2013 年上海市高中数学竞赛（新知杯）试卷

(2013 年 3 月 31 日星期日上午 8:30–10:30)

注意事项:

1. 解答本试卷不得使用计算器

一. 填空题 (本题满分 60 分, 前 4 小题每小题 7 分, 后 4 小题每小题 8 分)

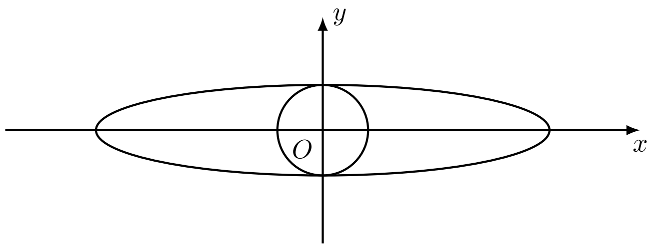
1. 若在区间 $[2,3]$ 上, 函数 $f(x)=x^2+bx+c$ 与 $g(x)=x+\dfrac{6}{x}$ 在同一点取相同的最小值, 则函数 $f(x)$ 在 $[2,3]$ 上的最大值是____________.

2. 若 a,b,c,d 为整数, 且 $a\lg 2+b\lg 3+c\lg 5+d\lg 7=2013$, 则有序数组 $(a,b,c,d)=$____________.

3. 已知函数 $y=\sqrt{(x^2-2)^2+(x-5)^2}+\sqrt{(x^2-3)^2+x^2}$, 则该函数的最小值是____________.

4. 已知线段 $x+y=9$ $(x\geq 0, y\geq 0)$ 分别与 y 轴, 指数函数 $y=a^x$ 的图像, 对数函数 $y=\log_a x$ 的图像, x 轴交于点 A,B,C,D, 其中 $a>0$, $a\neq 1$. 若中间两点恰好三等分线段 AD, 则 a 的值是____________.

5. 如图, 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{25}+y^2=1$ 和 $\odot O: x^2+y^2=1$, 在椭圆内, 且在 $\odot O$ 外的区域内 (包括边界) 所含圆的最大半径是____________.



6. 关于 m,n 的方程 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{mn^2}=\dfrac{3}{4}$ 的整数解 $(m,n)=$____________.

7. 袋中有 6 只红球与 8 只白球, 任意抓 5 只放入一个 A 盒中, 其余 9 只球放入一个 B 盒中, 则 A 盒中白球个数加 B 盒中红球个数之和不是质数的概率是____________(用数字作答).

8. 若在集合 $\{1!, 2!, 3!, \ldots, 99!, 100!\}$ 中删去一个元素后, 余下元素的乘积恰好是一个完全平方数, 则删去的这个元素是____________.

二. 解答题 (本题满分 60 分)

9. (本大题共 12 分) 正整数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 b_n, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项积为 c_n, 且 $b_n + 2c_n = 1\ (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 中最接近 2013 的数.

10. (本大题共 12 分) 已知正数 p 及抛物线 $C: y^2 = 2px\ (p > 0)$, $A\left(\dfrac{p}{6}, 0\right)$ 为抛物线 C 对称轴上一点, O 为抛物线 C 的顶点, M 为抛物线 C 上任意一点, 求 $\dfrac{|OM|}{|AM|}$ 的最大值.

11. (本大题共 18 分) 已知不等式 $k(ab+bc+ca)>5\left(a^2+b^2+c^2\right)$ .... $(*)$

(1) 若存在正数 a,b,c, 使不等式 $(*)$ 成立, 求证: $k>5$;

(2) 求所有满足下列条件的整数 k: 存在正数 a,b,c 使不等式 $(*)$ 成立, 且凡使不等式 $(*)$ 成立的任意一组正数 a,b,c 都是某个三角形的三边长.

12. (本大题共 18 分) 已知棱长为 1 的正方体 $ABCDEFGH$(如图), P 为它的 8 个顶点构成的集合, 对 $n \in \mathbb{N}^*$, 规定 $2n+1$ 个有序顶点组 $(A_0A_1A_2\ldots A_{2n})$ 满足 $A_0 = A$, 且对每个 $i \in \{0,1,2,\ldots,2n-1\}$, A_{i+1} 与 A_i 是 P 中的相邻顶点.

(1) 求顶点 A_{2n} 所有可能的位置;

(2) 设 S_{2n} 表示 $A_{2n} = C$ 的所有 $2n+1$ 个有序顶点组 $(A_0A_1A_2\ldots A_{2n})$ 的个数, 求 S_{2n}.