alpha \geqslant 2N(k)^2$,则存在正偶数$2t \leqslant \alpha$,使$2^{2t} \geqslant N(k)^2$.

此时$2^t+1 \geqslant N(k)$,由归纳假设存在正整数$b_1,b_2,\ldots,b_k$,使得$2^t+1=b_1+b_2+\cdots+b_k$,

其中$1 \leqslant b_1 < \cdots < b_k, b_i|b_{i+1}, i=1,\ldots,k-1$.

这样

$$
\begin{aligned}
2^{\alpha} &= 2^{\alpha-2t}\cdot 2^{2t}=2^{\alpha-2t}[1+(2^t-1)(2^t+1)]\\
&= 2^{\alpha-2t}+2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_1+2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_2+\cdots+2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_k\\
n &= 2^{\alpha-2t}(2l+1)+2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_1(2l+1)+2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_2(2l+1)+\cdots\\
&\quad +2^{\alpha-2t}(2^t-1)b_k(2l+1)
\end{aligned}
$$

若$2l+1>2N(k)$,则$l\geqslant N(k)$,由归纳假设存在实数$c_1,c_2,\ldots,c_k$,使得$l=c_1+c_2+\cdots+c_k$,其中$1\leqslant c_1<\cdots<c_k,c_i|c_{i+1},i=1,\ldots,k-1$.

因此$n=2^{\alpha}+2^{\alpha+1}c_1+2^{\alpha+1}c_2+\cdots+2^{\alpha+1}c_n$.满足要求.

由归纳法知上述一般结论对所有的$r\geqslant 2$成立.令$r=2004$,显然有原命题成立.

第二十届中国数学奥林匹克(2005年)

郑州 郑州外国语学校

1.设$\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, 3, 4$. 证明:存在$x \in \mathbb{R}$,使得如下两个不等式

$$\cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 - (\sin\theta_1\sin\theta_2 - x)^2 \geqslant 0$$

$$\cos^2\theta_3\cos^2\theta_4 - (\sin\theta_3\sin\theta_4 - x)^2 \geqslant 0$$

同时成立的充要条件是:

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2\theta_i \leqslant 2(1 + \prod_{i=1}^{4}\sin\theta_i + \prod_{i=1}^{4}\cos\theta_i). \tag{1}$$

证明:显然所给的两个不等式分别等价于

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_1\cos\theta_2 \leqslant x \leqslant \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \tag{2}$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4 - \cos\theta_3\cos\theta_4 \leqslant x \leqslant \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 \tag{3}$$

不难知道,存在$x \in \mathbb{R}$,使得(2)(3)同时成立的充分必要条件为

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 \geqslant 0 \tag{4}$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 \geqslant 0 \tag{5}$$

另一方面,利用$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$,可将(1)化为

$$\begin{aligned} & \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3\cos\theta_4 + \cos^2\theta_3\cos^2\theta_4 \\ - & \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\theta_3\sin\theta_4 - \sin^2\theta_3\sin^2\theta_4 \geqslant 0 \end{aligned}$$

即

$$(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_3\cos\theta_4)^2 - (\sin\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4)^2 \geqslant 0$$

亦即

$$\begin{aligned} & (\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4) \\ & \cdot(\sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2) \geqslant 0 \end{aligned} \tag{6}$$

当存在$x \in \mathbb{R}$,使得(2)(3)同时成立时,由(4)(5)即可推出(6),从而(1)成立.
反之,若(1)成立,即(6)成立,如果(4)(5)不成立,必有

$$\sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 < 0$$

$$\sin\theta_3\sin\theta_4 + \cos\theta_3\cos\theta_4 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2 < 0$$

两式相加,得到$2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_3\cos\theta_4) < 0$.
这与$\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, 3, 4$ 矛盾,所以必有(4)(5)成立,因此存在$x \in \mathbb{R}$,使得(2)(3)同时成立,证毕.

2.一圆与$\triangle ABC$的三边BC,CA,AB的交点依次为$D_1,D_2;E_1,E_2;F_1,F_2$. 线段D_1E_1与D_2F_2交于点L,线段E_1F_1与E_2D_2交于点M, 线段F_1D_1与F_2E_2交于点N, 证明:AL,BM,CN三线共点.

证明:自点L作AB和AC的垂线,垂足分别为L',L''.记$\angle LAB=\alpha_1,\angle LAC=\alpha_2,\angle LF_2A=\alpha_3,\angle LE_1A=\alpha_4$.则有

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{LL'}{LL''}=\frac{LF_2\sin\alpha_3}{LE_1\sin\alpha_4}$$

连接D_1F_2,D_2E_1,由$\triangle LD_1F_2\backsim\triangle LD_2E_1$,得$\dfrac{LF_2}{LE_1}=\dfrac{D_1F_2}{D_2E_1}$.

连接D_2F_1,D_1E_2,由正弦定理得$\dfrac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4}=\dfrac{D_2F_1}{D_1E_2}$.

所以

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{D_1F_2}{D_2E_1}\cdot\frac{D_2F_1}{D_1E_2}$$

同理,记$\angle MBC=\beta_1,\angle MBA=\beta_2,\angle NCA=\gamma_1,\angle NCB=\gamma_2$,可得

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{E_1D_2}{E_2F_1}\cdot\frac{E_2D_1}{E_1F_2}$$

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=\frac{F_1E_2}{F_2D_1}\cdot\frac{F_2E_1}{F_1D_2}$$

三式相乘,得

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}=1$$

由Ceva定理逆定理的角元形式,AL,BM,CN三线共点.

3.如图所示,圆形的水池被分割为$2n(n\geqslant 5)$“格子”. 我们把有公共隔墙(公共边或公共弧)的格子称为相邻的, 从而每个格子都有三个邻格.

水池中一共跳入了$4n+1$只青蛙,青蛙难于安静共处, 只要某个格子中有不少于3只青蛙, 那么迟早一定会有其中3只分别同时跳往三个不同邻格.

证明:只要经过一段时间之后,青蛙便会在水池中大致分布均匀.

注:所谓大致分布均匀,就是任取其中一个格子, 或者它里面有青蛙, 或者它的三个邻格里都有青蛙.

证明:我们把一个格子中出现一次3只青蛙同时分别跳向三个邻格的事件称为该格子发生一次爆发. 而把一个格子或者是它里面有青蛙,或者是它的三个相邻的格子里面都有青蛙,称为该格子处于平衡状态.

容易看出,一个格子只要一旦有青蛙跳入,那么它就一直处于平衡状态.事实上,只要不爆发,那么该格子中的青蛙不会动, 它当然处于平衡状态;而如果发生爆发,那么它的三个邻格中就都有青蛙,并且只要三个邻格都不爆发,它就一直处于平衡状态; 而不论哪个邻格发生爆发,都会有青蛙跳到它里面,它也一直处于平衡状态.

这样一来,为了证明题中断言,我们就只要证明:任何一个格子都迟早会有青蛙跳入.

任取一个格子,把它称为格A,把它所在的扇形称为1号扇形,把该扇形中另一个格子称为格B,我们要证明格A中迟早会有青蛙跳入.

按顺时针方向依次将其余扇形接着编为2至n号.首先证明1号扇形中迟早会有青蛙跳入.假设1号扇形中永无青蛙到来, 那么就不会有青蛙越过1号扇形与n号扇形之间的隔墙.我们来考察青蛙所在的扇形

的编号的平方和,由于没有青蛙进入1号扇形 所以只能是有3只青蛙由某个$k(3\leqslant k\leqslant n)$号扇形分别跳入$k-1,k$和$k+1$号扇形各一只.因此平方和的变化量为$(k-1)^2+k^2+(k+1)^2-3k^2=2$. 即增加2.一方面,由于青蛙的跳动不会停止(因为总有一个格子里有不少于3只青蛙),所以平方和的增加趋势不会停止; 但是另一方面,青蛙所在扇形的标号的平方和不可能永无止境的增加下去(不会大于$(4n+1)n^2$),由此产生矛盾, 所以迟早会有青蛙越过1号扇形与n号扇形之间的隔墙,进入1号扇形.

我们再来证明1号扇形迟早会有3只青蛙跳入,如果1号扇形中至多有两只青蛙跳入,那么它们都不会跳走, 并且自始至终上述平方和至多有两次变少(只能在两只青蛙越过1号扇形与n号扇形之间的隔墙时变小), 以后便一直持续不断的上升,从而又重蹈刚才的矛盾,所以1号扇形中迟早会有三只青蛙跳入.

如果这3只青蛙中有位于格A的,那么格A中已经有青蛙跳入;如果这3只青蛙全都位于格B,那么格B会发生爆发,从而有青蛙跳入格A.

4.已知数列$\{a_n\}$满足条件$a_1=\dfrac{21}{16}$,及

$$2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}},n\geqslant 2.$$

设m为正整数,$m\geqslant 2$.证明:当$n\leqslant m$时,有

$$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}.$$

证明:令$b_n=a_n+\dfrac{3}{2^{n+3}}$.则

$$2\left(b_n-\frac{3}{2^{n+3}}\right)-3\left(b_{n-1}-\frac{3}{2^{n+2}}\right)=\frac{3}{2^{n+1}}$$

所以$b_n=\dfrac{3}{2}b_{n-1}$.而$b_1=\dfrac{3}{2}$,所以$b_n=\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

所以只需证明:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<\frac{m^2-1}{m-n+1}.$$

即只需证明

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1$$

由Bernoulli不等式:

$$1-\frac{n}{m+1}<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^n$$

所以

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{mn}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn}=\left[\frac{1}{(1+\frac{1}{m})^m}\right]^n$$

由于$m\geqslant 2$,根据二项式定理可得

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\geqslant 1+\binom{m}{1}\frac{1}{m}+\binom{m}{2}\frac{1}{m^2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geqslant\frac{9}{4}$$

所以

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$$

所以只需证明

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1$$

即

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left(m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right)<m-1$$

记$t=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$,则$0<t<1$,只需证明$t(m-t^{m-1})<m-1$.

即$(t-1)[m-(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)]<0$,此不等式显然成立,从而原不等式成立.

5.在面积为1的矩形$ABCD$中(包括边界)有5个点, 其中任意三点不共线.求以这5个点为顶点的所有三角形中, 面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形的个数的最小值.

解:本题证明需要用到如下的常用结论,我们将其作为一个引理:矩形内任意一个三角形的面积不大于矩形面积的一半.

在矩形$ABCD$中,如果某三点构成的三角形的面积不大于$\frac{1}{4}$,就称它们为一个好的三点组,简称为好组.

记AB,CD,BC,AD的中点分别为E,F,H,G,线段EF与GH的交点记为O.线段EF和GH将矩形$ABCD$分成四个小矩形, 从而一定存在一个小矩形,不妨设为$AEOG$,其中(包括边界,下同)至少有所给5个点中的两个点,设点M,N在矩形$AEOG$中.

(1)如果矩形$OHCF$中有不多于1个已知点,考察不在矩形$OHCF$中的任意一个不同于M和N的已知点X,显然, 三点组(M,N,X)或者在矩形$ABGH$中,或者在矩形$AEFD$中.由引理可知(M,N,X)是好组,由于这样的点至少有两个,所以至少存在两个好组.

(2)如果矩形$OHCF$中有至少2个已知点,不妨设点P,Q都在矩形$OHCF$中,考察剩下来的最后一个已知点R. 如果R在矩形$OFDG$中,则三点组(M,N,R)在矩形$AEFD$中,三点组(P,Q,R)在矩形$GHCD$中,从而它们都是好组, 于是至少有两个好组.同理,如果点R在矩形$EBHO$中,同样至少有两个好组.

如果点R在矩形$EBHO$或者$AEOG$中,不妨设在矩形$EBHO$中,考察5个点M,N,P,Q,R的凸包,它一定在凸六边形$AEHCFG$中.

而$S_{AEHCFG}=S_{ABCD}-S_{DFG}-S_{BEH}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$.

再分三种情况讨论:

(i)M,N,P,Q,R的凸包为五边形,不妨设为$MNPQR$,此时$S_{MQR}+S_{MNQ}+S_{NPQ}\leqslant\frac{3}{4}$,

从而(M,Q,R),(M,N,Q),(N,P,Q)中至少有一个为好组,又由于(P,Q,R)在矩形$OHCF$中,当然是好组,所以至少有两个好组.

(ii)M,N,P,Q,R的凸包为四边形,不妨设为$A_1A_2A_3A_4$,另一点为A_5.

则$S_{A_1A_2A_5}+S_{A_2A_3A_5}+S_{A_3A_4A_5}+S_{A_4A_1A_5}=S_{A_1A_2A_3A_4}\leqslant\frac{3}{4}$,

从而$(A_1,A_2,A_5),(A_2,A_3,A_5),(A_3,A_4,A_5),(A_4,A_1,A_5)$中至少有两个好组.

(iii)M,N,P,Q,R的凸包为三角形,不妨设为$A_1A_2A_3$,另两个点为A_4,A_5.

则$S_{A_1A_2A_4}+S_{A_2A_3A_4}+S_{A_3A_1A_4}=S_{A_1A_2A_3}\leqslant\frac{3}{4}$.

从而$(A_1,A_2,A_4),(A_2,A_3,A_4),(A_3,A_1,A_4)$中至少有一个好组,

同理,$(A_1,A_2,A_5),(A_2,A_3,A_5),(A_3,A_1,A_5)$中至少有一个好组,此时也至少有两个好组.

综上所述,不论何种情况,在5个已知点中至少有2个好组.

下面给出一个例子说明好组的数目可以只有两个.在矩形$ABCD$中,M,N分别在边AD,AB上,使得$AN:NB=AM:MD=2:3$, 则在M,N,B,C,D这5个点中恰好有两个好组.

事实上,我们可以求得$S_{BCD}=S_{BCM}=S_{CDN}=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}$,

$S_{MCD}=S_{MDB}=S_{NCB}=S_{NBD}=\frac{3}{10}>\frac{1}{4}$.

$S_{MNC}=S_{ABCD}-S_{NCB}-S_{DMC}-S_{AMN}=1-\frac{3}{10}-\frac{3}{10}-\frac{2}{25}=\frac{8}{25}>\frac{1}{4}$.

所以只有两个好组$(M,N,B),(M,N,D)$.

故面积不大于$\frac{1}{4}$的三角形的个数的最小值为2.

6.求方程

$$2^x\cdot 3^y-5^z\cdot 7^w=1$$

的所有非负整数解(x,y,z,w).

解:由$5^z\cdot 7^w+1$为偶数,知$x\geqslant 1$.

(1)若$y=0$,此时$2^x-5^z\cdot 7^w=1$.

若$z\neq 0$,则$2^x\equiv 1 \pmod 5$,由此可得$4|x$.因此$3|2^x-1$,这与$2^x-5^z\cdot 7^w=1$矛盾.

若$z=0$,则$2^x-7^w=1$.

当$x=1,2,3$时,直接计算可得两组解$(x,w)=(1,0)(3,1)$.

当$x\geqslant 4$时,有$7^w\equiv -1 \pmod{16}$,但是$7^{2k}\equiv 1 \pmod{16}$,$7^{2k+1}\equiv 7 \pmod{16}$,显然不可能.

所以当$y=0$时,全部非负实数解为$(x,y,z,w)=(1,0,0,0),(3,0,0,1)$.

(2)若$y>0,x=1$,则$2\cdot 3^y-5^x\cdot 7^w=1$.

因此$-5^z\cdot 7^w\equiv 1 \pmod 3$,所以$(-1)^z\equiv -1 \pmod 3$,$z$为奇数.

所以$2\cdot 3^y\equiv 1 \pmod 5$,由此可得$y\equiv 1 \pmod 4$.

当$w\neq 0$时,有$2\cdot 3^y\equiv 1 \pmod 7$,由此可得$y\equiv 4 \pmod 6$,与$y\equiv 1 \pmod 4$矛盾.

所以$w=0$,于是$2\cdot 3^y-5^z=1$.

当$y=1$时,$z=1$.当$y\geqslant 2$时,$5^z\equiv -1 \pmod 9$,由此可知$z\equiv 3 \pmod 6$,因此$5^3+1|5^z+1$.

所以$7|5^z+1$,这与$5^z+1=2\cdot 3^y$矛盾.

故$y>0,x=1$时所有非负整数解为$(x,y,z,w)=(1,1,1,0)$.

(3)若$y>0,x\geqslant 2$,此时$5^z\cdot 7^w\equiv -1 \pmod 4$,$5^z\cdot 7^w\equiv -1 \pmod 3$.

即$(-1)^w\equiv -1 \pmod 4$,$(-1)^z\equiv -1 \pmod 3$.

因此z,w都是奇数,从而$2^x\cdot 3^y=5^z\cdot 7^w+1\equiv 35+1\equiv 4 \pmod 8$.

所以$x=2$,原方程变为$4\cdot 3^y-5^z\cdot 7^w=1$,$z,w$都是奇数.

由此可知$4\cdot 3^y\equiv 1 \pmod 5$,$4\cdot 3^y\equiv 1 \pmod 7$,

从上面两式可以得到$y\equiv 2 \pmod{12}$.

设$y=12m+2,(m\geqslant 0)$于是$5^z\cdot 7^w=4\cdot 3^y-1=(2\cdot 3^{6m+1}-1)(2\cdot 3^{6m+1}+1)$.

所以$2\cdot 3^{6m+1}-1=5^p\cdot 7^q(p,q$为非负实数).

化为(2)的情况,必有$p=1,q=0,2\cdot 3^{6m+1}-1=5,m=0,y=2$.

此时有$5^z\cdot 7^w=5(5+2)=35$,所以$z=w=1$.

故$y>0,x\geqslant 2$时所有非负整数解为$(x,y,z,w)=(2,2,1,1)$.

综上所述,所求的非负整数解为$(x,y,z,w)=(1,0,0,0),(3,0,0,1),(1,1,1,0),(2,2,1,1)$.

数学符号:

∞:无穷大

$\binom{n}{k}$:二项式系数

$|$:整除

$a^k \| b$:a^k整除b,但是a^{k+1}不整除b

$\gcd(a,b), \operatorname{lcm}(a,b)$:$a,b$的最大公约数和最小公倍数

$[x]$:不超过x的最大整数

$\angle$:角

$\odot$:圆

$S_{\triangle}$:三角形的面积

$\|$:平行

$\perp$:垂直

$\backsim$:相似

$\cong$:全等

$\in$:属于

$\subset$:包含于

$\rightarrow$:映射关系

$\cap$:交集

$\cup$:并集

$\setminus$:差集

$\emptyset$:空集

$\mathbb{R}$:实数集

$\mathbb{N}$:自然数集

$\mathbb{Z}$:整数集

$\mathbb{Q}$:有理数集

$\mathbb{N}^*$:正整数集

$\mathbb{Q}^*$:正有理数集

max:最大值

min:最小值

$\because$:因为

$\therefore$:所以

$\Leftrightarrow$:等价于

$\sum$:求和

$\prod$:求积