2010 年中国国家集训队选拔考试

中图分类号：G424.79 文献标识码：A 文章编号：1005-6416(2010)05-0021-07

1. 在锐角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，M是边BC的中点，P是$\triangle AMC$内一点，使得$\angle MAB=\angle PAC$. 设$\triangle ABC$、$\triangle ABP$、$\triangle ACP$的外心分别为O、O_1、O_2. 证明：直线AO平分线段O_1O_2. （熊 斌 供题）

2. 已知

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_{2010}\}$$

和 $$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_{2010}\}$$

是复数集的两个子集，且满足

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2010}(a_i+a_j)^n=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 2010}(b_i+b_j)^n$$

对$n=1,2,\cdots,2010$成立. 证明：$A=B$.

（冷岗松 供题）

3. 设$n_1,n_2,\cdots,n_{26}$是 26 个互不相同的正整数，满足：

(1) 每个n_i在十进制表示中的数码均属于集合$\{1,2\}$；

(2) 对任意的i、j，在n_i的末位后添加若干个数码，不能得到n_j.

试求$\sum_{i=1}^{26}S(n_i)$的最小值，其中，$S(m)$表示正整数m的十进制表示的各位数码之和.

（付云皓 供题）

4. 设$G=G(V;E)$是一个简单图，V是顶点集，E是边集，$|V|=n$. 一个映射$f:V\to\mathbf{Z}$称为"好的"，如果f满足：

(1) $\sum_{v\in V}f(v)=|E|$；

(2) 将任意若干个顶点染成红色，则总存在一个红色顶点v，使得$f(v)$不超过与v相邻的未染色的顶点个数.

设$m(G)$是所有好的映射f的个数. 证明：若V中每个顶点都至少与另外一个顶点有边相连，则$n\leqslant m(G)\leqslant n!$.

（瞿振华 供题）

5. 给定整数$a_1\geqslant 2$，对整数$n\geqslant 2$，定义a_n是与a_{n-1}不互质，且不等于$a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$的最小正整数. 证明：每个不小于 2 的整数均在数列$\{a_n\}$中出现. （余红兵 供题）

6. 设整数$n(n\geqslant 2)$，给定区间$[0,1]$中的实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$. 证明：存在实数$a_0,a_1,\cdots,a_n$，满足：

(1) $a_0+a_n=0$；

(2) $|a_i|\leqslant 1(i=0,1,\cdots,n)$；

(3) $|a_i-a_{i-1}|=x_i(i=1,2,\cdots,n)$.

（朱华伟 供题）

参考答案

1. 证法 1 如图 1，作出$\triangle ABC$、$\triangle ABP$、$\triangle ACP$的外接圆，延长AP交$\odot O$于点D，联结BD，并作出$\odot O$在点A处的切线，分别与$\odot O_1$、$\odot O_2$交于点E、F，联结BE.

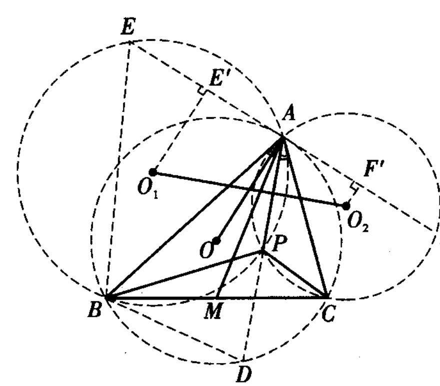

图 1

易证$\triangle AMC\backsim\triangle ABD\Rightarrow\frac{AB}{BD}=\frac{AM}{MC}$.

又$\triangle EAB\backsim\triangle PDB$，得$\frac{AB}{BD}=\frac{AE}{PD}$.

所以，$\frac{AM}{MC}=\frac{AE}{PD}$，即 $AE=\frac{AM\cdot PD}{MC}$.

同理，$AF=\frac{AM\cdot PD}{MB}$.

因此，$AE=AF$. ①

再分别作 $O_1E'\perp AE$、$O_2F'\perp AF$ 于点 E'、F'. 由垂径定理知，E'、F' 分别是 AE、AF 的中点. 故由式①即知 A 也是 $E'F'$ 的中点.

在直角梯形 $O_1E'F'O_2$ 中，OA 即中位线所在直线，故它一定平分 O_1O_2.

证法 2 如图 2，联结 AO_1、OO_1、AO_2、OO_2. 记直线 AO 与线段 O_1O_2 的交点为 Q. 则

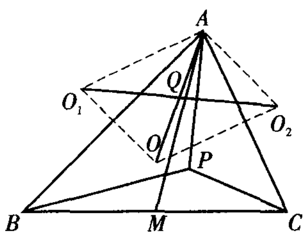

图 2

$$\frac{O_1Q}{QO_2}=\frac{S_{\triangle AOO_1}}{S_{\triangle AOO_2}}=\frac{AB\cdot OO_1}{AC\cdot OO_2},$$

其中，$\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}$.

而 $\angle OO_1Q=\angle BAP=\angle CAM$，

$\angle OO_2Q=\angle CAP=\angle BAM$，

则 $\frac{OO_1}{OO_2}=\frac{\sin\angle OO_2Q}{\sin\angle OO_1Q}=\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle CAM}$.

故 $\frac{O_1Q}{QO_2}=\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle CAM}\cdot\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle ABM}$

$=\frac{AM}{CM}\cdot\frac{BM}{AM}=\frac{BM}{CM}$.

注意到 M 是 BC 的中点，则 $O_1Q=QO_2$，

故直线 AO 平分线段 O_1O_2.

2. 记 $T_k=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,010}(a_i+a_j)^k$，

$S_k=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 2\,010}a_i^k$，$S_{k,l}=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 2\,010}a_i^ka_j^l$.

对集合 B 类似地定义 T'_k、S'_k、$S'_{k,l}$.

接下来用数学归纳法证明：

$S_k=S'_k(k=1,2,\cdots,2\,010)$.

由题设知，$T_k=T'_k$ 对任意的 $k(k=1,2,\cdots,2\,010)$ 成立.

易知 $T_1=2\,009S_1$，$T'_1=2\,009S'_1$. 则 $S_1=S'_1$.

假设 $k=1,2,\cdots,t(t\leqslant 2\,009)$ 时，均有 $S_k=S'_k$.

考虑 $k=t+1$ 的情况.

(1) 如果 $t+1=2m$ 是偶数，则有下面的恒等式

$$T_{2m}=2\,009S_{2m}+\mathrm{C}_{2m}^1(S_{1,2m-1}+S_{2m-1,1})+\cdots+\mathrm{C}_{2m}^{m-1}(S_{m-1,m+1}+S_{m+1,m-1})+\mathrm{C}_{2m}^mS_{m,m},$$

$S_1S_{2m-1}=S_{2m}+(S_{1,2m-1}+S_{2m-1,1})$,

$S_2S_{2m-2}=S_{2m}+(S_{2,2m-2}+S_{2m-2,2})$,

……

$S_mS_m=S_{2m}+2S_{m,m}$.

将 T_k、S_k、$S_{k,l}$ 换成 T'_k、S'_k、$S'_{k,l}$，上述恒等式仍成立.

由 $T_{2m}=T'_{2m}$，得

$$2\,009(S_{2m}-S'_{2m})+\mathrm{C}_{2m}^1(S_{1,2m-1}+S_{2m-1,1}-S'_{1,2m-1}-S'_{2m-1,1})+\cdots+\mathrm{C}_{2m}^{m-1}(S_{m-1,m+1}+S_{m+1,m-1}-S'_{m-1,m+1}-S'_{m+1,m-1})+\mathrm{C}_{2m}^m(S_{m,m}-S'_{m,m})=0. \quad ①$$

由归纳假设

$S_1S_{2m-1}=S'_1S'_{2m-1}$,

$S_2S_{2m-2}=S'_2S'_{2m-2}$,

……

$S_mS_m=S'_mS'_m$.

故 $(S_{2m}-S'_{2m})+(S_{1,2m-1}+S_{2m-1,1}-S'_{1,2m-1}-S'_{2m-1,1})=0$,

……

$(S_{2m}-S'_{2m})+2(S_{m,m}-S'_{m,m})=0$.

将上述等式代入式①得

$$2\,009(S_{2m}-S'_{2m})-[\mathrm{C}_{2m}^1(S_{2m}-S'_{2m})+\cdots+\mathrm{C}_{2m}^{m-1}(S_{2m}-S'_{2m})+\frac{1}{2}\mathrm{C}_{2m}^m(S_{2m}-S'_{2m})]=0,$$

即 $(2\,010-2^{2m-1})(S_{2m}-S'_{2m})=0$.

所以，$S_{2m}=S'_{2m}$.

(2)如果 $t+1=2m+1$ 是奇数，类似(1)可得

$$T_{2m+1}=2\,009S_{2m+1}+\mathrm{C}_{2m+1}^{1}(S_{1,2m}+S_{2m,1})+\cdots+\mathrm{C}_{2m+1}^{m}(S_{m,m+1}+S_{m+1,m}),$$

$$S_1S_{2m}=S_{2m+1}+(S_{1,2m}+S_{2m,1}),$$

$$S_2S_{2m-1}=S_{2m+1}+(S_{2,2m-1}+S_{2m-1,2}),$$

……

$$S_mS_{m+1}=S_{2m+1}+(S_{m,m+1}+S_{m+1,m}).$$

将 T_k、S_k、$S_{k,l}$ 换成 T'_k、S'_k、$S'_{k,l}$，上述恒等式仍成立.

由 $T_{2m+1}=T'_{2m+1}$，得

$$2\,009(S_{2m+1}-S'_{2m+1})+\mathrm{C}_{2m}^{1}(S_{1,2m}+S_{2m,1}-S'_{1,2m}-S'_{2m,1})+\cdots+\mathrm{C}_{2m+1}^{m}(S_{m,m+1}+S_{m+1,m}-S'_{m,m+1}-S'_{m+1,m})=0. \quad ②$$

由归纳假设

$$S_1S_{2m}=S'_1S'_{2m},$$

$$S_2S_{2m-1}=S'_2S'_{2m-1},$$

……

$$S_mS_{m+1}=S'_mS'_{m+1}.$$

故 $(S_{2m+1}-S'_{2m+1})+(S_{1,2m}+S_{2m,1}-S'_{1,2m}-S'_{2m,1})=0$,

……

$$(S_{2m+1}-S'_{2m+1})+(S_{m,m+1}+S_{m+1,m}-S'_{m,m+1}-S'_{m+1,m})=0.$$

代入式②得

$$(2\,009-2^{2m})(S_{2m+1}-S'_{2m+1})=0.$$

故 $S_{2m+1}=S'_{2m+1}$.

由数学归纳法知 $S_k=S'_k$ 对一切的 $k(k=1,2,\cdots,2\,010)$ 均成立.

进一步，设

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{2\,010})=x^{2\,010}+A_1x^{2\,009}+\cdots+A_{2\,010}, \quad ③$$

$$(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{2\,010})=x^{2\,010}+B_1x^{2\,009}+\cdots+B_{2\,010}. \quad ④$$

则由牛顿公式知

$$S_k+A_1S_{k-1}+\cdots+A_{k-1}S_1+kA_k=0\ (k=1,2,\cdots,2\,010), \quad ⑤$$

$$S'_k+B_1S'_{k-1}+\cdots+B_{k-1}S'_1+kB_k=0\ (k=1,2,\cdots,2\,010). \quad ⑥$$

由式⑤、⑥，$S_k=S'_k(k=1,2,\cdots,2\,010)$ 及数学归纳法得

$$A_k=B_k(k=1,2,\cdots,2\,010).$$

因此，式③、④的右边恒等，故左边也相等，即 $A=B$.

3. 对于两个十进制正整数 a、b，若在 b 的末位后添加数码可以得到 a，则称“a 包含 b”.

先证明一个引理.

引理　给定一些互不相同的正整数 $n_1,n_2,\cdots,n_r$，每一个 n_i 的十进制表示中的数码均为 1 和 2. 若它们当中的任意两个互相不包含，则对于任意正整数 t，满足 $S(n_i)\leqslant t$ 的 i 最多有 F_t 个，其中，$\{F_n\}$ 是斐波那契数列，

$$F_1=1,F_2=2,F_{n+2}=F_{n+1}+F_n(n\geqslant1).$$

证明　对 t 进行归纳.

当 $t=1,2$ 时，显然($t=2$ 时，1 和 11 不能同时存在).

若对小于 t 的正整数都成立，考虑 t 的情况.

不妨设 $S(n_1),S(n_2),\cdots,S(n_l)$ 是所有不大于 t 的 $S(n_i)$，其中，$n_1,n_2,\cdots,n_j$ 的首位为 1，$n_{j+1},n_{j+2},\cdots,n_l$ 的首位为 2.

若 $n_1,n_2,\cdots,n_j$ 中有一位数，则其必然为 1，此时，$j=1\leqslant F_{t-1}$. 若不然，则将 $n_1,n_2,\cdots,n_j$ 首位的 1 去掉，剩下的数仍然互不包含.

由归纳假设知 $j\leqslant F_{t-1}$.

同理，$l-j\leqslant F_{t-2}$.

因此，$l\leqslant F_{t-1}+F_{t-2}=F_t$.

故对 t 也成立.

回到原题.

设将题目中的 26 改为 m 后，$\sum\limits_{i=1}^{m}S(n_i)$ 的最小值为 $f(m)$.

对于任何 $m(m\geqslant3)$，由 $f(m)$ 的定义知，存在互不包含且各位数码均为 1 或 2 的正整

数 $n_1,n_2,\cdots,n_m$,使得它们的各位数码之和满足 $\sum_{i=1}^{m}S(n_i)=f(m)$.

不妨设 $\max_{1\leqslant i\leqslant m}S(n_i)=S(n_1)$,且 n_1 是所有这些各位数码和为 $S(n_1)$ 的数中最大的一个.

由 $m\geqslant3$ 知 n_1 不是一位数.

若 n_1 的末位数字为 1,由 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 互不包含知,$\frac{n_1-1}{10}$ 不在 $n_2,n_3,\cdots,n_m$ 中.

注意到 $S\left(\frac{n_1-1}{10}\right)=S(n_1)-1$.

故 $\frac{n_1-1}{10},n_2,\cdots,n_m$ 两两不同且各位数码之和为 $f(m)-1$.

由 $f(m)$ 的定义知,$\frac{n_1-1}{10},n_2,\cdots,n_m$ 中有两个数,一个包含另一个.

由 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 互不包含知,$n_2,n_3,\cdots,n_m$ 中有一个包含 $\frac{n_1-1}{10}$.

不妨设 n_2 包含 $\frac{n_1-1}{10}$.则 n_2 的各位数码之和至少比 $\frac{n_1-1}{10}$ 的各位数码之和多 2(在 $\frac{n_1-1}{10}$ 后添加一个 1 即为 n_1),这说明 $S(n_2)>S(n_1)$,矛盾.

因此,n_1 的末位数码为 2.

若 n_1-1 不在 $n_2,n_3,\cdots,n_m$ 中,则由于 $S(n_1-1)=S(n_1)-1$,故 $n_1-1,n_2,\cdots,n_m$ 两两不同且各位数码之和为 $f(m)-1$.

由 $f(m)$ 的定义知,$n_1-1,n_2,\cdots,n_m$ 中有两个数,一个包含另一个.

由于 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 互不包含,故只能是 n_1-1 与某个 n_i 间存在包含关系.

若 n_i 包含 n_1-1,由 $S(n_1-1)=S(n_1)-1$ 知,这个 n_i 只能是在 n_1-1 的十进制表示的末位加上一个 1,即 $n_i=10(n_1-1)+1$.因此,$S(n_i)=S(n_1)$,且 $n_i>n_1$,这与 n_1 的定义矛盾.

若 n_1-1 包含某个 n_i,则 n_1 也包含 n_i(因 n_1 与 n_1-1 仅是末位不同),与假设矛盾.因此,n_1 的末位数码为 2 且 n_1-1 在 $n_1,n_2,\cdots,n_m$ 中.

不妨设 $n_2=n_1-1$.考虑 $\frac{n_1-2}{10},n_3,\cdots,n_m$.

显然,$n_3,n_4,\cdots,n_m$ 互不包含,$\frac{n_1-2}{10}$ 也不可能包含 $n_3,n_4,\cdots,n_m$ 中的任何一个(因 n_1 包含 $\frac{n_1-2}{10}$,且包含具有传递性).若 $n_3,n_4,\cdots,n_m$ 中的某一个包含 $\frac{n_1-2}{10}$(不妨设为 n_3),由于 $S\left(\frac{n_1-2}{10}\right)=S(n_1)-2$,故 n_3 只能是在 $\frac{n_1-2}{10}$ 的末位后加上 1、2 或 11 得到.但在 $\frac{n_1-2}{10}$ 后加上 1、2 分别构成 n_2、n_1,故只能有 $n_3=100\cdot\frac{n_1-2}{10}+11=10n_1-9$,但 $S(n_3)=S(n_1)$ 且 $n_3>n_1$,与 n_1 的定义矛盾.

因此,$\frac{n_1-2}{10},n_3,\cdots,n_m$ 互不包含.

由 f 的定义知,它们的各位数码之和的总和应不小于 $f(m-1)$.

故 $f(m)-S(n_1)-(S(n_1)-1)+(S(n_1)-2)\geqslant f(m-1)$,

即 $f(m)\geqslant f(m-1)+S(n_1)+1$.

设 u 是满足 $F_{u-1}<m\leqslant F_u$ 的整数.则由引理知,$S(n_1),S(n_2),\cdots,S(n_m)$ 中最多有 F_{u-1} 个小于或等于 $u-1$.

因此,$S(n_1)\geqslant u$.由此即得

$$f(m)\geqslant f(m-1)+u+1. \quad ①$$

易知,$f(1)=1$,$f(2)=3$.于是,

$$
\begin{aligned}
f(26)&=f(2)+\sum_{i=3}^{26}(f(i)-f(i-1))\\
&=f(2)+(f(3)-f(2))+\\
&\quad(f(5)-f(3))+(f(8)-f(5))+\\
&\quad(f(13)-f(8))+(f(21)-f(13))+\\
&\quad(f(26)-f(21))\\
&\geqslant 3+4\times1+5\times2+6\times3+7\times5+\\
&\quad 8\times8+9\times5(\text{由式①})\\
&=179.
\end{aligned}
$$

所以，$\sum_{i=1}^{26} S(n_i) \geqslant 179$.

另一方面，由斐波那契数的性质易知，恰有 8 个由数码 1 和 2 组成，且各位数码之和为 5 的正整数(设为 $a_1,a_2,\cdots,a_8$)，恰有 13 个由数码 1 和 2 组成，且各位数码之和为 6 的正整数(设为 $b_1,b_2,\cdots,b_{13}$). 在 $a_1,a_2,\cdots,a_8$末位后各添一个 2 组成 8 个新的数 $c_1,c_2,\cdots,c_8$，在 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 的末位后添上 1 和添上 2 各组成 5 个新的数 d_1、d_2、d_3、d_4、d_5 和 e_1、e_2、e_3、e_4、e_5.

考虑 $c_1,c_2,\cdots,c_8,d_1,d_2,\cdots,d_5,e_1,e_2,\cdots,e_5,b_6,b_7,\cdots,b_{13}$这 26 个数，它们均由数码 1 和 2 组成，各位数码之和的总和为

$$7\times8+7\times5+8\times5+6\times8=179,$$

且没有两个互相包含(事实上，若有 x 包含 y，考虑到它们的各位数码之和都是 6、7 或 8，且各位数码之和为 8 的数末位都是 2，则 x 应当恰比 y 多一个末位，而将 $d_1,d_2,\cdots,d_5$和 $e_1,e_2,\cdots,e_5$ 去掉末位后是 $b_1,b_2,\cdots,b_5$，将 $c_1,c_2,\cdots,c_8$去掉末位后是 $a_1,a_2,\cdots,a_8$，均不能与集合中其他数相同).

综上，$\sum_{i=1}^{26} S(n_i)$ 的最小值为 179.

4. 对 V 中顶点的一个排序 $\tau=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，定义 $f_\tau:V\to\mathbf{Z}$ 如下：$f_\tau(v)$等于排在 v 之前的与 v 相邻的顶点个数.

下面说明：f_τ是好的映射.

在计算 $\sum_{v\in V} f_\tau(v)$ 中，每条边恰被计算一次，这是因为若 $e\in E$，设 e 的两个端点为 u、$v\in V$，且 u 在τ中排在 v 之前，则 e 在$f_\tau(v)$中被计算了一次. 故

$$\sum_{v\in V} f_\tau(v)=|E|.$$

对任意非空子集 $A\subseteq V$(A 中顶点染为红色，其余顶点未染色)，取 $v\in A$ 是在排序τ下排最前的 A 中顶点. 则由 f_τ的定义及 v 的选取可知，$f_\tau(v)$不超过与 v 相邻的未染色顶点数. 这样，f_τ便是一个好的映射.

反之，若 $f:V\to\mathbf{Z}$ 是任意的一个好的映射，接下来说明：一定存在至少一个 V 中顶点的排序τ，使得 $f=f_\tau$.

首先，取 $A=V$(同上，A 中顶点染为红色，其余顶点未染色).

由条件(2)知，存在 $v\in A$，使得 $f(v)\leqslant 0$.

将这些点中任一个记为 v_1.

假设已取出了 $v_1,v_2,\cdots,v_k$，若 $k<n$，取 $A=V-\{v_1,v_2,\cdots,v_k\}$，由条件(2)知，存在顶点 $v\in A$，使得 $f(v)$ 不超过 $v_1,v_2,\cdots,v_k$中与 v 相邻的顶点个数. 将其中任一个这样的 v 记为 v_{k+1}. 如此递推地将 V 中顶点排序为 $\tau=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$.

由上面的构造知 $f(v)\leqslant f_\tau(v)$，对任意 $v\in V$成立.

由 $|E|=\sum_{v\in V} f(v)\leqslant\sum_{v\in V} f_\tau(v)=|E|$，故 $f(v)=f_\tau(v)$对任意 $v\in V$ 成立.

如此证明了对任何顶点的排序τ，f_τ是一个好的映射，而任意一个好的映射一定是某个 f_τ.

由于排序τ一共有 $n!$个，故 $m(G)\leqslant n!$(两个不同的排序可能得到相同的映射).

下面证明：$n\leqslant m(G)$.

先假设 G 是连通图，任取一个 $v\in V$，记为 v_1.

由连通性可选取 $v_2\in V-\{v_1\}$，使得 v_2 和 v_1相邻. 接着可选取 $v_3\in V-\{v_1,v_2\}$，使得 v_3与 v_1、v_2 中至少一个相邻. 继续下去，将 V 中顶点排序为 $\tau=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$，使得当

$2\leqslant k\leqslant n$时，v_k与排在它之前的至少一个顶点相邻. 于是，$f_\tau(v_1)=0$. 而对 $2\leqslant k\leqslant n$，有 $f_\tau(v_k)>0$.

由于 v_1可任意选取，这样便得到至少 n 个好的映射.

一般情况下，可以把 G 分成若干个连通分支 $G_1,G_2,\cdots,G_k$.

由于每个顶点都至少与另外一个顶点有边相连，故每个连通分支的顶点数都不少于2，设这些连通分支的顶点数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k\geqslant 2$. 对每个连通分支 $G_i(i=1,2,\cdots,k)$，至少有 n_i个好的映射.

易知，把每个 G_i上的好的映射拼起来得到的是 G 上好的映射. 故

$m(G)\geqslant n_1n_2\cdots n_k\geqslant n_1+n_2+\cdots+n_k=n$.

综上，$n\leqslant m(G)\leqslant n!$.

5. 分三步来证明结论.

(1)数列$\{a_n\}$中含无穷多个偶数.

假设数列$\{a_n\}$中只有有限个偶数. 则必存在整数 c，使得大于 c 的偶数均不出现. 这样，必存在正整数 m，使得当 $n\geqslant m$ 时，a_n均为大于 c 的奇数. 因而，必存在 $n_1>m$，使得 a_{n_1}为大于 c 的奇数，且 $a_{n_1+1}>a_{n_1}$(否则，从 a_{n_1}开始数列递减，矛盾).

设 p 是 a_{n_1}的最小质因子. 则 $p\geqslant 3$.

由$(a_{n_1+1}-a_{n_1},a_{n_1})=(a_{n_1+1},a_{n_1})>1$，

得 $a_{n_1+1}-a_{n_1}\geqslant p\Rightarrow a_{n_1+1}\geqslant a_{n_1}+p$.

另一方面，$a_{n_1}+p$ 是大于 c 的偶数，故 $a_{n_1}+p$ 在 a_{n_1}之前未出现.

又$(a_{n_1}+p,a_{n_1})>1$，故必有 $a_{n_1+1}=a_{n_1}+p$，这是一个大于 c 的偶数，矛盾.

(2)数列$\{a_n\}$中含所有偶数.

假设结论不成立，设 $2k$ 是不属于$\{a_n\}$的最小正偶数，$\{a_{n_i}\}$为$\{a_n\}$中所有偶数所成的子列. 由(1)的结论知，这是一个无穷数列.

由于$(a_{n_i},2k)>1(2k\notin\{a_n\})$，故由该数列的定义知 $a_{n_i+1}\leqslant 2k$.

但$\{a_{n_i+1}\}$是一个无穷整数列，矛盾.

所以，数列$\{a_n\}$中含所有偶数.

(3)数列$\{a_n\}$中含所有大于1的奇数.

假设结论不成立，设 $2k+1$ 为最小的大于1的奇数，使得 $2k+1\notin\{a_n\}$.

由(2)的结论知，数列$\{a_n\}$中包含一个无穷子列$\{a_{m_i}\}$，使得其中每一项均为 $2k+1$ 的偶数倍. 与(2)的证明同理 可知，$a_{m_i+1}\leqslant 2k+1(i=1,2,\cdots)$，矛盾.

综上，数列$\{a_n\}$含所有不小于2的整数.

6. 对任意 $a\in[0,1)$，定义 a 的生成数列$\{a_i\}_{i=0}^{n}$如下：$a_0=a$，对 $1\leqslant i\leqslant n$，

若 $a_{i-1}\geqslant 0$，则 $a_i=a_{i-1}-x_i$；

若 $a_{i-1}<0$，则 $a_i=a_{i-1}+x_i$.

记$f(a)=a_n$.

由数学归纳法易知，对任意的 $i(0\leqslant i\leqslant n)$，都有$|a_i|\leqslant 1$.

若存在一个 a，使得$f(a)=-a$，则考虑其生成数列 $a_0=a,a_1,\cdots,a_n=f(a)=-a$.

显然，$a_0,a_1,\cdots,a_n$满足(1)和(3).

又由 $a_0,a_1,\cdots,a_n$的递推式易知，它们满足(2). 从而，这样的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$符合要求. 故只要证明存在 $a\in[0,1)$，满足$f(a)=-a$.

若某个 $a\in[0,1)$的生成数列$\{a_i\}_{i=0}^{n}$中至少有一项为0，则称 a 为"间断数".

由于每个间断数必然能写成 $\sum\limits_{i=1}^{n}t_ix_i$ 的形式，其中，$t_i=-1,0,1$，因此，间断数的个数是有限的.

显然，0是间断数.

设所有的间断数从小到大排列为

$0=b_1<b_2<\cdots<b_m<1$.

先证明：对于任意的 $k(1\leqslant k\leqslant m-1)$，函数$f(a)$在区间$[b_k,b_{k+1})$上的解析式为

$f(a)=f(b_k)+(a-b_k)$.

考虑 b_k与 b_{k+1}以及它们生成的数列.

设 b_k的生成数列为 $q_0=b_k,q_1,q_2,\cdots,q_n$，$b_{k+1}$的生成数列为 $r_0=b_{k+1},r_1,r_2,\cdots,r_n$，且$\{r_i\}_{i=0}^{n}$中第一个等于0的项是 r_l.

构造数列$\{s_i\}_{i=0}^{n}$如下:

$s_0=r_0, s_1=r_1,$

……

$s_l=r_l=0, s_{l+1}=-r_{l+1},$

……

$s_n=-r_n,$

即在r_l之前的项与r_i相同，之后的项是r_i的相反数.

显然，$\{s_i\}_{i=0}^{n}$满足$s_0=b_{k+1}$.

对$1\leqslant i\leqslant n$，若$s_{i-1}>0$，则$s_i=s_{i-1}-x_i$；若$s_{i-1}\leqslant 0$，则$s_i=s_{i-1}+x_i$(即变为逢 0 则加).

下面用数学归纳法证明:

$q_is_i\geqslant 0$,且$s_i-q_i=b_{k+1}-b_k$.

当$i=0$时,结论显然成立.

若结论对$i-1$成立，则

$q_{i-1}s_{i-1}\geqslant 0$,且$s_{i-1}-q_{i-1}=b_{k+1}-b_k>0$.

这说明$q_{i-1}\geqslant 0, s_{i-1}>0$或$q_{i-1}<0, s_{i-1}\leqslant 0$.

若是前者，则$q_i=q_{i-1}-x_i, s_i=s_{i-1}-x_i$.

故$s_i-q_i=s_{i-1}-q_{i-1}=b_{k+1}-b_k$.

同理，若是后者，也有$s_i-q_i=b_{k+1}-b_k$.

如果$q_is_i<0$，则只能是$q_i<0<s_i$.

取$b'=b_{k+1}-s_i=b_k+(-q_i)\in(b_k,b_{k+1})$.

考虑由b'生成的数列$u_0=b', u_1,\cdots,u_n$.

由数学归纳法易知，对$0\leqslant j\leqslant i$,有

$s_j-u_j=s_0-u_0=s_i$

(q 和 s 在前面每一项都是同加或者同减,u 位于它们之间，递推式也必然与它们相同)，但这导致$u_i=s_i-s_i=0$,即b'是间断数，而这与b_k、b_{k+1}是两个连续的间断数矛盾.

故$q_is_i\geqslant 0$,即$q_is_i\geqslant 0$且$s_i-q_i=b_{k+1}-b_k$对任意$0\leqslant i\leqslant n$都成立.

由$f(b_k)=q_n, f(b_{k+1})=r_n=-s_n$,知

$f(b_k)+f(b_{k+1})=b_k-b_{k+1}$.

且由上面的证明知，对$b_k<b'<b_{k+1}$,b'的生成数列的递推公式应与$\{q_i\}_{i=0}^{n}$、$\{s_i\}_{i=0}^{n}$相同，即$f(b')=f(b_k)+(b'-b_k)$，即前述的结论得证.

最后,证明本题结论.

若存在k,使$f(b_k)=-b_k$,则结论已然成立；若存在k,使$f(b_k)=b_k$，则考虑b_k的生成数列，将其中第一个 0 之后的每项都取相反数，得到一新数列$z_0=b_k, z_1,\cdots,z_n=-b_k$满足题目中的三个条件，此时,结论也成立.

下设对每个k都有$|f(b_k)|\neq b_k$，分两种情形讨论.

【**情形 1**】若$|f(b_m)|<b_m$，则由$|f(b_1)|>b_1=0$,知存在一个k使得

$|f(b_k)|>b_k, |f(b_{k+1})|<b_{k+1}$.

由$f(b_k)+f(b_{k+1})=b_k-b_{k+1}$,得

$f(b_k)-b_k=-(f(b_{k+1})+b_{k+1})<0$.

故$f(b_k)<-b_k$.

由$f(b_k)+f(b_{k+1})=b_k-b_{k+1}$,得

$f(b_k)=b_k-b_{k+1}-f(b_{k+1})>b_k-2b_{k+1}$,

即 $b_k-2b_{k+1}<f(b_k)<-b_k$.

令$b'=\dfrac{b_k-f(b_k)}{2}$.则$b_k<b'<b_{k+1}$.

故$f(b')=f(b_k)+(b'-b_k)$

$=(b_k-2b')+(b'-b_k)=-b'$.

此时结论成立.

【**情形 2**】若$|f(b_m)|>b_m$,由于$(b_m,1)$中没有间断数，故仿照前面的推理易知,对$b'\in(b_m,1)$,b'的生成数列与b_m的生成数列应有相同的递推式.

故有$f(b')=f(b_m)+(b'-b_m)$.

由$|f|\leqslant 1$,得$f(b_m)\leqslant b_m$.

故$f(b_m)<-b_m$.

因此，$-1\leqslant f(b_m)<-b_m$.

令$b'=\dfrac{b_m-f(b_m)}{2}$.则

$$b_m=\frac{b_m-(-b_m)}{2}<b'$$

$$<\frac{b_m-(-1)}{2}=\frac{b_m+1}{2}<1$$

及 $f(b')=f(b_m)+(b'-b_m)$

$=(b_m-2b')+(b'-b_m)=-b'$.

故此时结论也成立.

(熊　斌　提供)