

# 智浪教育--普惠英才文库

## 2012 年高中数学竞赛试题

2012 年北京市高中数学初赛（高一） .....	2
2012 年北京市高中数学复赛（高一） .....	4
2012 年湖北省高中数学预赛（高一） .....	5
2012 年湖北省高中数学预赛（高二） .....	6
2012 年福建省高中数学预赛（高一） .....	7
2012 年河南省高中数学预赛（高一） .....	9
2012 年江苏高中数学竞赛（初赛） .....	11
2012 年上海市高中数学竞赛（新知杯） .....	12
2012 年四川省高中数学预赛 .....	13
2012 年陕西省高中数学预赛 .....	15
2012 年河北省高中数学预赛 .....	17
2012 年甘肃省高中数学预赛 .....	19
2012 年安徽省高中数学预赛 .....	20
2012 年山东省高中数学预赛 .....	21
2012 年浙江省高中数学预赛 .....	23

## 2012 年北京市高中数学初赛 (高一)

### 一、 选择题 (满分 36 分=6×6 分)

1.  $f(x) = \begin{cases} 2+x, & x > 0 \\ 5, & x = 0 \\ 2^x, & x < 0 \end{cases}$ , 则  $f(-2) + f(0) + f(1) + f(3)$  的值为

- (A) 8 (B) 11 (C)  $13\frac{1}{4}$  (D)  $15\frac{1}{2}$

2. 一个锐角的正弦和余弦恰是二次三项式  $ax^2 + bx + c$  的不同的两个根, 则  $a, b, c$  之间的关系是

- (A)  $b^2 = a^2 - 4ac$  (B)  $b^2 = a^2 + 4ac$   
(C)  $b^2 = a^2 - 2ac$  (D)  $b^2 = a^2 + 2ac$

3. 定义域为  $R$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = 3f(x)$ , 当  $x \in [0, 2]$  时,  $f(x) = x^2 - 2x$ , 则  $f(x)$  在  $x \in [-4, -2]$  上的最小值为

- (A)  $-\frac{1}{9}$  (B)  $-\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{9}$

4. 定义在正整数集  $Z^+$  上的函数  $f$ , 对于每一个  $n \in Z^+$  和无理数  $\pi = 3.14159265358 \dots$  满足

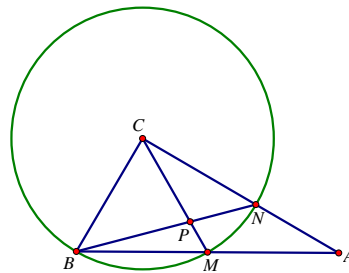
$$f(x) = \begin{cases} k^2 \text{ 的末位数字, (的小数点后第 } n \text{ 位数字 } k \neq 0 \text{ 时)} \\ 3. & \text{(的小数点后第 } n \text{ 位数字 } k = 0 \text{ 时)} \end{cases}$$

若函数的值域记为  $M$ , 则

- (A)  $1 \notin M$  (B)  $5 \notin M$  (C)  $6 \notin M$  (D)  $9 \notin M$

5. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 30^\circ, \angle C = 90^\circ$ , 以  $C$  为圆心,  $CB$  为半径作圆交  $AB$  边于  $M$ , 交  $AC$  边于  $N$ ,  $P$  为  $CM$  与  $BN$  的交点. 若  $AN = 1$ , 则  $S_{\triangle CPN} - S_{\triangle BPN}$  等于

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{8}$  (C)  $\frac{1}{4}$  (D)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$



6. 定义在  $(-1, 1)$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) - f(y) =$

$f\left(\frac{x-y}{1-xy}\right)$ , 且当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f(x) > 0$ . 若  $P = f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{5}\right), Q = f\left(\frac{1}{6}\right), R = f(0)$ ; 则  $P, Q, R$  的

大小关系为

- (A)  $R > P > Q$  (B)  $R > Q > P$  (C)  $P > R > Q$  (D)  $Q > P > R$

### 二、 填空题 (满分 64 分=8×8 分)

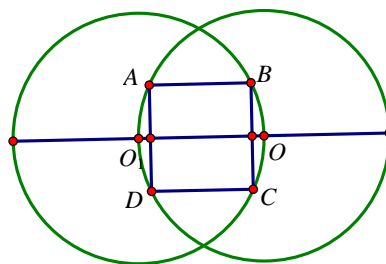
1. 求  $\log_2 \sin \frac{\pi}{3} + \log_2 \tan \frac{\pi}{6} + \log_2 \cos \frac{\pi}{4}$  的值.

2. 已知  $f(x)$  是四次多项式, 且满足  $f(i) = \frac{1}{i}, i =$

1, 2, 3, 4, 5, 求  $f(6)$  的值.

3. 若  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 求满足方程  $[n \lg 2] + [n \lg 5] = 2012$  的自然数  $n$  的值.

4. 如图, 半径为 1 的两个等圆相交, 在两圆的公共部分作一内接正方形  $ABCD$ . 如果圆心距  $O_1O_2$  等于 1, 试求正方形  $ABCD$  的面积.

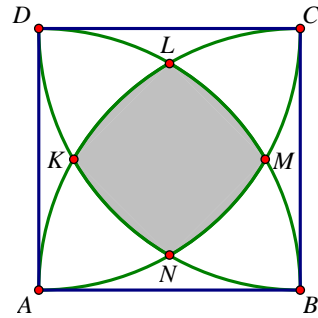


5. 求  $\frac{1^2}{1^2-1 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{3^2}{3^2-3 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{5^2}{5^2-5 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \frac{7^2}{7^2-7 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2} + \dots + \frac{2011^2}{2011^2-2011 \times 2012 + \frac{1}{2} \times 2012^2}$  的值.

6. 在单位正方形  $ABCD$  中, 分别以  $A, B, C, D$  四点为圆心, 以 1 为半径画弧, 如图所示, 交点为  $M, N, L, K$ , 求阴影部分的面积.

7. 已知二次函数  $f(x)$  满足  $f(-10) = 9, f(-6) = 7, f(2) = -9$ , 求  $f(100)$  的值.

8. 上底  $BC=2$ , 下底  $AD=3$  的梯形  $ABCD$  的对角线相交于点  $O$ , 彼此外切于点  $O$  的两个圆分别切直线  $AD$  于点  $A$  和点  $D$ , 交  $BC$  分别于点  $K, L$ , 求  $AK^2 + DL^2$  的值.

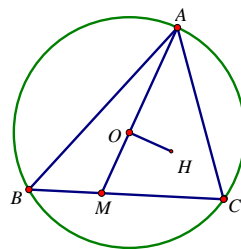


2012 年北京市高中数学复赛 (高一)

一、 填空题 (本题共 5 个小题, 每小题 8 分, 满分 40 分)

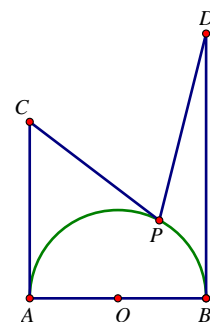
1. 函数  $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$  的图像与平行于  $x$  轴的直线  $y = c$  恰有一个交点, 则  $c$  能取到的所有值的乘积等于\_\_\_\_\_.

2. 如图, 锐角  $\triangle ABC$  内接于半径为  $R$  的  $\odot O$ ,  $H$  是  $\triangle ABC$  的垂心,  $AO$  的延长线与  $BC$  交于点  $M$ , 若  $OH \perp AO$ ,  $BC = 10$ ,  $OA = 6$ , 则  $OM =$ \_\_\_\_\_.



3. 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图像与  $x$  轴有两个交点  $A$  和  $B$ , 顶点为  $C$ , 如果  $\triangle ACB$  恰是直角三角形, 那么判别式  $\Delta$  的值是\_\_\_\_\_.

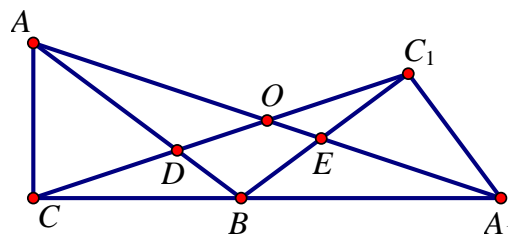
4. 如图, 半圆  $O$  的半径为 1,  $AC \perp AB$  于  $A$ ,  $BD \perp AB$  于  $B$ , 且  $AC = 2$ ,  $BD = 3$ ,  $P$  是半圆上任意一点, 则封闭图形  $ABDPC$  的面积的最大值为\_\_\_\_\_.



5. 和为 111 的两个自然数  $x$  和  $y$ , 使得等式  $\sqrt{x} \cos \frac{\pi y}{2x} + \sqrt{y} \sin \frac{\pi x}{2y} = 0$  成立, 满足这个条件的一组自然数  $(x, y)$  是\_\_\_\_\_.

二、 (本题满分 15 分)

如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = 3$ ,  $BC = 4$  以  $B$  为中心, 将  $\triangle ABC$  顺时针旋转, 使点  $A$  落在  $CB$  延长线上的点  $A_1$  处, 此时点  $C$  落在点  $C_1$  的位置. 连接  $AA_1$ ,  $CC_1$  相交于  $O$ ,  $CC_1$  交  $AB$  于  $D$ ,  $AA_1$  交  $BC_1$  于  $E$ , 求四边形  $BDOE$  的面积.



三、 (本题满分 15 分)

(1) 如果整数  $a$ ,  $b$  和  $c$  满足关系式  $a^2 + b^2 = 2c^2 - 2$ , 求证:  $144|abc$ .

(2) 试写出不定方程  $a^2 + b^2 = 2c^2 - 2$  的一组正整数解, 并对这组正整数解验证  $144|abc$ .

四、 (本题满分 15 分)

在边长都是正整数的三角形中, 周长是 2009 的三角形与周长是 2012 的三角形哪一种数量多? 说明理由.

五、 (本题满分 15 分)

在锐角  $\triangle ABC$  中,  $O$  是外心,  $I$  是内心, 连接  $AI$ ,  $BI$  和  $CI$  的直线交  $\triangle ABC$  的外接圆分别于点  $A_1$ ,  $B_1$  和  $C_1$ . 求证:  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1 B_1 C_1}} = \frac{2r}{R}$ .

(其中  $R$  是外接圆的半径,  $r$  是内切圆的半径)

# 智浪教育--普惠英才文库

## 2012年湖北省高中数学预赛(高一)

一、填空题(本题满分64分,每小题8分.直接将答案写在横线上.)

1. 已知集合  $A = \{x|x \leq a\}, B = \{x|x > b\}, a, b \in \mathbb{N}$ , 且  $A \cap B \cap \mathbb{N} = \{1\}$ , 则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.

2. 已知正项等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q \neq 1$ , 且  $a_2, a_4, a_5$  成等差数列, 则  $\frac{a_1+a_4+a_7}{a_3+a_6+a_9} =$ \_\_\_\_\_.

3. 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$  的值域为\_\_\_\_\_.

4. 已知  $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$ ,  $3(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2(\sin\beta + \cos\beta)^2 = 1$ , 则  $\cos 2(\alpha + \beta) =$ \_\_\_\_\_.

5. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1$  为正整数,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

如果  $a_1 + a_2 + a_3 = 29$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.

6. 在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边长  $a, b, c$  满足  $a + c = 2b$ , 且  $C = 2A$ , 则  $\sin A =$ \_\_\_\_\_.

7. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = BC = 2, AC = 3$ . 设  $O$  是  $\triangle ABC$  的内心, 若  $\vec{AO} = p\vec{AB} + q\vec{AC}$ , 则  $\frac{p}{q}$  的值为\_\_\_\_\_.

8. 设  $x_1, x_2, x_3$  是方程  $x^3 - x + 1 = 0$  的三个根, 则  $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$  的值为\_\_\_\_\_.

二、解答题(本大题满分56分,第9题16分,第10题20分,第11题20分)

9. 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足  $\sqrt{a_n a_{n+1} + a_n a_{n+2}} = 4\sqrt{a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2} + 3\sqrt{a_n a_{n+1}}$  且  $a_1 = 1, a_2 = 8$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

10. 已知正实数  $a, b$  满足  $a^2 + b^2 = 1$ , 且  $a^3 + b^3 + 1 = m(a + b + 1)^3$ , 求  $m$  的最小值.

11. 设  $f(x) = \log_a(x - 2a) + \log_a(x - 3a)$ , 其中  $a > 0$  且  $a \neq 1$ . 若在区间  $[a + 3, a + 4]$  上  $f(x) \leq 1$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

2012年湖北省高中数学预赛(高二)

一、 填空题(本题满分64分,每小题8分.直接将答案写在横线上.)

1. 函数  $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$  的值域为\_\_\_\_\_.

2. 已知  $3\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta = 1$ ,  $3(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - 2(\sin\beta + \cos\beta)^2 = 1$ , 则  $\cos 2(\alpha + \beta) =$ \_\_\_\_\_.

3. 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1$  为正整数,

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & a_n \text{ 为偶数} \\ 3a_n + 1, & a_n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

如果  $a_1 + a_2 + a_3 = 29$ , 则  $a_1 =$ \_\_\_\_\_.

4. 设集合  $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ ,  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  是  $S$  的子集, 且满足  $a_1 < a_2 < a_3$ ,  $a_3 - a_2 \leq 5$  那么满足条件的子集  $A$  的个数为\_\_\_\_\_.

5. 过原点  $O$  的直线  $l$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  交于  $M, N$  两点,  $P$  是椭圆  $C$  上异于  $M, N$  的任一点. 若直线  $PM, PN$  的斜率之积为  $-\frac{1}{3}$ , 则椭圆  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

6. 在  $\triangle ABC$  中,  $AB = BC = 2, AC = 3$ . 设  $O$  是  $\triangle ABC$  的内心, 若  $\vec{AO} = p\vec{AB} + q\vec{AC}$ , 则  $\frac{p}{q}$  的值为\_\_\_\_\_.

7. 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $AC = 1, B_1C = \sqrt{2}, AB_1 = p$ , 则长方体的体积最大时,  $p$  为\_\_\_\_\_.

8. 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 则  $\sum_{k=0}^{2012} \left[ \frac{2012+2^k}{2^{k+1}} \right] =$ \_\_\_\_\_.

二、解答题(本大题满分56分,第9题16分,第10题20分,第11题20分)

9. 已知正项数列  $\{a_n\}$  满足

$$\sqrt{a_n a_{n+1} + a_n a_{n+2}} = 4\sqrt{a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2} + 3\sqrt{a_n a_{n+1}}$$

且  $a_1 = 1, a_2 = 8$ , 求  $\{a_n\}$  的通项公式.

10. 已知正实数  $a, b$  满足  $a^2 + b^2 = 1$ , 且  $a^3 + b^3 + 1 = m(a + b + 1)^3$ , 求  $m$  的取值范围.

11. 已知点  $E(m, n)$  为抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  内一定点, 过  $E$  作斜率分别为  $k_1, k_2$  的两条直线交抛物线于  $A, B, C, D$ , 且  $M, N$  分别是线段  $AB, CD$  的中点.

(1) 当  $n = 0$  且  $k_1 \cdot k_2 = -1$  时, 求  $\triangle EMN$  的面积的最小值;

(2) 若  $k_1 + k_2 = \lambda (\lambda \neq 0, \lambda \text{ 为常数})$ , 证明: 直线  $MN$  过定点.

2012年福建省高中数学预赛(高一)

一. 选择题(每小题6分,共36分)

1. 已知集合  $A = \{x | 1 \leq x \leq 4\}$ ,  $B = \{y | y = \log_2 x, x \in A\}$ , 则  $A \cap B =$   
 (A)  $[0,2]$  (B)  $[0,1]$  (C)  $[1,2]$  (D)  $[2,4]$
2. 已知直线  $x = 2, x = 4$  与函数  $\log_4 x$  的图像交于  $A, B$  两点, 与函数  $y = \ln x$  的图像交于  $C, D$  两点, 则直线  $AB$  与  $CD$   
 (A) 相交, 且交点在第一象限  
 (B) 相交, 且交点在第二象限  
 (C) 相交, 且交点在第四象限  
 (D) 相交, 且交点在坐标原点
3. 已知集合  $A$ , 如果存在实数  $x_0$ , 使得对任意整数  $a$ , 都存在  $x \in A$ , 使得  $0 < |x - x_0| < a$ , 则称  $x_0$  为集合  $A$  的“聚点”. 给出下列四个集合: ①  $\{\frac{n}{n+1} | n \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}$  ②  $\{x | x \in \mathbb{R}, \text{且} x \neq 0\}$  ③  $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$  ④  $\mathbb{Z}$ . 其中以  $0$  为“聚点”的集合有  
 (A) ②③ (B) ①② (C) ①③ (D) ②④
4. 已知四面体  $ABCD$  四个顶点的坐标分别为  $A(2,0,0), B(0,2,0), C(0,0,1), D(0,0,0)$ , 则直线  $DC$  与平面  $ABC$  所成角的正弦值为  
 (A)  $\frac{1}{3}$  (B)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  (C)  $\frac{2}{3}$  (D)  $\frac{\sqrt{6}}{3}$
5. 已知  $x, y$  是两个不相等的正数, 且满足条件  $x^3 - y^3 = x^2 - y^2$ , 则  $[9xy]$  的最大值为 (符号  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数)  
 (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1
6. 函数  $f(x) = \sqrt{2x-6} + \sqrt{18-3x}$  的最大值为  
 (A)  $\sqrt{10}$  (B)  $2\sqrt{3}$  (C)  $\sqrt{14}$  (D)  $\sqrt{15}$

二. 填空题(每小题6分,共36分)

7. 已知过点  $A(3, -2)$  的直线  $l$  交  $x$  轴正半轴于点  $B$ , 交直线  $l_1: x - 2y = 0$  于点  $C$ , 且  $|AB| = 2|BC|$ , 则直线  $l$  在  $y$  轴上的截距为\_\_\_\_\_.
8. 若关于  $x$  的不等式  $2^x + 3^x - k \cdot 6^x \geq 0$  在区间  $[1,2]$  上有解, 则  $k$  的最大值为\_\_\_\_\_.
9. 在三棱锥  $D-ABC$  中, 已知  $AB = BC = AD = \sqrt{2}, BD = AC = 2, BC \perp AD$ , 则三棱锥  $D-ABC$  外接球的表面积为\_\_\_\_\_.
10. 三个半径都是  $2$  的圆, 其圆心分别为  $A(1,1), B(3,6), C(7,12)$ , 直线  $l$  斜率为  $k$ , 且过点  $(1,1)$ . 若  $\odot A, \odot B, \odot C$  位于直线  $l$  某一侧的部分的面积和等于位于直线  $l$  另一侧的部分的面积和. 则  $k =$ \_\_\_\_\_.
11. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - 1 & x \leq 0 \\ f(x-1) & x > 0 \end{cases}$ , 则方程  $f(x) = x$  在区间  $(0,10)$  内所有实根的和为\_\_\_\_\_.
12. 符号  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 符号  $\{x\}$  表示  $x$  的小数部分即  $\{x\} = x - [x]$ . 若实数  $x$  满足  $[2x] + [4x] + [6x] + [8x] = 2012$ , 则  $\{x\}$  的最小值为\_\_\_\_\_.

三. 解答题(第13、14、15、16题每题16分,第17题14分,满分78分)

13. 已知  $f(x) = x^2 + 2px - 2$  在区间  $[-2, 0]$  上的最小值为  $g(p)$ .

(1) 求  $g(p)$  的表达式;

(2) 当  $g(p) = -3$  时, 求  $f(x)$  在区间  $[-2, 0]$  上的最大值.

14. 已知圆  $C: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = m$ , 点  $A(4, 6), B(s, t)$ ,

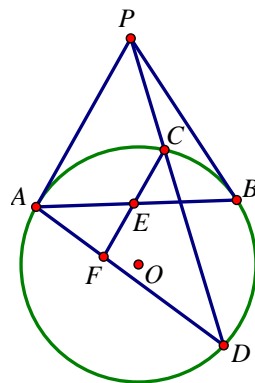
(1) 若  $3s - 4t = -12$ , 且直线  $AB$  被圆  $C$  截得的弦长为 4, 求  $m$  的值;

(2) 若  $s, t$  为正整数, 且圆  $C$  上任意一点到点  $A$  的距离与到点  $B$  的距离之比为定值  $\lambda (\lambda > 1)$ , 求  $m$  的值.

15. 对任意的正整数  $n$ , 以及任意  $n$  个互不相同的正整数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 若不等式

$$\left(\frac{1}{a_1}\right)^\lambda + \left(\frac{1}{a_2}\right)^\lambda + \dots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^\lambda < 2 \text{ 恒成立. 求整数 } \lambda \text{ 的最小值.}$$

16. 如图,  $PA, PB$  为圆  $O$  的两条切线,  $A, B$  为切点,  $PCD$  为圆  $O$  的割线,  $C, D$  为割线与圆  $O$  的交点. 过  $C$  作直线交  $AB$  于点  $E$ , 交  $AD$  于点  $F$ , 且  $CE = EF$ . 求证:  $CE \parallel PA$



17. 在直角坐标平面  $xOy$  内有 2012 个点, 记这 2012 个点组成的点集  $P$  中任何两点的连线与坐标轴既不平行也不重合. 证明: 在点集  $P$  中, 存在  $E, G$  两点, 使得以  $EG$  为对角线, 且边与坐标轴平行或重合的矩形  $EFGH$  内 (不包括边界) 至少含有点集  $P$  中的 402 个点.



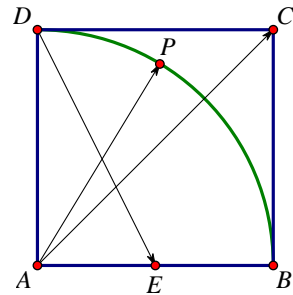
## 2012 年河南省高中数学预赛（高一）

一. 填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分）

1. 已知非空集合  $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2012\}$ ，且满足：当  $a \in A$  时，有  $2013 - a \in A$ ，则符合题意的集合  $A$  共有\_\_\_\_\_.
2. 已知  $P(a, b)$  关于直线  $l$  的对称点为  $P(b + 1, a - 1)$ ，则圆  $C: x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$  关于直线  $l$  对称的圆  $C$  的标准方程为\_\_\_\_\_.
3. 已知分段函数  $f(x) = \begin{cases} 3^{-x}, & x \leq 0 \\ f(x-1), & x > 0 \end{cases}$ ，若  $f(x) = x + a$  有且仅有三个实数解，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
4. 设  $a, b$  分别是方程  $\log_{513} x + x - 2012 = 0$  和  $513^x + x - 2012 = 0$  的根，则  $a + b =$ \_\_\_\_\_.
5. 已知四面体  $A - BCD$  中， $AB = CD = 2\sqrt{13}, BC = AD = \sqrt{41}, AC = BD = \sqrt{61}$ ，则该四面体的体积是\_\_\_\_\_.
6. 定义  $A * B = \begin{cases} C(A) - C(B), & C(A) \geq C(B) \\ C(B) - C(A), & C(A) < C(B) \end{cases}$ ，已知  $A = \{1, 2\}$ ， $B = \{x \mid |x^2 + ax + 1| = 0\}$  其中  $C(A)$  表示集合  $A$  中的元素的个数，若  $A * B = 1$ ，由  $a$  的所有可能值构成的集合是  $S$ ，那么  $C(S) =$ \_\_\_\_\_.
7. 已知正三棱锥  $P - ABC$  的侧棱长为  $\sqrt{3} + 1$ ，底面边长为  $\sqrt{2}$ ， $Q$  是侧棱  $PA$  的中点，一条折线从点  $A$  出发，绕侧面一周到点  $Q$ ，则这条折线长度的最小值是\_\_\_\_\_.
8. 已知函数  $y = f(x)$  的定义域是  $D$ ，如对于任意的  $x_1, x_2 \in D$ ，当  $x_1 < x_2$  时，都有  $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称  $f(x)$  函数在  $D$  上为非减函数，设函数  $y = f(x)$  在  $[0, 1]$  上为非减函数，满足条件：①  $f(0) = 0$ ; ②  $f\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{1}{2}f(x)$  ③  $f(1-x) = 1 - f(x)$ ，则  $f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{2012}\right) =$ \_\_\_\_\_.
9. （选做题）

（必修 3）在 6 个产品中有 4 个正品和 2 个次品，现每次取出一个作检查（检查完后不放回），直到 2 个次品都找到为止，则恰好经过 4 次检查将 2 个次品全部找到的概率是\_\_\_\_\_.

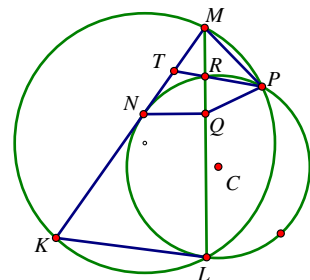
（必修 4）如图所示，在正方形  $ABCD$  中， $E$  为  $AB$  的中点， $P$  是以  $A$  为圆心， $AB$  为半径的圆弧  $BD$  上的任意一点，设向量  $\vec{AC} = \lambda \vec{DE} + \mu \vec{AP}$  ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ )，则  $\lambda + \mu$  的最小值是\_\_\_\_\_.



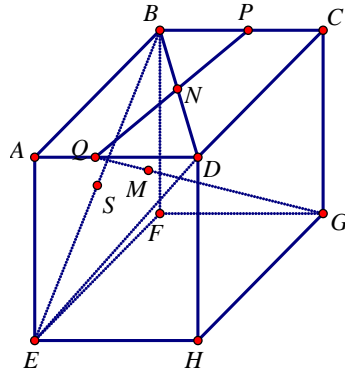
10. 已知  $m \in \mathbb{N}$ ，且函数  $f(x) = 2x - m\sqrt{10-x} - m + 10$  存在整数零点，则符合题意的一切  $m$  的取值构成的集合是\_\_\_\_\_.

二. （本题满分 20 分）如图所示， $KL$  和  $KN$  是  $\odot C$  的两条切线，其中  $L, N$  为切点. 在  $KN$  的延长线上取一点  $M$ ， $\triangle KML$  的外接圆与  $\odot C$  的另一交点为  $P$ ， $ML$  和  $\odot C$  的另一交点为  $R$ ，延长  $PR$  交  $MK$  于  $T$ . 过  $N$  作  $NQ \perp ML$  于  $Q$ ，连接  $QP$ .

证明：(1)  $\triangle MTR \sim \triangle PTM$  (2)  $\angle MPQ = 2\angle KML$ .



三. (本题满分 20 分) 如图所示, 已知单位正方体  $ABCD - EFGH$  的棱长  $AD$  和  $BC$  上分别有动点  $Q, P$ . 若直线  $PQ$  和  $BD$  交于点  $N$ , 直线  $GQ$  和平面  $BDE$  交于点  $M$ ,  $BE$  的中点是  $S$ , 设  $AQ = x (0 \leq x \leq 1)$ ,  $MN = y$ . (1) 求证:  $D, M, S$  三点共线; (2) 求  $y$  的最小值关于  $x$  的解析式.



四. (本题满分 20 分) (必修 3) 函数  $f(x) = \log_2(4 + \sqrt{16 - x^2})$ . (1) 求函数的值域; (2) 若在区间  $[-4, 1]$  上随机取一个数  $a$ , 求方程  $f^2(x) + af(x) + 1 = 0$  有实数根的概率.

(必修 4) 已知对于任意的  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $\sin x < x$  恒成立,

利用此结论证明: (1) 存在唯一的实数对  $(c, d)$ , 其中  $c, d \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 使  $\sin(\cos c) = c, \cos(\sin d) = d$  成立; (2) 在 (1) 的条件下证明:  $c < d$ .

五. (本题满分 20 分) 函数  $\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}, f(x) = x^3 + x - \log_2(\sqrt{x^2 + 1} - x)$ . (1)

求证: 函数  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数; (2) 对于任意实数  $a, b (a + b \neq 0)$ , 求  $\text{sgn}(\frac{f(a)+f(b)}{a^3+b^3})$  的值.

## 2012 年江苏高中数学竞赛（初赛）

一、 填空题（本题满分 70 分， 每小题 7 分）

1. 当  $x \in [-3,3]$  时， 函数  $f(x) = |x^3 - 3x|$  的最大值为\_\_\_\_\_.
2. 在  $\triangle ABC$  中， 已知  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 12, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$ ， 则  $AC =$ \_\_\_\_\_.
3. 从集合  $\{3,4,5,6,7,8\}$  中随机选取 3 个不同的数， 这 3 个数可以构成等差数列的概率是\_\_\_\_\_.
4. 已知  $a$  为实数， 方程  $x^2 + (4+i)x + 4+ai = 0$  的一个实数根是  $b$  ( $i$  是虚数单位)， 则  $|a+bi|$  的值为\_\_\_\_\_.
5. 在平面直角坐标系  $xOy$  中， 双曲线  $C: \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$  的右焦点为  $F$ ， 一条过原点  $O$  且倾斜角为锐角的直线  $l$  与双曲线  $C$  交于  $A, B$  两点. 若  $\triangle FAB$  的面积为  $8\sqrt{3}$ ， 则直线  $l$  的斜率为\_\_\_\_\_.
6. 设  $a$  为正实数，  $k = a^{\lg a}$ ， 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.
7. 在四面体  $ABCD$  中，  $AB = AC = AD = DB = 5, BC = 3, CD = 4$ ， 该四面体的体积为\_\_\_\_\_.
8. 已知等差数列  $\{a_n\}$  和等比数列  $\{b_n\}$  满足:  $a_1 + b_1 = 3, a_2 + b_2 = 7, a_3 + b_3 = 15, a_4 + b_4 = 35$ ， 则  $a_n + b_n =$ \_\_\_\_\_ ( $n \in N^*$ )
9. 将 27,37,47,48,55,71,75 这 7 个数排成一列， 使任意 4 个数的和为 3 的倍数， 则这样的排法有\_\_\_\_\_种.
10. 三角形的周长为 31， 三边  $a, b, c$  均为整数， 且  $a \leq b \leq c$ ， 则满足条件的三元数组的个数为\_\_\_\_\_.

二、 解答题（本题满分 80 分， 每小题 20 分）

11. 在  $\triangle ABC$  中， 角  $A, B, C$  对应的边分别为  $a, b, c$ ， 证明：

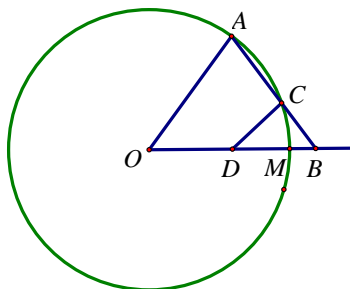
(1)  $b \cos C + c \cos B = a$ ;

(2)  $\frac{\cos A + \cos B}{a+b} = \frac{2 \sin^2 \frac{C}{2}}{c}$ .

12. 已知  $a, b$  为实数，  $a > 2$  函数  $f(x) = \left| \ln x - \frac{a}{x} \right| + b (x > 0)$ . 若  $f(1) = e + 1, f(2) = \frac{e}{2} - \ln 2 + 1$ .

- (1) 求实数  $a, b$ ;
- (2) 求函数  $f(x)$  的单调区间;
- (3) 若实数  $c, d$  满足  $c > d, cd = 1$ ， 求证:  $f(c) < f(d)$ .

13. 如图， 半径为 1 的圆  $O$  上有一定点  $M, A$  为圆  $O$  上的动点. 在射线  $OM$  上有一动点  $B, AB = 1, OB > 1$ . 线段  $AB$  交圆  $O$  于另一点  $C, D$  为线段  $OB$  的中点. 求线段  $CD$  长的取值范围.



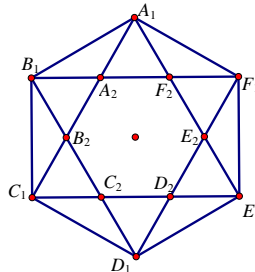
14. 设  $a, b, c, d$  是正整数，  $a, b$  是方程  $x^2 - (d-c)x + cd = 0$  的两个根. 证明: 存在边长是整数且面积为  $ab$  的直角三角形.

2012 年上海市高中数学竞赛（新知杯）

【说明】解答本试卷不得使用计算器

一、填空题（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

1. 如图，正六边形  $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  的边长为 1，它的 6 条对角线又围成一个正六边形  $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ，如此继续下去，则所有这些六边形的面积和是\_\_\_\_\_.

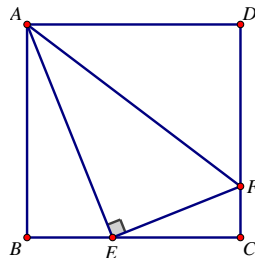


2. 已知正整数  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  满足:  $\frac{a_j}{a_i} > \frac{3}{2}, 1 \leq i < j \leq 10$ , 则  $a_{10}$  的最小可能值是\_\_\_\_\_.

3. 若  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \frac{17}{6}, \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = -\frac{4}{5}, \cot \alpha \cot \beta + \cot \beta \cot \gamma + \cot \gamma \cot \alpha = -\frac{17}{5}$ , 则  $\tan(\alpha + \beta + \gamma) =$ \_\_\_\_\_.

4. 已知关于  $x$  的方程  $\lg(kx) = 2\lg(x+1)$  仅有一个实数解，则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

5. 如图， $\triangle AEF$  是边长为  $x$  的正方形  $ABCD$  的内接三角形，已知  $\angle AEF = 90^\circ, AE = a, EF = b, a > b$ , 则  $x =$ \_\_\_\_\_.



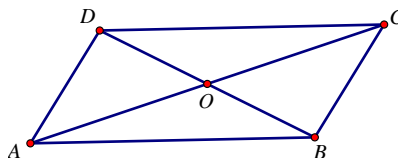
6. 方程  $2^m \cdot 3^n - 3^{n+1} + 2^m = 13$  的非负整数解  $(m, n) =$ \_\_\_\_\_.

7. 一个口袋里有 5 个大小一样的小球，其中两个是红色的，两个是白色的，一个是黑色的，依次从中摸出 5 个小球，相邻两个小球的顏色均不相同的概率是\_\_\_\_\_。（用数字作答）

8. 数列  $\{a_n\}$  定义如下:  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \frac{2(n+1)}{n+2} a_{n+1} - \frac{n}{n+2} a_n, n = 1, 2, \dots$ . 若  $a_m > 2 + \frac{2011}{2012}$ , 则正整数  $m$  的最小值为\_\_\_\_\_.

二、解答题

9. (本题满分 14 分) 如图, 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AB = x, BC = 1$ , 对角线  $AC$  与  $BD$  的夹角  $\angle BOC = 45^\circ$ , 记直线  $AB$  与  $CD$  的距离为  $h(x)$ . 求  $h(x)$  的表达式, 并写出  $x$  的取值范围.



10. (本题满分 14 分) 给定实数  $a > 1$ , 求函数  $f(x) = \frac{(a+\sin x)(4+\sin x)}{1+\sin x}$  的最小值.

11. (本题满分 16 分) 正实数  $x, y, z$  满足  $9xyz + xy + yz + zx = 4$ ; 求证: (1)  $xy + yz + zx \geq \frac{4}{3}$ ; (2)  $x + y + z \geq 2$ .

12. (本题满分 16 分) 给定整数  $n (\geq 3)$ , 记  $f(n)$  为集合  $\{1, 2, \dots, 2^n - 1\}$  的满足如下两个条件的子集  $A$  的元素个数的最小值: ①  $1 \in A, 2^n - 1 \in A$ ; ②  $A$  中的元素 (除 1 外) 均为  $A$  中的另两个 (可以相同) 元素的和.

- (1) 求  $f(3)$  的值;
- (2) 求证:  $f(100) \leq 108$ .

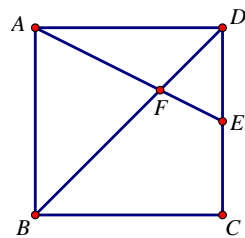
## 2012年四川省高中数学预赛

### 一、单项选择题 (本大题共6个小题, 每小题5分, 共30分)

- 1、设集合  $S = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\}$ ,  $T = \{x | |x + 2| \leq 3\}$ , 则  $S \cap T =$   
 A、 $\{x | -5 \leq x < -1\}$  B、 $\{x | -5 \leq x < 5\}$   
 C、 $\{x | -1 \leq x \leq 1\}$  D、 $\{x | 1 \leq x < 5\}$
- 2、正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中  $BC_1$  与截面  $BB_1D_1D$  所成的角是  
 A、 $\frac{\pi}{6}$  B、 $\frac{\pi}{4}$  C、 $\frac{\pi}{3}$  D、 $\frac{\pi}{2}$
- 3、已知  $f(x) = x^2 - 2x + 3, g(x) = kx - 1$ , 则“ $|k| \leq 2$ ”是“ $f(x) \geq g(x)$ 在  $R$  上恒成立”的  
 A、充分但不必要条件 B、必要但不充分条件  
 C、充要条件 D、既不充分也不必要条件
- 4、设正三角形  $\Delta_1$  的面积为  $S_1$ , 作  $\Delta_1$  的内切圆, 再作内切圆的内接正三角形, 设为  $\Delta_2$ , 面积为  $S_2$ , 如此下去作一系列的正三角形  $\Delta_3, \Delta_4, \dots$ , 其面积相应为  $S_3, S_4, \dots$ , 设  $S_1 = 1, T_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ , 则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n =$   
 A、 $\frac{6}{5}$  B、 $\frac{4}{3}$  C、 $\frac{3}{2}$  D、2
- 5、设抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 顶点为  $O, M$  是抛物线上的动点, 则  $\frac{|MO|}{|MF|}$  的最大值为  
 A、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$  B、 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$  C、 $\frac{4}{3}$  D、 $\sqrt{3}$
- 6、设倒圆锥形容器的轴截面为一个等边三角形, 在此容器内注入水, 并放入半径为  $r$  的一个实心球, 此时球与容器壁及水面恰好都相切, 则取出球后水面高为 ( )  
 A、 $r$  B、 $2r$  C、 $\sqrt[3]{12r}$  D、 $\sqrt[3]{15r}$

### 二、填空题 (本大题共6个小题, 每小题5分, 共30分)

7、如图, 正方形  $ABCD$  的边长为3,  $E$  为  $DC$  的中点,  $AE$  与  $BD$  相交于  $F$ , 则  $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{DE}$  的值是\_\_\_\_\_.



8、 $(x^2 + x - \frac{1}{x})^6$  的展开式中的常数项是\_\_\_\_\_。(用具体数字作答)

9、设等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足  $S_n = \frac{(a_n + 1)^2}{4}$ , 则  $S_{20}$  的值为\_\_\_\_\_.

10、不超过2012的只有三个正因数的正整数个数为\_\_\_\_\_.

11、已知锐角  $A, B$  满足  $\tan(A + B) = 2 \tan A$ , 则  $\tan B$  的最大值是\_\_\_\_\_.

12、从1,2,3,4,5组成的数字不重复的五位数中, 任取一个五位数  $\overline{abcde}$ , 满足条件“ $a < b > c < d > e$ ”的概率是\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (本大题共4个小题, 每小题20分, 共80分)

13、设函数 $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 1$ ,

(I) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的最大值与最小值;

(II) 若实数 $a, b, c$ 使得 $af(x) + bf(x-c) = 1$ 对任意 $x \in R$ 恒成立, 求 $\frac{bc\cos c}{a}$ 的值.

14、已知 $a, b, c \in R^+$ , 满足 $abc(a+b+c) = 1$ ,

(I) 求 $S = (a+c)(b+c)$ 的最小值;

(II) 当 $S$ 取最小值时, 求 $c$ 的最大值.

15、直线 $y = kx + 1$ 与双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左支交于 $A, B$ 两点, 直线 $l$ 经过点 $(-2, 0)$ 和 $AB$ 的中点, 求直线 $l$ 在 $y$ 轴的截距 $b$ 的取值范围.

16、设函数 $f_n(x) = x^n(1-x)^2$ 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上的最大值为 $a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ .

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 求证: 对任何正整数 $n (n \geq 2)$ , 都有 $a_n \leq \frac{1}{(n+2)^2}$ 成立;

(III) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项和为 $S_n$ , 求证: 对任意正整数 $n$ , 都有 $S_n < \frac{7}{16}$ 成立.

2012年陕西省高中数学预赛

第一试

一、 填空题（每小题8分，共80分）

1. 已知集合  $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ , 若非空集合  $A$  满足:  $A$  中各元素都加4后构成  $M$  的一个子集,  $A$  中各元素都减4后也构成  $M$  的一个子集, 则  $A =$ \_\_\_\_\_.

2. 已知两条直线  $l_1: y = 2, l_2: y = 4$ , 设函数  $y = 3^x$  的图像与  $l_1, l_2$  分别交于点  $A, B$ , 函数  $y = 5^x$  的图像与  $l_1, l_2$  分别交于点  $C, D$ , 则直线  $AB$  与  $CD$  的交点坐标是\_\_\_\_\_.

3. 对于正整数  $n$ , 若  $n = p * q (p \geq q, p, q \in N_+)$ , 当  $p - q$  最小时, 我们称  $p * q$  为  $n$  的“最佳分解”, 并规定  $f(n) = \frac{q}{p}$ . 例如, 12 的分解有  $12 \times 1, 6 \times 2, 4 \times 3$ , 其中  $4 \times 3$  为 12 的最佳分解, 则  $f(12) = \frac{3}{4}$ , 关于  $f(n)$ , 有下列四个判断:

解, 则  $f(12) = \frac{3}{4}$ , 关于  $f(n)$ , 有下列四个判断:

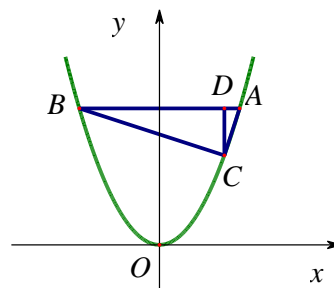
①  $f(4) = 0$ ; ②  $f(7) = \frac{1}{7}$ ; ③  $f(24) = \frac{3}{8}$ ; ④  $f(2012) = \frac{4}{503}$

其中, 所有正确判断的序号是\_\_\_\_\_.

4. 已知  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $\angle A = 90^\circ$ , 且  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \overrightarrow{AC} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ , 若  $\mathbf{a} = (\cos\theta, \sin\theta) (\theta \in R)$ , 则  $\triangle ABC$  的面积等于\_\_\_\_\_.

5. 在正四面体  $ABCD$  中,  $AO \perp$  平面  $BCD$ , 垂足为  $O$ . 设  $M$  是线段  $AO$  上一点, 且满足  $\angle BMC = 90^\circ$ , 则  $\frac{AM}{MO} =$ \_\_\_\_\_.

6. 如图,  $Rt\triangle ABC$  的三个顶点都在给定的抛物线  $x^2 = 2py (p > 0)$  上, 且斜边  $AB \parallel x$  轴, 则斜边上的高  $|CD| =$ \_\_\_\_\_.



7. 某项游戏活动的奖励分成一、二、三等奖 (参与游戏活动的都有奖), 且相应获奖的概率是以  $a$  为首项、2 为公比的等比数列, 相应获得的奖金是以 700 元为首项、-140 为公差的等差数列. 则参与这项游戏活动获得奖金的期望是\_\_\_\_\_元.

8. 设  $p, q$  是两个不同的质数, 则  $p^{q-1} + q^{p-1}$  被  $p \cdot q$  除的余数是\_\_\_\_\_.

9. 定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(1) = 1$ , 且对任意的  $x \in R$ , 都有  $f'(x) < \frac{1}{2}$ . 则不等式

$f(\log_2 x) > \frac{\log_2 x + 1}{2}$  的解集为\_\_\_\_\_.

10. 从公路旁的材料工地沿笔直公路向同一方向运送电线杆到 500m 以外的公路边埋栽, 在 500m 处栽一根, 然后每间隔 50m 在公路边栽一根. 已知运输车辆一次最多只能运 3 根, 要完成运载 20 根电线杆的任务, 并返回材料工地, 则运输车总的行程最小为\_\_\_\_\_m.

第二试

一. (本题满分 20 分)

在  $\triangle ABC$  中, 已知  $AB = 2, AC = 1$ , 且  $\cos 2A + 2 \sin^2 \frac{B+C}{2} = 1$ .

- (1) 求角  $A$  的大小和边  $BC$  的长;
- (2) 若点  $P$  在  $\triangle ABC$  内运动 (含边界), 且点  $P$  到三边距离之和为  $d$ . 设点  $P$  到边  $BC, CA$  的距离分别为  $x, y$ , 试用  $x, y$  表示  $d$ , 并求  $d$  的取值范围.

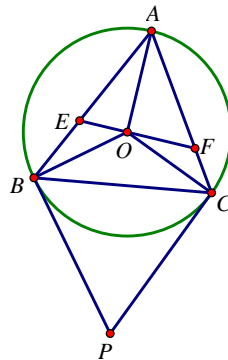
二. (本题满分 20 分)

在平面直角坐标系中, 以点  $C(t, \frac{2}{t})$  为圆心的圆经过坐标原点  $O$ , 且分别与  $x$  轴、 $y$  轴交于点  $A, B$  (不同于原点  $O$ ).

- (1) 求证:  $\triangle AOB$  的面积  $S$  为定值;
- (2) 设直线  $l: y = -2x + 4$  与圆  $C$  相交于不同的两点  $M, N$ , 且  $|OM| = |ON|$ , 求圆  $C$  的标准方程.

三. (本题满分 20 分)

如图, 锐角  $\triangle ABC$  内接于圆  $O$ , 过圆心  $O$  且垂直于半径  $OA$  的直线分别交边  $AB, AC$  于点  $E, F$ . 设圆  $O$  在  $B, C$  两点处的切线相交于点  $P$ , 求证: 直线  $AP$  平分线段  $EF$ .



四. (本题满分 30 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{1}{2}, a_n = 2a_n a_{n+1} + 3a_{n+1} (n \in N^*)$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;
- (2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_n = 1 + \frac{1}{a_n} (n \in N^*)$ , 且对任意正整数

$n (n \geq 2)$ , 不等式  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n + \log_3 b_k} > \frac{m}{24}$  恒成立, 求整数  $m$  的最大值.

五. (本题满分 30 分)

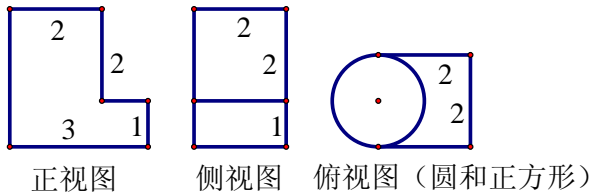
对于任意的正整数  $n$ , 证明:  $\frac{1}{3-2} + \frac{1}{3^2+2^2} + \frac{1}{3^3-2^3} + \dots + \frac{1}{3^n+(-2)^n} < \frac{7}{6}$ .



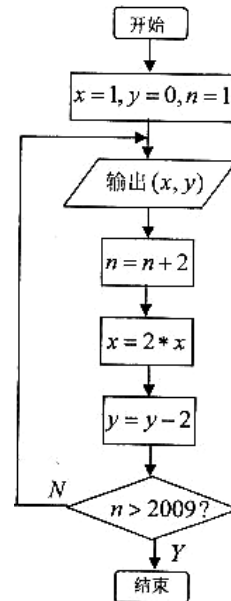
## 2012年河北省高中数学预赛

一、选择题（本大题共有 10 小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题 5 分，共 50 分）

1. 已知  $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ，则  $\sqrt{1 - \sin 2\theta} - \sqrt{1 + \sin 2\theta}$  可化简为 ( )  
 A.  $2 \sin \theta$     B.  $-2 \sin \theta$     C.  $-2 \cos \theta$     D.  $2 \cos \theta$
2. 如果复数  $(a + 2i)(1 + i)$  的模为 4，则实数  $a$  的值为 ( )  
 A. 2    B.  $2\sqrt{2}$     C.  $\pm 2$     D.  $\pm 2\sqrt{2}$
3. 设  $A, B$  为两个互不相同的集合，命题  $p: x \in A \cap B$ ，命题  $q: x \in A$  或  $x \in B$ ，则  $p$  是  $q$  的 ( )  
 A. 充分且必要条件    B. 充分非必要条件  
 C. 必要非充分条件    D. 非充分且非必要条件
4. 过椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的右焦点  $F_2$  作倾斜角为  $45^\circ$  弦  $AB$ ，则  $|AB|$  为 ( )  
 A.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$     B.  $\frac{4\sqrt{6}}{3}$     C.  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$     D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
5. 函数  $f(x) = \begin{cases} 1 - 5^{-x} & x \geq 0 \\ 5^x - 1 & x < 0 \end{cases}$ ，则该函数为 ( )  
 A. 单调增加函数、奇函数    B. 单调递减函数、偶函数  
 C. 单调增加函数、偶函数    D. 单调递减函数、奇函数
6. 设有一立体的三视图如下，则该立体体积为 ( )



- A.  $4 + \frac{5\pi}{2}$     B.  $4 + \frac{3\pi}{2}$     C.  $4 + \frac{\pi}{2}$     D.  $4 + \pi$
7. 某程序框图如右图所示，现将输出  $(x, y)$  值依次记为： $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n), \dots$  若程序运行中输出的一个数组是  $(x, -10)$ ，则数组中的  $x =$  ( )  
 A. 64    B. 32  
 C. 16    D. 8
8. 在平面区域  $\{(x, y) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$  上恒有  $ax - 2by \leq 2$ ，则动点  $P(a, b)$  所形成平面区域的面积为 ( )  
 A. 4    B. 8    C. 16    D. 32
9. 已知函数  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - m$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  上有两个零点，则  $m$  的取值范围为 ( )  
 A.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$     B.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$     C.  $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$     D.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$



# 智浪教育--普惠英才文库

10. 已知  $a \in [-1, 1]$ , 则  $x^2 + (a - 4)x + 4 - 2a > 0$  的解为 ( )

A.  $x > 3$  或  $x < 2$     B.  $x > 2$  或  $x < 1$

C.  $x > 3$  或  $x < 1$     D.  $1 < x < 3$

二、填空题 (本大题共有 7 小题, 将正确答案填入题干后的横线上, 每空 7 分, 共 49 分)

11. 函数  $f(x) = 2\sin\frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos x$  的最小正周期为\_\_\_\_\_.

12. 已知等差数列  $\{a_n\}$  前 15 项的和  $S_{15} = 30$ , 则  $a_1 + a_8 + a_{15} =$ \_\_\_\_\_.

13. 向量  $\vec{a} = (1, \sin\theta)$ ,  $\vec{b} = (\cos\theta, \sqrt{3})$ ,  $\theta \in R$ , 则  $|\vec{a} - \vec{b}|$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

14. 直三棱柱  $ABC - A_1B_1C_1$ , 底面  $\triangle ABC$  是正三角形,  $P, E$  分别为  $BB_1, CC_1$  上的动点 (含端点),  $D$  为  $BC$  边上的中点, 且  $PD \perp PE$ . 则直线  $AP, PE$  的夹角为\_\_\_\_\_.

15. 设  $x, y$  为实数, 则  $\max_{5x^2 + 4y^2 = 10x} (x^2 + y^2) =$ \_\_\_\_\_.

16. 马路上有编号为 1, 2, 3, ..., 2011 的 2011 只路灯, 为节约用电要求关闭其中的 300 只灯, 但不能同时关闭相邻两只, 也不能关闭两端的路灯, 则满足条件的关灯方法共有\_\_\_\_\_种. (用组合数符号表示)

17. 设  $x, y, z$  为整数, 且  $x + y + z = 3, x^3 + y^3 + z^3 = 3$ , 则  $x^2 + y^2 + z^2 =$ \_\_\_\_\_.

三、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 17 分, 共计 51 分)

18. 设  $a \leq 2$ , 求  $y = (x - 2)|x|$  在  $[a, 2]$  上的最大值和最小值.

19. 给定两个数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  满足  $x_0 = y_0 = 1, x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}} (n \geq 1), y_n = \frac{y_{n-1}^2}{1+2y_{n-1}} (n \geq 1)$ . 证明对于任意的自然数  $n$ , 都存在自然数  $j_n$ , 使得  $y_n = x_{j_n}$ .

20. 已知椭圆  $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$ , 过其左焦点  $F_1$  作一条直线交椭圆于  $A, B$  两点,  $D(a, 0)$  为  $F_1$  右侧一点, 连  $AD, BD$  分别交椭圆左准线于  $M, N$ . 若以  $MN$  为直径的圆恰好过  $F_1$ , 求  $a$  的值.

四、附加题 (本大题共 2 小题, 每小题 25 分, 共计 50 分)

21. 在锐角三角形  $ABC$  中,  $\angle A = \frac{\pi}{3}$ , 设在其内部同时满足  $PA \leq PB$  和  $PA \leq PC$  的点  $P$  的全体

形成的区域  $G$  的面积为三角形  $ABC$  面积的  $\frac{1}{3}$ . 证明三角形  $ABC$  为等边三角形.

22. 设  $a, b, c \in R^+$ , 且  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 3$ . 求证:  $\frac{a+b}{2+a+b} + \frac{b+c}{2+b+c} + \frac{c+a}{2+c+a} \geq \frac{3}{2}$ , 并指明等号成立的条件.

## 2012年甘肃省高中数学预赛

一. 填空题 (本题满分 56 分, 每小题 7 分)

1. 空间四点  $A, B, C, D$  两两间的距离均为 1, 点  $P$  与点  $Q$  分别在线段  $AB$  与  $CD$  上运动, 则点  $P$  与点  $Q$  间的最小距离为\_\_\_\_\_;

2. 向量  $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (1, 1)$ ,  $O$  为坐标原点, 动点  $P(x, y)$  满足  $\begin{cases} 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OA} \leq 1 \\ 0 \leq \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OB} \leq 2 \end{cases}$ , 则点  $Q(x+y, y)$  构成的图形的面积为\_\_\_\_\_;

3. 设有非空集合  $A \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , 且当  $a \in A$  时, 必有  $8-a \in A$ , 这样的集合  $A$  的个数是\_\_\_\_\_;

4. 设  $f(x) = \begin{cases} x - |x|, & x < 0 \\ f(x-1), & x > 0 \end{cases}$ , 其中  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 若  $f(x) = kx + k (k > 0)$  有三个不同的实数根, 则实数  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_;

5. 11 位数的手机号码, 前七位数字为 1390931, 若余下的 4 个数字只能是 1、3、5 且都至少出现 1 次, 这样的手机号码有\_\_\_\_\_个;

6. 若  $\tan x_1 \cdot \tan x_2 \cdots \tan x_n = 1$ , 则  $\sin x_1 \cdot \sin x_2 \cdots \sin x_{2012}$  的最大值是\_\_\_\_\_;

7. 设函数  $f: R \rightarrow R$ , 满足  $f(0) = 1$  且对任意  $x, y \in R$  都有  $f(xy+1) = f(x)f(y) - f(y) - x + 2$ , 则  $f(x) =$ \_\_\_\_\_;

8. 实数  $x, y, z$  满足  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 则  $xy + yz$  的最大值为\_\_\_\_\_.

二. 解答题 (本题满分 64 分, 第 9、10 题每题 14 分, 第 11、12 题每题 18 分)

9. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_{n+1} + a_n - 1}{a_{n+1} - a_n + 1} = n (n \in N^*)$ , 且  $a_2 = 6$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 设  $b_n = \frac{a_n}{n+c} (n \in N^*)$ ,  $c$  为非零常数, 若数列  $\{b_n\}$  是等差数列, 记  $c_n = \frac{b_n}{2^n}$ ,  $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ , 求  $S_n$ .

10.  $M$  是抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的准线上任意点, 过  $M$  点作抛物线的切线, 切点分别为  $A, B$  ( $A$  在  $x$  轴上方).

(1) 证明: 直线  $AB$  过定点;

(2) 设  $AB$  的中点为  $P$ , 求  $|MP|$  的最小值.

11. 设  $a, b, c$  为正实数, 且  $a + b + c = 1$ , 求证:  $(a^2 + b^2 + c^2) \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \right) \geq \frac{1}{2}$ .

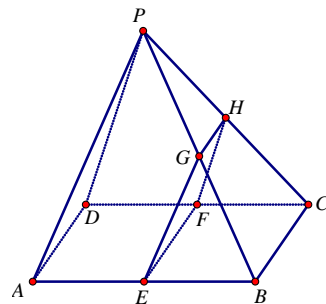
12. 某校数学兴趣小组有  $m$  位同学组成, 学校专门安排  $n$  为老师作为指导教师. 在该小组的一次活动中, 每两位同学之间相互为对方提出一个问题, 每位同学又向每位指导教师各提出一个问题, 并且每位指导教师也向全组提出一个问题, 以上所有问题互不相同, 这样共提出了 51 个问题. 试求  $m, n$  的值.

2012 年安徽省高中数学预赛

一、填空题 (每题 8 分, 共 64 分)

1. 设函数  $f(x) = \arcsin(\cos(x))$ , 则  $f(f(f(x)))$  的最小正周期为\_\_\_\_\_.
2. 设实数  $x, y$  满足  $x^2 - 8x + y^2 - 6y + 24 = 0$ , 则  $x - 2y$  的最大值为\_\_\_\_\_.
3.  $\cos \frac{\pi}{11} - \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} - \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} =$ \_\_\_\_\_ (用数字作答).
4. 设两点  $C, D$  在以线段  $AB$  为直径的半圆弧上, 线段  $AC$  和线段  $BD$  相交于点  $E$ ,  $AB = 10, AC = 8, BD = 5\sqrt{2}$  则  $\triangle ABE$  的面积为\_\_\_\_\_.

5. 设两个椭圆  $\frac{x^2}{t^2+2t-2} + \frac{y^2}{t^2+t+2} = 1$  和  $\frac{x^2}{2t^2-3t-5} + \frac{y^2}{t^2+t-7} = 1$  有公共的焦点, 则  $t =$ \_\_\_\_\_.
6. 如图, 设正四棱锥  $P-ABCD$  的体积为 1,  $E, F, G, H$  分别是线段  $AB, CD, PB, PC$  的中点, 则多面体  $BEG-CFH$  的体积为\_\_\_\_\_.
7. 不超过 2012 且与 210 的最大公约数是 1 的正整数共有\_\_\_\_\_个.
8. 设随机变量  $X \sim N(1, 2), Y \sim N(3, 4)$ . 若  $P(X < 0) = P(Y > a)$ , 则  $a =$ \_\_\_\_\_.



二、解答题 (第 9-10 题每题 25 分, 第 11-12 题每题 18 分, 共 86 分)

9. 已知  $\triangle ABC$  的周长为 1, 并且  $\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \sin B$ .  
 (1) 证明:  $\triangle ABC$  是直角三角形; (2) 求  $\triangle ABC$  面积的最大值.
10. 设无穷数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-1}} (n \geq 2)$ . 证明:  
 (1) 当  $n \geq 2$  时,  $a_n \geq \sqrt{2n}$ ; (2) 不存在实数  $C$  使得  $a_n < \sqrt{2n} + C$  对所有  $n$  都成立.
11. 设  $n = 2^m, m$  是正整数. 求所有满足  $f(x^2 + 1) = f(x)^2 + 1$  的  $n$  次实系数多项式  $f(x)$ .
12. 设  $n \geq 2$ . 对平面上的任意  $n$  个向量  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 以  $M$  表示满足  $i < j$  且  $\alpha_i \cdot \alpha_j < 0$  的实数对  $(i, j)$  的个数. 证明:  $M \leq \frac{n^2}{3}$ .

2012年山东省高中数学预赛

一. 选择题 (本大题共 10 个小题, 每小题 6 分)

1. 已知集合  $A = \{1, b, a + b\}$ ,  $B = \{-1, 0\}$ , 则  $a, b$  的值分别为  
(A)  $-1, 0$  (B)  $0, -1$  (C)  $-1, 1$  (D)  $1, -1$
2. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $2|x| + 3|y| = 5$  所围成的图形的面积为  
(A)  $\frac{3}{5}$  (B)  $5$  (C)  $\frac{20}{3}$  (D)  $\frac{25}{3}$
3.  $(x^2 - \frac{1}{x})^n$  的展开式中, 常数项为 15, 则  $n$  的值为  
(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12
4. 设  $A, B, C, D$  是以点  $O$  为球心的球面上四点,  $AB, AC, AD$  两两互相垂直, 且  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $AD = \sqrt{11}\text{cm}$ , 则球的半径为  
(A)  $3\text{cm}$  (B)  $4\text{cm}$  (C)  $5\text{cm}$  (D)  $6\text{cm}$
5. 已知平面内三点  $A, B, C$ , 满足  $\overrightarrow{AB} = 3, \overrightarrow{BC} = 5, \overrightarrow{CA} = 6$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$  的值为  
(A)  $-55$  (B)  $-45$  (C)  $-35$  (D)  $-25$
6. 设  $z_1, z_2$  为一对不相等的共轭复数, 且  $|z_1| = \sqrt{3}, \frac{z_1^2}{z_2}$  为实数, 则  $|z_1 - z_2|$  的值为  
(A)  $\sqrt{3}$  (B)  $\sqrt{6}$  (C) 3 (D)  $2\sqrt{3}$
7. 已知  $S$  为直平行六面体, 命题  $p$ : “ $S$  为正方体”, 命题  $q$ : “ $S$  的任意对角线和其不相交的面相对角线垂直”, 则命题  $p$  是命题  $q$  的条件  
(A) 充分不必要 (B) 必要不充分  
(C) 充要 (D) 既不充分也不必要
8. 称分子和分母的最大公约数为 1 的分数为既约分数, 所有分母为 100 的正的既约真分数之和为  
(A) 20 (B) 30 (C) 35 (D) 45
9. 某科室安排国庆节放假期间 (共放假 8 天) 甲、乙、丙、丁死人的值日表, 已知甲、乙各值班四天, 甲不能在第一天值班且甲、乙不在同一天值班; 丙需要值班 3 天, 且不能连续值班, 丁需要值班 5 天; 规定每天必须两人值班。问符合条件的不同的值日方案共有  
(A) 400 种 (B) 700 种 (C) 840 种 (D) 960 种
10. 已知  $f(x) = \frac{x^4 + kx^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} (k, x \in R)$ , 则  $f(x)$  的最大值  $f(x)_{\max}$  与最小值  $f(x)_{\min}$  的和为  
(A)  $\frac{4k-1}{3}$  (B)  $k$  (C)  $\frac{k+1}{2}$  (D)  $\frac{k+2}{3}$

二. 填空题 (本大题共 4 个小题, 每小题 6 分, 共 24 分, 请将答案填写在答题纸指定位置)

11. 函数  $y = \cos 2x + 2\sin x, x \in (0, 2\pi)$  的单调递减区间为\_\_\_\_\_.

12. 等差数列 $\{a_n\}$ ,  $a_{20} = \frac{1}{a}$ ,  $a_{201} = \frac{1}{b}$ ,  $a_{2012} = \frac{1}{c}$ , 则 $1992ac - 1811bc$ 的值为\_\_\_\_\_.

13. 已知常数 $a, b$ 满足 $a, b > 0, a \neq 1$ , 且点 $P(a, b), Q(b, a)$ 均在曲线 $y = \cos(x + c)$ 上, 其中 $c$ 为常数, 则 $\log_a b$ 的值为\_\_\_\_\_.

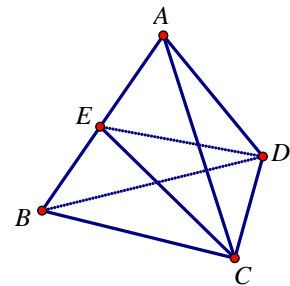
14. 设 $O$ 为 $\triangle ABC$ 内一点,  $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ 则 $\triangle OAB$ 的面积与 $\triangle OBC$ 的面积之比为\_\_\_\_\_.

三. 解答题 (本大题共 5 题, 共 66 分, 请将答案填写在答题纸指定位置)

15. (本小题满分 12 分) 给定正整数 $n$ , 对于满足 $a_1^2 + a_{n+1}^2 \leq \frac{2}{5}$ 的等差数列 $\{a_n\}$ , 试证明

$$\sum_{i=n+1}^{2n+1} a_i \leq n + 1.$$

16. (本小题满分 12 分) 三棱锥 $A-BCD$ 中,  $\triangle BCD, \triangle ACD$ 均为边长为 2 的正三角形,  $\triangle BCD$ 在平面 $\alpha$ 内, 侧棱 $AB = \sqrt{3}$ . 现对其四个顶点随机贴上写有数字 1 至 8 的 8 个标签中的 4 个, 并记对应的标号为 $f(\eta)$  ( $\eta$ 取值为 $A, B, C, D$ ),  $E$ 为侧棱 $AB$ 上一点.



(1) 求事件“ $f(C) + f(D)$ 为偶数”的概率 $P_1$ ;

(2) 若 $|BE|:|EA| = f(B):f(A)$ , 求二面角 $E-CD-A$ 的平面角 $\theta$

大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率 $P_2$ 。

17. (本小题满分 12 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > b > 0)$ ,  $A_d$ 与原点距离 $d$ 的直线全体所成的集合。是否存在常数 $d(0 < d < b)$ , 使得对任意 $l \in A_d$ , 均存在 $l_1, l_2 \in A_d$ ,  $l_1, l_2$ 分别过 $l$ 与椭圆 $E$ 的交点 $P, Q$ , 且有 $l_1 \parallel l_2$ , 并说明理由。

18. (本小题满分 12 分) 设函数 $f(x) = ax^2 + bx + c, (a, b, c \in R, a \neq 0)$ 满足当 $|x| \leq 1$ 时, 均有 $f'(x) \leq 1$ , 设 $f'(x)$ 在 $|x| \leq 1$ 时的最大值为 $K$ , 试求所有函数 $f(x)$ , 满足存在 $x_0 \in [-1, 1]$ 使得 $f'(x_0) = K$ 。

19. (本小题满分 18 分) 集合 $A \subseteq R, B$ 是 $A$ 的所有子集所组成的集合。若 $A$ 满足: 对任意集合的映射 $f: B \rightarrow B$ , 总存在 $X \in B$ , 有 $f(f(\dots(f(X))\dots)) = A - X$ 这里 $A - X$ 表示 $A$ 的子集 $X$ 的补集,  $n$ 为给定的正整数, 试求所有满足上述条件的集合 $A$ 。

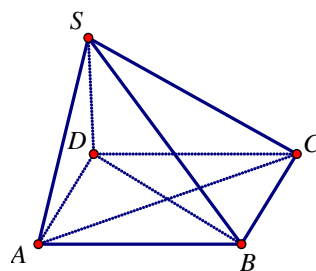
2012年浙江省高中数学预赛

一、 选择题（本大题共有 10 小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题 5 分，共 50 分）

- 已知  $i$  为虚数单位，则复数  $\frac{1+2i}{i-2} = ( )$   
 (A)  $i$  (B)  $-i$  (C)  $-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$  (D)  $-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$
- 下列函数中，既是奇函数，又在区间  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增的函数为  $( )$   
 (A)  $y = x^2 + x$  (B)  $y = x + 2\sin x$   
 (C)  $y = x^3 + x$  (D)  $y = \tan x$
- 已知  $\vec{a}$  与  $\vec{b}$  均为单位向量，其夹角为  $\theta$ ，则命题  $p: |\vec{a} - \vec{b}| > 1$ ，是命题  $q: \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$   $( )$   
 (A) 充分非必要条件  
 (B) 必要非充分条件  
 (C) 充分且必要条件  
 (D) 非充分也非必要条件
- 已知集合  $P = \{x | 1 \leq x \leq 2\}$ ,  $M = \{x | 2 - a \leq x \leq 1 + a\}$ ，若  $P \cap M = P$ ，则实数  $a$  的取值范围是  $( )$   
 (A)  $(-\infty, 1]$  (B)  $[1, +\infty)$  (C)  $[-1, 1]$  (D)  $[-1, +\infty)$

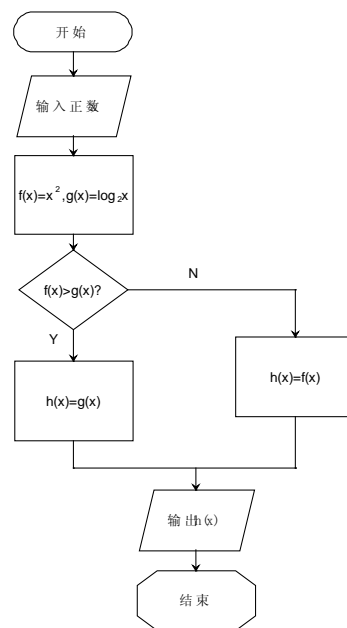
- 函数  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(x + \frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{2} - x)$  的最大值为  $( )$   
 (A)  $\frac{13}{4}$  (B)  $\frac{\sqrt{13}}{4}$  (C)  $\frac{\sqrt{13}}{2}$  (D)  $\sqrt{13}$

- 如图，四棱锥  $S-ABCD$  的地面为正方形， $SD \perp$  底面  $ABCD$ ，则下列结论中不正确的是  $( )$



- 程序框图如图所示，若  $f(x) = x^2, g(x) = \log_2 x$ ，输入  $x$  的值为 0.25，则输出结果为  $( )$   
 (A) 0.24 (B) -2  
 (C) 2 (D) -0.25
- 设  $\vec{i}, \vec{j}$  分别表示平面直角坐标系  $x, y$  轴上的单位向量，且  $|\vec{a} - \vec{i}| + |\vec{a} - 2\vec{j}| = \sqrt{5}$ ，则  $|\vec{a} + 2\vec{i}|$  取值范围为  $( )$

- 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$  的左、右焦点，点



- 已知  $F_1, F_2$  分别为双曲线  $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$  的左、右焦点，点

$A$ 的坐标为 $(\frac{9}{2}, \frac{\sqrt{135}}{2})$ , 则 $\angle F_1AF_2$ 的平分线与 $x$ 轴交点 $M$ 的坐标为 ( )

- (A) (2,0) (B) (-2,0) (C) (4,0) (D) (-4,0)

10. 设 $f(x) = x^2 + bx + c$ , 若方程 $f(x) = x$ 无实根, 则方程 $f(f(x)) = x$  ( )

- (A) 有四个相异实根 (B) 有两个相异实根  
(C) 有一个实根 (D) 无实数根

二、 填空题 (本大题共有 7 小题, 将正确答案填入题干后的横线上, 每空 7 分, 共 49 分)

11. 设直线 $y = ax - 4$ 与 $y = 8x - b$ 关于直线 $y = x$ 对称, 则 $a =$ \_\_\_\_\_,  $b =$ \_\_\_\_\_.

12. 已知 $\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|} = \sin x$ , 则 $x =$ \_\_\_\_\_.

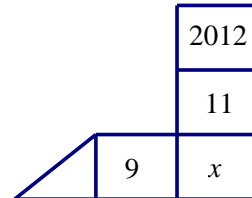
13. 已知 $x \in R$ , 则 $\sqrt{x(x+1)} + \arcsin\sqrt{x^2+x+1}$ 的值为\_\_\_\_\_.

14. 已知实数 $a, b, c, d$ 满足 $ab = c^2 + d^2 = 1$ , 则 $(a-c)^2 + (b-d)^2$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

15. 设 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且每项都大于 1, 则 $\lg a_1 \lg a_{2012} \sum_{i=1}^{2011} \frac{1}{\lg a_i \lg a_{i+1}}$ 的值为\_\_\_\_\_.

16. 设 $x > 0$ , 则 $f(x) = \frac{(x+\frac{1}{x})^4 - (x^4 + \frac{1}{x^4})}{(x+\frac{1}{x})^3 - (x^3 + \frac{1}{x^3})}$ 的最小值为\_\_\_\_\_.

17. 如图是一个残缺的 $3 \times 3$ 幻方, 此幻方每一行每一列及每一条对角线上的三个数之和有相等的值, 则 $x$ 的值为\_\_\_\_\_.



三、 解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 17 分, 共计 51 分)

18. 已知实数 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 满足 $\sum_{i=1}^{10} |x_i - 1| \leq 4, \sum_{i=1}^{10} |x_i - 2| \leq 6$ , 求 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均值 $\bar{x}$ .

19. 设 $P$ 为椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 长轴上一个动点, 过 $P$ 点斜率为 $k$ 直线交椭圆于 $A, B$ 两点. 若 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的值仅依赖于 $k$ 而与 $P$ 无关, 求 $k$ 的值.

20. 设 $p, q \in Z^+$ , 且 $q \leq p^2$ . 试证对 $n \in Z^+$ , 存在 $N \in Z^+$ , 使 $(p - \sqrt{p^2 - q})^n = N - \sqrt{N^2 - q^n}$  且 $(p + \sqrt{p^2 - q})^n = N + \sqrt{N^2 - q^n}$ .

四、 附加题 (本大题 2 小题, 每小题 25 分, 共计 50 分)

21. 设圆 $O_4$ 与 $O_1$ , 圆 $O_1$ 与 $O_2$ , 圆 $O_2$ 与 $O_3$ , 圆 $O_3$ 与 $O_4$ 分别外切于 $P_1, P_2, P_3, P_4$ , 试证:

- (1)  $P_1, P_2, P_3, P_4$ 四点共圆;  
(2) 四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 是某个圆的外切四边形; 并且  
(3) 该圆的半径不超过四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的外接圆的半径.

22. 设 $i_1, i_2, \dots, i_{10}$ 为 $1, 2, \dots, 10$ 的一个排列, 记 $S = |i_1 - i_2| + |i_3 - i_4| + \dots + |i_9 - i_{10}|$ , 求 $S$ 可以取到的所有值.