**例一** 一质量为M的平板车，可无摩擦地沿一水平直轨道运动。初始时，平板车在轨道静止不动，有N个人站在车上，每个人的质量为m.

1. 当有N个人一起以相对于车的速度为v0 同时从车的一端跳出，问N个人跳车之后，车的速度为多少？
2. 若N个人一个接一个地都以相对于车的速度为v0 跑向一端相继跳离平板车（在一个时刻只有一个人跳），求平板车的末速度。
3. 在（1）和（2）俩种情况下，哪种情况的车速较大？

****

**解答：**（1）N个人一起跳，由动量守恒可知Mv+Nm(v+v0)=0,得

 V=-[(Nm)/(M+Nm)]v0 (负号表示v与v0反向)

 （2）设某时刻车上仍有n个人在一起做水平平动，平动速度为vn .因而，在水平方向上总动量为(M+nm)vn. 然后，有一个人从车上跳下后，车及车上(n-1)人的水平平动速度为系统(由车、车上的人及跳下的人组成)的水平总动量为

 [M+(n-1)m]vn-1+m(vn-1+ v0).

 由于在水平方向上无外力作用，该方向上动量守恒，即

 (M+nm)vn=[M+(n-1)m]vn-1+m(vn-1+ v0)

  (M+nm)vn=(M+nm)vn-1+mv0,

故 vn-1= vn-[m/(M+nm)] v0.

 车上有N个人时，车和人都静止，即

 vN-1= vN-[m/(M+Nm)] v0,

vN-2 = vN-1-{m/[M+(N-1)m]} v0

 =-[m/(M+Nm)] v0-{m/[M+(N-1)m]} v0

=…

 故车的末速度为vN-N= vn=0.

 （3）因为：M+nm<=M+Nm,n=1,2,…N，所以（2）中平板车的末速度比（1）大.

**例2** 质量为m的钢板与直立轻弹簧的上端连接，弹簧下端固定在地上.平衡时，弹簧的压缩量为x0，如图所示。一物块从钢板正上方距离为3 x0的A处自由落下，打在钢板上并立刻与钢板一起向下运动，但不粘连。它们到达最低点后又向上运动.已知物块质量也为m时，它们恰能回到点O.若物块质量为2m，仍从A处自由落下，则物块与钢板回到点O时，还具有向上的速度。求：物块向上运动到达的最高点与点O的距离。

**分析** 俩次都是回到点O，弹簧的弹性势能相等。若用Ep=kx2表达式求解，会有不同表达形式，可以自己完成。

**解答** 物块与钢板碰撞时的速度

 设v1表示质量为m的物块与钢板碰撞后一起开始向下运动的速度，因碰撞时间极短，所以动量守恒，即

 刚碰完时弹簧的弹性势能为Ep。当它们一起回到点O时，弹簧无形变，弹性势能为0，根据题给条件，这时物块与钢板的速度为0，由机械能守恒可知

设V2表示质量为2m的物块与钢板碰撞后开始一起向下运动的速度，则有

2m的物块与钢板共同运动到达最低点后反弹仍继续向上运动，设此时速度为v，则有

在以上俩种情况中，弹簧初始压缩量都是x0，故有

当质量为2m的物块与钢板一起回到点O时，弹簧弹力为0，物块与钢板只受到重力作用，加速度为g.一过点O，钢板受到弹簧向下的拉力作用，加速度大于g。由于物块与钢板不粘连，物块不可能受到钢板的拉力，其加速度仍为g，故在点O物块与钢板分离，分离后，物块以速度v竖直上升，则由以上各式解得v2=gx0.物块向上运动所到最高点与点O的距离l为

**例三** （第十三届复赛题）如图所示，4个质量均为m的质点，用同样长度且不可伸长的轻绳连接成菱形ABCD。静止放在水平光滑的桌面上。若突然给质点A一个历时极短沿CA方向的冲击，当冲击结束的时刻，质点A的速度为v，其他质点也获得一定速度，。求此质点系统受冲击后所具有的总动量和总能量。

**分析** 矢量的运算、正交分解法，巧选研究对象，是解决本题的关键。

**解答** 由对称性可知，点C的速度也必沿CA方向，设其大小为vC.D的速度可以分解为平行于v和垂直于v的俩个分速度，其大小分别为vD1和vD2.同样，B的速度也类似地分解为平行和垂直于v的俩个分速度，其大小设为vB1和vB2，如图所示，根据对称性，必有

vB1= vD1

vB2= vD2

 由于绳子不可伸长，A沿DA的分速度和D沿DA的分速度一定相等，C沿CD的分速度和D沿CD的分速度也相等，即

 另一方面，设绳子AD给质点D的冲量的大小为，绳子DC给质点C冲量大小为。注意到绳子DC给质点D的冲量大小同样也是（各冲量方向均沿绳子方向）。由对称性还可以判断，绳子AB给质点B的冲量大小也是，绳子BC给质点B和C的冲量大小都是I2，根据动量定理，可分别列出关于质点D平行和垂直于v的方向以及质点C平行于v方向的关系式如下：

 联立可解出本题所需的vD1、 vD2、vC：

sin2)

2sin2)

sin2)

 联立得，此系统的总动量为

sin2)

方向沿CA方向。

此系统的总动能为sin2).

**例四（**第七届复赛题**）**三个质点A,B和C，质量分别为，用拉直且不可伸长的绳子AB和BC相连，静止在水平面上，如图所示，AB和BC之间夹角为（）现对质点C施加以冲量I，方向沿BC，试求质点A开始运动的速度。

**分析**：首现，注意“开始运动”的理解，它指绳子恰被拉直，有作用力和冲量产生，但是绳子方位尚未发生变化。其二，对三个质点均可用动量定理，但是，质点B受冲量不在一条直线上，故最为复杂，可采用分方向的形式表达。其三，由于两段绳子不可伸长，故三质点的瞬时速度可以寻求到两个约束关系。

**解答：**绳拉直瞬间，AB绳对A，B两质点的冲量大小相等（方向相反），设为，BC绳对B，C两质点的冲量大小相等（方向相反），设为；设A获得速度（由于A受合冲量只有，方向沿AB，故的方向沿AB），设B获得速度（由于B受合冲量为，矢量和既不沿AB，也不沿BC方向，可设与AB绳夹角为（），如图所示，设C获得速度（合冲量沿BC方向，故沿BC方向）。

对A用动量定理，有

B的动量定理是一个矢量方程：**=,**可化为俩个分方向的标量式，即

质点C的动量定理方程为

AB绳不可伸长，必有

BC绳不可伸长，必有

6个方程解6个未知量（）是可能的，但繁琐程度非同一般。解方程要注意合理性，否则造成混乱。建议采取如下步骤：

1. 先用式消掉，使6个一级式变成4个二级式，即

解式、消掉，使四个二级式变成三个三级式，即

# 核题位置

最后对式(5-12) (5-13) (5-14)消、，解就方便多了。结果为

**例五** **如图5-5**所示**，**水平地面上静止放着物块B和C,相距l=1.0m.物块A以速度=10m/s沿水平方向与B正撞。碰撞后A和B牢固地黏在一起向右运动，并在与C发生碰撞，碰后瞬间C的速度v=2.0m/s。已知A和B的质量均为m,C质量为A质量的K倍，物块与地面的动摩擦因数.（设碰撞时间很短，g=10m/s2）

1. 计算与C碰撞前瞬间A，B的速度；
2. 根据A，B与C的碰撞过程分析k的取值范围，并讨论与C碰撞后A，B的可能运动方向。

**分析**：A与B碰后速度为，由于碰撞时间很短，A，B相碰的过程动量守恒，机械能不守恒。

**解答**：（1）设A，B碰后速度为，由于碰撞时间很短，A，B相碰的过程动量守恒，得

 在A，B向C运动，设与C碰撞前速度为，在此过程中由动能守恒，有

 得A，B与C碰撞前速度为=4m/s.

（2）设A，B与C碰后速度为，A，B与C碰撞的过程动量守恒，即

2m

 碰后A，B的速度必须满足

 由式（5-15）（5-16）（5-17）得2k6

 由式（5-15）知：当2k<4,>0，即与C碰撞后，A，B向右运动；

 当k=4时，，即与C碰撞后，A，B停止；

当4<k7.74时，<0，即与C碰撞后，A，B向左运动。

**例八** （1）如图**5-8（a）所示，**ABC为一固定在竖直平面内的光滑轨道，BC段水平，AB与BC段平滑连接。质量为的小球从高位h处由静止开始沿轨道下滑，与静止在轨道ＢＣ段上质量为 的小球发生碰撞，碰撞后俩球的运动方向处于同一水平线上，且再碰撞过程中无机械能损失。求碰撞后小球的速度

****（２）碰撞过程中的能量传递规律在物理学中有着广泛的应用。为了探究这一规律，我们采用多球依次碰撞、碰撞前后速度在同一直线上、且无机械能损失的简化力学模型。**如图５－８（ｂ）所示**，在固定光滑轨道上，质量分别为的若干个球沿直线静止相间排列，给第一个球初动能，从而引起各球依次碰撞，。定义其中第ｎ个球经过依次碰撞后获得的动能与之比为第一个球对第ｎ个球的动能传递系数

求

若，，为确定的已知量，问为何值时，

值最大。

**分析**：碰撞时动量守恒，机械能也守恒。

**解答**：（１）设碰撞前的速度为，根据机械能守恒定律，有

　　　　　　设碰撞后与的速度分别为和，根据动量守恒定理有

 由于碰撞过程中无机械能损失

 联立解得

 （2）由式5-34，考虑到=和=，再根据动能传递系数的定义，对于‘1’‘2’俩球得==

 同理可得，球和球碰撞后，动能传递系数应为

==

 依此类推，动能传递系数

…

 解得

将带入式5-35可得

2

为使，只需使最大，即取最小值，由

可知，当，即=时，



**例九 如图5-9所示，**一个由光滑细管构成半径为R的圆环，放在水平光滑桌面上。管内处有质量为m 的小球，圆形管道的质量为.开始时管道静止，俩小球向右以等大速度开始运动，细管上处有俩个缺口（），小球自小孔中穿出后，将在平面上某处相遇，求：

1. 相遇时俩球与管道中心O的距离l;
2. 从小球穿出缺口直到小球相遇的过程中，管道在平面上移动的路程s.

**分析 略**

**解答：**取管道为参考坐标系，俩小球自小孔穿出后将沿切线方向运动，因此

l=

 小球从处的过程中动量守恒，即

2m

 机械能守恒

 （2m）+\*2m+\*2m

 可解得小球相对环得速度

v=

环的速度

小球从穿出小孔到相遇的时间

t=R=

管道在平面上移动的路程

s=ut=2R

**例10（**第十七届复赛题**）**一玩具火箭由上下俩部分和一根短而硬（即劲度系数很大）的轻质弹簧构成。上部分与之间，与俩者接触而不固连。让、压紧弹簧，并将他们锁定，此时弹簧的弹性势能为已知的定值。通过遥控可解除锁定，让弹簧恢复至原长并释放其弹性势能，设这一释放的过程的时间极短。第一种方案是让玩具位于一口枯井的井口处并处于静止状态时解除锁定，从而使上部分升空。第二种方案是让玩具在井口处从静止开始自由下落，撞击井底（井足够深）后原速率反弹，反弹后当玩具垂直向上运动到离井口深度为h的时刻解除锁定。

1. 在第一种方案中，玩具的上部分升空到达的最大高度（从井口算起）为多少？其能量是从何种形式的能量转化而来的？
2. 在第二种方案中，玩具的上部分升空可能达到的最大高度（从井口算起）为多少？并定量讨论其能量可能是从何种形式的能量转化而来的。

 **分析** 动量守恒和机械能守恒联合可以解题

**解答** ：（1）在弹簧刚伸长至原长的时刻，设的速度大小为v，方向向上，的速度大小为，方向向下，则有

=0

 解上面俩个式子，得

 =

设升空到达的最高点到井口的距离为，则

上升到最高点的重力势能为

它来自弹簧的弹性势能，且仅为弹性势能的一部分。

1. 在玩具自井底反弹向上运动至离井口的深度为h时，玩具向上的速度为

u=

 设解除锁定后，弹簧刚伸长至原长时，的速度大小为,方向向上，的速度大小为v，方向向下，则有

 消去式5-38，5-39中的，得的方程式为

 由此可求得弹簧刚伸长至原长时，和的速度分别为

=u+

 设从解除锁定处向上运动到达的最大高度为，则有

 u+=h+[]+2

 从井口算起，上升的最大高度为

=-h=[] +2

 讨论：可以看出。在第二方案中，上升的最大高度大于第一方案中的最大高度，超过的高度与解除锁定处到井口的深度h有关。到达时，其重力势能为

==[]+ 2

1. 若,即2<

这就要求h<

这时，上升至最高处的重力势能来自压紧的弹性势能，但仅是弹性势能的一部分。在这一条件下上升的最大高度为

1. 若,2=这就要求h=

此时升至最高处的重力势能来自压紧的弹性势能，切等于全部的弹性势能。再这一条件下，上升的高度为

1. 若, 2>,这就要求h>此时升至最高处的重力势能大于压紧的弹簧弹性势能，超出部分的能量只能来自的机械能。在这个条件下，上升的最大高度为

**例十一** **如图5-10（a）所示，**用一弹簧把俩物块A和B连接起来后，置于水平地面上。已知A和B的质量分别为.问应给物块A上加多大的压力F，才可能撤去力F后，A向上跳起来后会出现B对地无压力的情况？弹簧的质量略去不计。

**分析：**B对地压力为零就是弹簧对B向上拉力等于B的重力，由此型变量在去研究势能变化。

**解答：**设弹簧原长为,建立如图5-10（b）所示坐标，以k表示弹簧的劲度系数，则有

g=k

 取图中点O处为重力势能零点，当A受力F由点O再被压缩了x时，系统的机械能为

 撤去F当A上升到最高处即弹簧较其自然长度再伸长，系统的机械能为



 A在x处时，其受力满足

 F+

 以式5-40的g=k代入上式，有

F=kx

 当F撤去，A上升到时，弹簧的弹力大小为k,设此时B受到地面的支持力为N，则对于B应有

N+ k-=0

 要B对地无压力，即N=0，则上式变为k=

 因为A由x处上升至处的过程中，对此系统无外力和耗散力做功，则其机械能守恒，即

=

 联立求解，可得

F=

 显然，要出现B对地无压力的情况，应为F。当F=时，刚好能出现B对地无压力的情况，但B不会离开地面；当F>时，B将出现离开地面向上挑起的情况

**例十二** 光滑水平面上有俩个质量分别为和的小球A和B，它们在一条与右侧墙壁垂直的直线上前后放置。设开始时B静止，A以速度v对准B运动，不计摩擦且认为碰撞是完全弹性的，要求A和B发生俩次碰撞，那么应在什么范围？

分析：有且只能有俩次碰撞，利用速度关系讨论求解

解答：由弹性碰撞的动量、动能的守恒定律得到

并以向右为正。

第一次碰撞后v，v

要求第二次碰撞存在，只要>||即可，得>

第二次碰撞后

, v

不允许第三次碰撞，需满足<0,得

3-<<3+

且<||,即<

得到

>1- 或<1+

综合式5-46~5-48取值即可，即<1+

**例十四** 如图所示，再光滑的水平面上，质量为M=1kg的平板车左端放有质量诶m=2kg的铁块，铁块与车之间的动摩擦因数为。开始时，车和铁块以共同速度v=6m/s向右运动，车与右边的墙壁发生正碰，且碰撞是有弹性的。车身足够长，使铁块不能和墙相碰。重力加速度g=10m/s,试求：

1. 铁块相对于车运动的总路程
2. 平板车第一次碰墙后所走的总路程

分析：通过动量守恒的相对滑动过程分析以及碰撞速度的变化，利用不完全归纳法求解

**解答：**规定向右为正向，将矢量运算化为代数运算

 车第一次碰撞后，车速变为-v，然后与速度仍为v的铁块作用，动量守恒，作用完毕后，共同速度=,因方向为正，必朝墙运动。

车第一次碰撞后，车速变为-，然后与速度仍为的铁块作用，动量守恒，作用完毕后，共同速度，因方向为正，必朝墙运动。

车第三次碰墙，……共同速度==，朝墙运动

……

依此类推，我们可以概括铁块和车的运动情况。

铁块：匀减速向右运动匀速向右

平板车：匀减速向左运动匀加速向右匀减速向左运动匀加速向右

显然，只要车和铁块有共同速度，它们总是要碰墙，所以最后的稳定状态是：它们一起停在墙角（总的末动能为0）

1. 全程能量关系：对铁块和车系统，-=，且=，即

带入数字：

1. 平板车向右运动时比较复杂，只要是每次向左运动的路程的俩倍即可。而向左是匀减速的，故：
2.
3. =
4. =

……

N次碰墙的总路程是：=2()=(1+)=(1+)

碰墙次数n趋于无穷，带入其他数字，得：m