2012 年高中数学竞赛试题

2012 年北京市高中数学初赛（高一）

一、 选择题（满分 36 分=6×6 分）

1．$f(x)=\begin{cases}2+x, x>0\\5, \quad x=0\\2^x, \quad x<0\end{cases}$，则$f(-2)+f(0)+f(1)+f(3)$的值为

（A）8 （B）11 （C）$13\frac{1}{4}$ （D）$15\frac{1}{2}$

2．一个锐角的正弦和余弦恰是二次三项式ax^2+bx+c的不同的两个根，则a,b,c之间的关系是

（A）$b^2=a^2-4ac$ （B）$b^2=a^2+4ac$

（C）$b^2=a^2-2ac$ （D）$b^2=a^2+2ac$

3．定义域为 R 的函数$f(x)$满足$f(x+2)=3f(x)$，当$x\in[0,2]$时，$f(x)=x^2-2x$，则$f(x)$在$x\in[-4,-2]$上的最小值为

（A）$-\frac{1}{9}$ （B）$-\frac{1}{3}$ （C）$\frac{1}{3}$ （D）$\frac{1}{9}$

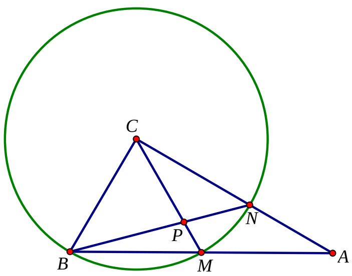
4．定义在正整数集Z^+上的函数f，对于每一个$n\in Z^+$和无理数$\pi=3.14159265358\cdots$满足

$$f(x)=\begin{cases}k^2\text{的末位数字，（的小数点后第}n\text{位数字}k\neq 0\text{ 时）}\\3. \qquad\qquad\text{（的小数点后第}n\text{位数字}k=0\text{ 时）}\end{cases}$$

若函数的值域记为 M，则

（A）$1\notin M$ （B）$5\notin M$ （C）$6\notin M$ （D）$9\notin M$

5．如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=30°,\angle C=90°$，以 C 为圆心，CB 为半径作圆交 AB 边于 M，交 AC 边于 N，P 为 CM 与 BN 的交点.若$AN=1$，则$S_{\triangle CPN}-S_{\triangle BPN}$等于



（A）$\frac{1}{8}$ （B）$\frac{\sqrt{3}}{8}$ （C）$\frac{1}{4}$ （D）$\frac{\sqrt{3}}{4}$

6．定义在$(-1,1)$上的函数$f(x)$满足$f(x)-f(y)=f(\frac{x-y}{1-xy})$，且当$x\in(-1,0)$时，$f(x)>0$.若$P=f\left(\frac{1}{4}\right)+f\left(\frac{1}{5}\right),Q=f\left(\frac{1}{6}\right),R=f(0)$；则$P,Q,R$的大小关系为

（A）$R>P>Q$ （B）$R>Q>P$ （C）$P>R>Q$ （D）$Q>P>R$

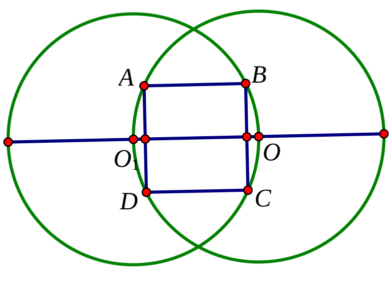
二、 填空题（满分 64 分=8×8 分）

1. 求$\log_2\sin\frac{\pi}{3}+\log_2\tan\frac{\pi}{6}+\log_2\cos\frac{\pi}{4}$的值.

2. 已知$f(x)$是四次多项式，且满足$f(i)=\frac{1}{i},i=1,2,3,4,5$，求$f(6)$的值.

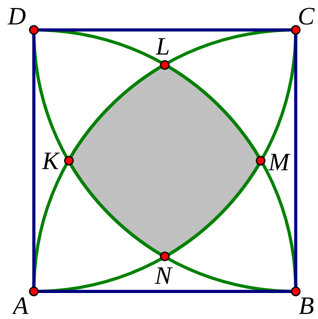
3. 若$[x]$表示不超过 x 的最大整数，求满足方程$[n\lg2]+[n\lg5]=2012$的自然数 n 的值.

4. 如图，半径为 1 的两个等圆相交，在两圆的公共部分作一内接正方形 $ABCD$.如果圆心距O_1O等于 1，试求正方形 $ABCD$ 的面积.



5. 求 $\frac{1^2}{1^2-1\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{3^2}{3^2-3\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{5^2}{5^2-5\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\frac{7^2}{7^2-7\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}+\cdots+\frac{2011^2}{2011^2-2011\times2012+\frac{1}{2}\times2012^2}$的值.

6. 在单位正方形 $ABCD$ 中，分别以 A,B,C,D 四点为圆心，以 1 为半径画弧，如图所示，交点为 M,N,L,K，求阴影部分的面积.



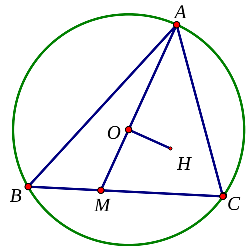
7. 已知二次函数 $f(x)$ 满足 $f(-10)=9, f(-6)=7, f(2)=-9$，求$f(100)$的值.

8. 上底 BC=2，下底 AD=3 的梯形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O，彼此外切于点 O 的两个圆分别切直线 AD 于点 A 和点 D，交 BC 分别于点 K,L，求AK^2+DL^2的值.

2012 年北京市高中数学复赛（高一）

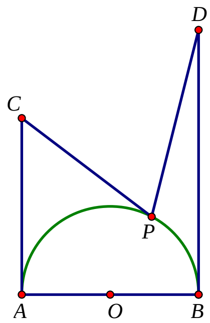
一、 填空题（本题共 5 个小题，每小题 8 分，满分 40 分）

1. 函数$y=\frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$的图像与平行于 x 轴的直线$y=c$恰有一个交点，则 c 能取到的所有值的乘积等于________.



2. 如图，锐角ΔABC 内接于半径为 R 的⊙O，H 是ΔABC 的垂心，AO 的延长线与 BC 交于点 M，若$OH\perp AO, BC=10, OA=6$，则 OM=___________.

3. 二次函数$y=ax^2+bx+c$的图像与 x 轴有两个交点 A 和 B，顶点为 C，如果ΔACB 恰是直角三角形，那么判别式Δ的值是______.

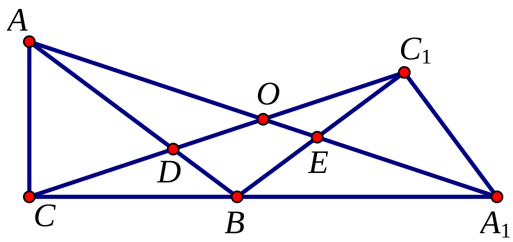


4. 如图，半圆 O 的半径为 1，$AC\perp AB$于 A，$BD\perp AB$于 B，且$AC=2, BD=3$，P 是半圆上任意一点，则封闭图形 $ABDPC$ 的面积的最大值为___________.

5. 和为 111 的两个自然数 x 和 y，使得等式$\sqrt{x}\cos\frac{\pi y}{2x}+\sqrt{y}\sin\frac{\pi x}{2y}=0$成立，满足这个条件的一组自然数$(x,y)$是______________.

二、 （本题满分 15 分）

如图，在ΔABC 中，$\angle ACB=90°, AC=3, BC=4$以 B 为中心，将$\Delta ABC$ 顺时针旋转，使点 A 落在 CB 延长线上的点A_1处，此时点 C 落在点C_1的位置.连接AA_1, CC_1相交于 O，CC_1交 AB 于 D，AA_1交BC_1于 E，求四边形 $BDOE$ 的面积.



三、 （本题满分 15 分）

（1） 如果整数 a、b 和 c 满足关系式 $a^2+b^2=2c^2-2$，求证：$144|abc$.

（2） 试写出不定方程$a^2+b^2=2c^2-2$的一组正整数解，并对这组正整数解验证 $144|abc$.

四、 （本题满分 15 分）

在边长都是正整数的三角形中，周长是 2009 的三角形与周长是 2012 的三角形哪一种数量多？说明理由.

五、 （本题满分 15 分）

在锐角ΔABC 中，O 是外心，I 是内心，连接 AI，BI 和 CI 的直线交ΔABC 的外接圆分别于点A_1，B_1和C_1.求证：$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}}=\frac{2r}{R}$.

（其中 R 是外接圆的半径，r 是内切圆的半径）

2012 年湖北省高中数学预赛（高一）

一、填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分.直接将答案写在横线上.）

1．已知集合 $A=\{x|x\le a\},B=\{x|x>b\},a,b\in N$，且 $A\cap B\cap N=\{1\}$，则 $a+b=$__________.

2．已知正项等比数列$\{a_n\}$的公比$q\ne 1$，且a_2,a_4,a_5成等差数列，则$\frac{a_1+a_4+a_7}{a_3+a_6+a_9}=$__________.

3．函数$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$的值域为__________.

4．已知$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\sin\beta+\cos\beta)^2=1$，则$\cos 2(\alpha+\beta)=$__________.

5．已知数列$\{a_n\}$满足：a_1为正整数，

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\end{cases}$$

如果$a_1+a_2+a_3=29$，则$a_1=$__________.

6．在$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边长a,b,c满足$a+c=2b$，且$C=2A$，则$\sin A=$__________.

7．在$\triangle ABC$中，$AB=BC=2,AC=3$．设O是$\triangle ABC$的内心，若$\overrightarrow{AO}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$，则$\frac{p}{q}$的值为__________.

8．设x_1,x_2,x_3是方程$x^3-x+1=0$的三个根，则$x_1^5+x_2^5+x_3^5$的值为__________.

二、解答题（本大题满分 56 分，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分）

9．已知正项数列$\{a_n\}$满足$\sqrt{a_na_{n+1}+a_na_{n+2}}=4\sqrt{a_na_{n+1}+a_{n+1}^2}+3\sqrt{a_na_{n+1}}$且$a_1=1,a_2=8$，求$\{a_n\}$的通项公式.

10．已知正实数a,b满足$a^2+b^2=1$，且$a^3+b^3+1=m(a+b+1)^3$，求m的最小值.

11．设$f(x)=\log_a(x-2a)+\log_a(x-3a)$，其中$a>0$且$a\ne 1$．若在区间$[a+3,a+4]$上$f(x)\le 1$恒成立，求$a$的取值范围.

2012 年湖北省高中数学预赛（高二）

一、　填空题（本题满分 64 分，每小题 8 分.直接将答案写在横线上.）

1．函数$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x^2+4x+7}}$的值域为__________.

2．已知$3\sin^2\alpha+2\sin^2\beta=1$，$3(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-2(\sin\beta+\cos\beta)^2=1$，则$\cos 2(\alpha+\beta)=$__________.

3．已知数列$\{a_n\}$满足：a_1为正整数，

$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{a_n}{2}, & a_n\text{为偶数}\\ 3a_n+1, & a_n\text{为奇数}\end{cases}$$

如果$a_1+a_2+a_3=29$，则$a_1=$__________.

4．设集合$S=\{1,2,3,\cdots,12\}$, $A=\{a_1,a_2,a_3\}$是S的子集，且满足$a_1<a_2<a_3, a_3-a_2\le 5$那么满足条件的子集$A$的个数为________.

5．过原点O的直线l与椭圆C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$交于$M,N$两点，$P$是椭圆$C$上异于$M,N$的任一点．若直线$PM,PN$的斜率之积为$-\frac{1}{3}$，则椭圆$C$的离心率为_____.

6．在$\triangle ABC$中，$AB=BC=2, AC=3$．设O是$\triangle ABC$的内心，若$\overrightarrow{AO}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$，则$\frac{p}{q}$的值为____________.

7．在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，已知$AC=1, B_1C=\sqrt{2}, AB_1=p$，则长方体的体积最大时，$p$为________.

8．设$[x]$表示不超过x的最大整数，则$\sum_{k=0}^{2012}\left[\frac{2012+2^k}{2^{k+1}}\right]=$______.

二、解答题（本大题满分 56 分，第 9 题 16 分，第 10 题 20 分，第 11 题 20 分）

9．已知正项数列$\{a_n\}$满足

$$\sqrt{a_na_{n+1}+a_na_{n+2}}=4\sqrt{a_na_{n+1}+a_{n+1}^2}+3\sqrt{a_na_{n+1}}$$

且$a_1=1, a_2=8$，求$\{a_n\}$的通项公式.

10．已知正实数a,b满足$a^2+b^2=1$，且$a^3+b^3+1=m(a+b+1)^3$，求m的取值范围.

11．已知点$E(m,n)$为抛物线$y^2=2px(p>0)$内一定点，过E作斜率分别为k_1,k_2的两条直线交抛物线于A,B,C,D，且M,N分别是线段AB,CD的中点.

（1）当$n=0$且$k_1\cdot k_2=-1$时,求$\triangle EMN$的面积的最小值;

（2）若$k_1+k_2=\lambda(\lambda\ne 0,\lambda$为常数),证明：直线$MN$过定点.

2012 年福建省高中数学预赛（高一）

一． 选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 已知集合$A=\{x|1\le x\le 4\}, B=\{y|y=\log_2 x, x\in A\}$，则$A\cap B=$

(A) $[0,2]$ (B) $[0,1]$ (C) $[1,2]$ (D) $[2,4]$

2. 已知直线$x=2, x=4$与函数$log_4 x$的图像交于 A、B 两点，与函数$y=ln\,x$的图像交于 C、D 两点，则直线 AB 与 CD

(A) 相交，且交点在第一象限

(B) 相交，且交点在第二象限

(C) 相交，且交点在第四象限

(D) 相交，且交点在坐标原点

3. 已知集合A，如果存在实数x_0，使得对任意整数a，都存在$x\in A$，使得$0<|x-x_0|<a$，则称x_0为集合 A 的“聚点”.给出下列四个集合：①$\left\{\frac{n}{n+1}\middle|n\in Z, n\ge 0\right\}$ ②$\{x\mid x\in R$, 且$x\ne 0\}$ ③$\left\{\frac{1}{n}\middle|n\in Z, n\ne 0\right\}$ ④Z. 其中以 0 为“聚点”的集合有

(A) ②③ (B) ①② (C) ①③ (D) ②④

4. 已知四面体 $ABCD$ 四个顶点的坐标分别为$A(2,0,0)$、$B(0,2,0)$、$C(0,0,1)$、$D(0,0,0)$，则直线 DC 与平面 ABC 所成角的正弦值为

(A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. 已知x, y是两个不相等的正数，且满足条件$x^3-y^3=x^2-y^2$，则$[9xy]$的最大值为（符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数）

(A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

6. 函数$f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{18-3x}$的最大值为

(A) $\sqrt{10}$ (B) $2\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{14}$ (D)$\sqrt{15}$

二． 填空题（每小题 6 分，共 36 分）

7. 已知过点$A(3,-2)$的直线l交 x 轴正半轴于点 B，交直线$l_1: x-2y=0$于点 C，且$|AB|=2|BC|$，则直线l在 y 轴上的截距为__________.

8. 若关于x的不等式$2^x+3^x-k\cdot 6^x\ge 0$在区间$[1,2]$上有解，则k的最大值为___________.

9. 在三棱锥 D-ABC 中，已知$AB=BC=AD=\sqrt{2}, BD=AC=2, BC\perp AD$，则三棱锥 D-ABC 外接球的表面积为______.

10. 三个半径都是2的圆，其圆心分别为$A(1,1), B(3,6), C(7,12)$，直线l斜率为k，且过点$(1,1)$. 若⊙A、⊙B、⊙C 位于直线 l 某一侧的部分的面积和等于位于直线 l 另一侧的部分的面积和. 则 k=__________.

11. 已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x-1 & x\le 0\\ f(x-1) & x>0\end{cases}$，则方程$f(x)=x$在区间$(0,10)$内所有实根的和为________.

12. 符号$[x]$表示不超过 x 的最大整数，符号$\{x\}$表示 x 的小数部分即$\{x\}=x-[x]$.若实数 x 满足$[2x]+[4x]+[6x]+[8x]=2012$，则$\{x\}$的最小值为_______.

三． 解答题（第 13、14、15、16 题每题 16 分，第 17 题 14 分，满分 78 分）

13. 已知$f(x)=x^2+2px-2$在区间$[-2,0]$上的最小值为$g(p)$.

（1）求$g(p)$的表达式；

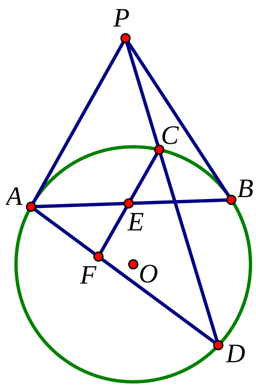
（2）当$g(p)=-3$时，求$f(x)$在区间$[-2,0]$上的最大值.

14. 已知圆 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=m$，点$A(4,6),B(s,t)$，

（1）若$3s-4t=-12$，且直线 AB 被圆 C 截得的弦长为 4，求 m 的值；

(2)若s,t为正整数,且圆C上任意一点到点A的距离与到点B的距离之比为定值$\lambda(\lambda>1)$，求 m 的值.

15. 对任意的正整数 n，以及任意 n 个互不相同的正整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$，若不等式$(\frac{1}{a_1})^\lambda+(\frac{1}{a_2})^\lambda+\cdots+(\frac{1}{a_n})^\lambda<2$恒成立.求整数$\lambda$的最小值.



16. 如图，PA、PB 为圆 O 的两条切线，A、B 为切点，PCD 为圆 O 的割线，C、D 为割线与圆 O 的交点.过 C 作直线交 AB 于点 E、交 AD 于点 F，且$CE=EF$.求证：$CE\parallel PA$

17. 在直角坐标平面 xOy 内有 2012 个点，记这 2012 个点组成的点集 P 中任何两点的连线与坐标轴既不平行也不重合.证明：在点集 P 中，存在 E、G 两点，使得以 EG 为对角线，且边与坐标轴平行或重合的矩形 $EFGH$ 内（不包括边界）至少含有点集 P 中的 402 个点.

2012 年河南省高中数学预赛（高一）

一． 填空题（共 10 小题，每小题 6 分，满分 60 分）

1. 已知非空集合$A\subseteq\{1,2,\cdots,2012\}$，且满足：当$a\in A$时，有$2013-a\in A$，则符合题意的集合$A$共有______.

2. 已知$P(a,b)$关于直线l的对称点为$P(b+1,a-1)$，则圆$C:x^2+y^2-6x-2y=0$关于直线l对称的圆C的标准方程为__________.

3. 已知分段函数$f(x)=\begin{cases}3^{-x},x\le 0\\ f(x-1),x>0\end{cases}$,若$f(x)=x+a$有且仅有三个实数解,则实数$a$的取值范围是__________.

4. 设a,b分别是方程$\log_{513}x+x-2012=0$和$513^x+x-2012=0$的根，则$a+b=$________.

5. 已知四面体$A-BCD$中，$AB=CD=2\sqrt{13},BC=AD=\sqrt{41},AC=BD=\sqrt{61}$，则该四面体的体积是______.

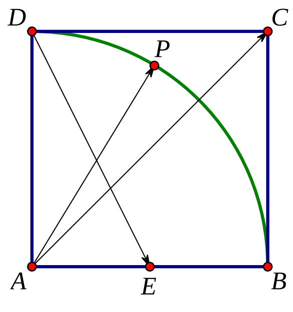
6. 定义$A*B=\begin{cases}C(A)-C(B),C(A)\ge C(B)\\ C(B)-C(A),C(A)<C(B)\end{cases}$，已知$A=\{1,2\}$，$B=\{x||x^2+ax+1|=0\}$其中$C(A)$表示集合$A$中的元素的个数，若$A*B=1$，由$a$的所有可能值构成的集合是$S$，那么$C(S)=$_________.

7. 已知正三棱锥$P-ABC$的侧棱长为$\sqrt{3}+1$，底面边长为$\sqrt{2}$，Q是侧棱PA的中点，一条折线从点A出发，绕侧面一周到点Q，则这条折线长度的最小值是________.

8. 已知函数$y=f(x)$的定义域是D，如对于任意的$x_1,x_2\in D$，当$x_1<x_2$时，都有$f(x_1)\le f(x_2)$，则称$f(x)$函数在D上为非减函数，设函数$y=f(x)$在$[0,1]$上为非减函数，满足条件：①$f(0)=0$;②$f\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{1}{2}f(x)$③$f(1-x)=1-f(x)$,则$f\left(\frac{1}{3}\right)+f\left(\frac{1}{2012}\right)=$__________.

9. （选做题）

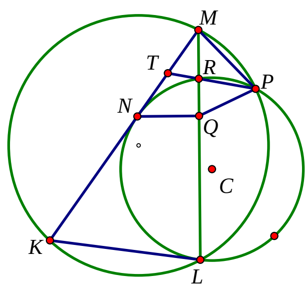
（必修 3）在 6 个产品中有 4 个正品和 2 个次品，现每次取出一个作检查（检查完后不放回），直到 2 个次品都找到为止，则恰好经过 4 次检查将 2 个次品全部找到的概率是________.



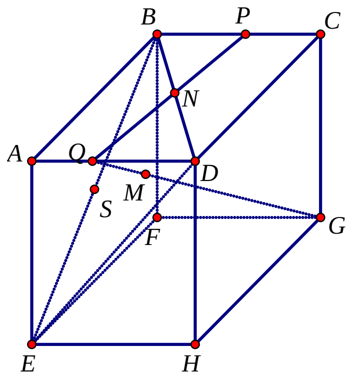
（必修4)如图所示,在正方形$ABCD$中,E为AB的中点,P是以A为圆心，AB为半径的圆弧BD上的任意一点，设向量$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{DE}+\mu\overrightarrow{AP}(\lambda,\mu\in R)$，则$\lambda+\mu$的最小值是_________.

10. 已知$m\in N$，且函数$f(x)=2x-m\sqrt{10-x}-m+10$存在整数零点，则符合题意的一切$m$的取值构成的集合是______________.

二． （本题满分 20 分)如图所示,KL和KN是$\odot C$的两条切线,其中L,N为切点.在KN的延长线上取一点M，ΔKML的外接圆与$\odot C$的另一交点为P，ML和$\odot C$的另一交点为R，延长PR交MK于T.过N作$NQ\perp ML$于Q，连接QP.



证明：(1) $\Delta MTR\sim\Delta PTM$ (2) $\angle MPQ=2\angle KML$.



三． （本题满分 20 分）如图所示，已知单位正方体$ABCD-EFGH$的棱长AD和BC上分别有动点Q,P.若直线PQ和BD交于点N，直线GQ和平面BDE交于点M，BE的中点是S，设$AQ=x(0\le x\le 1),MN=y$.（1）求证：D,M,S三点共线；（2）求y的最小值关于x的解析式.

四． （本题满分 20 分）（必修 3）函数$f(x)=\log_2(4+\sqrt{16-x^2})$.（1）求函数的值域；（2）若在区间$[-4,1]$上随机取一个数$a$，求方程$f^2(x)+af(x)+1=0$有实数根的概率.

（必修 4）已知对于任意的$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\sin x<x$恒成立，利用此结论证明：（1）存在唯一的实数对$(c,d)$，其中$c,d\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使$\sin(\cos c)=c,\cos(\sin d)=d$成立；（2）在（1）的条件下证明：$c<d$.

五． （本题满分 20 分）函数$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$f(x)=x^3+x-\log_2(\sqrt{x^2+1}-x)$.（1）求证：函数$f(x)$是定义在$R$上的奇函数；（2）对于任意实数$a,b(a+b\neq 0)$，求$\operatorname{sgn}\left(\frac{f(a)+f(b)}{a^3+b^3}\right)$的值.

2012 年江苏高中数学竞赛（初赛）

一、　填空题（本题满分 70 分，每小题 7 分）

1. 当$x \in [-3,3]$时，函数$f(x) = |x^3 - 3x|$的最大值为______.

2. 在$\triangle ABC$中，已知$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 12, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA} = -4$，则$AC =$_______.

3. 从集合$\{3,4,5,6,7,8\}$中随机选取 3 个不同的数，这 3 个数可以构成等差数列的概率是________.

4. 已知a为实数，方程$x^2 + (4+i)x + 4 + ai = 0$的一个实数根是$b$（$i$是虚数单位），则$|a+bi|$的值为_______.

5. 在平面直角坐标系xOy中，双曲线$C: \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$的右焦点为$F$，一条过原点$O$且倾斜角为锐角的直线$l$与双曲线$C$交于$A, B$两点.若$\triangle FAB$的面积为$8\sqrt{3}$，则直线$l$的斜率为_______.

6. 设a为正实数，$k = a^{\lg a}$,则k的取值范围是_______.

7. 在四面体$ABCD$中，$AB = AC = AD = DB = 5, BC = 3, CD = 4$,该四面体的体积为_________.

8. 已知等差数列$\{a_n\}$和等比数列$\{b_n\}$满足:$a_1 + b_1 = 3, a_2 + b_2 = 7, a_3 + b_3 = 15, a_4 + b_4 = 35$,，则$a_n + b_n =$______$(n \in N^*)$

9. 将 27,37,47,48,55,71,75 这 7 个数排成一列，使任意 4 个数的和为 3 的倍数，则这样的排法有__________种.

10. 三角形的周长为 31，三边a, b, c均为整数，且$a \le b \le c$，则满足条件的三元数组的个数为___________.

二、　解答题（本题满分 80 分，每小题 20 分）

11．在$\triangle ABC$中，角A, B, C对应的边分别为a, b, c，证明：

（1）$b\cos C + c\cos B = a$;

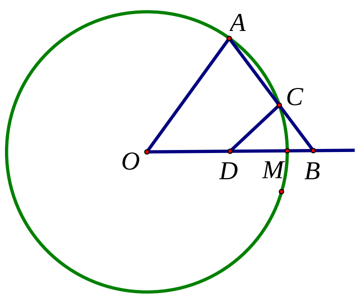
（2）$\frac{\cos A + \cos B}{a+b} = \frac{2\sin^2\frac{C}{2}}{c}$.

12．已知a, b为实数，$a > 2$函数$f(x) = \left|\ln x - \frac{a}{x}\right| + b(x > 0)$.若$f(1) = e+1, f(2) = \frac{e}{2} - \ln 2 + 1$.

（1）求实数a, b;

（2）求函数$f(x)$的单调区间；

（3）若实数c, d满足$c > d, cd = 1$，求证：$f(c) < f(d)$.



13．如图，半径为 1 的圆O上有一定点M,A为圆O上的动点.在射线OM上有一动点B,$AB = 1, OB > 1$.线段AB交圆O于另一点C,D为线段OB的中点.求线段CD长的取值范围.

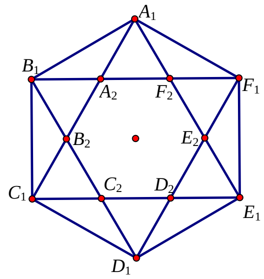
14．设a, b, c, d是正整数，a, b是方程$x^2 - (d-c)x + cd = 0$的两个根.证明：存在边长是整数且面积为ab的直角三角形.

2012 年上海市高中数学竞赛（新知杯）

【说明】解答本试卷不得使用计算器

一、填空题（本题满分 60 分，前 4 小题每小题 7 分，后 4 小题每小题 8 分）

1．如图，正六边形$A_1B_1C_1D_1E_1F_1$的边长为 1，它的 6 条对角线又围成一个正六边形$A_2B_2C_2D_2E_2F_2$，如此继续下去，则所有这些六边形的面积和是________．

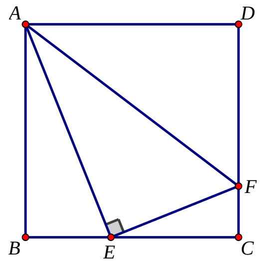


2．已知正整数$a_1,a_2,\cdots,a_{10}$满足：$\frac{a_j}{a_i}>\frac{3}{2},1\le i<j\le 10$，则$a_{10}$的最小可能值是_______．

3．若 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\frac{17}{6}$，$\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma=-\frac{4}{5}$，$\cot\alpha\cot\beta+\cot\beta\cot\gamma+\cot\gamma\cot\alpha=-\frac{17}{5}$，则 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=$_____________．

4．已知关于x的方程$\lg(kx)=2\lg(x+1)$仅有一个实数解，则实数k的取值范围是_____________．

5．如图，$\triangle AEF$是边长为x的正方形$ABCD$的内接三角形，已知$\angle AEF=90°$，$AE=a,EF=b,a>b$，则$x=$_____________．



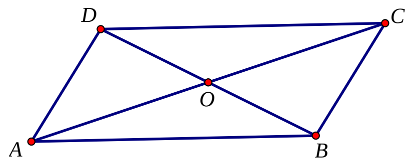
6．方程 $2^m\cdot 3^n-3^{n+1}+2^m=13$ 的非负整数解$(m,n)=$_____________．

7．一个口袋里有 5 个大小一样的小球，其中两个是红色的，两个是白色的，一个是黑色的，依次从中摸出 5 个小球，相邻两个小球的颜色均不相同的概率是_____________．（用数字作答）

8．数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=1,a_2=2,a_{n+2}=\frac{2(n+1)}{n+2}a_{n+1}-\frac{n}{n+2}a_n,n=1,2,\cdots$.若$a_m>2+\frac{2011}{2012}$，则正整数$m$的最小值为_____________．

二、解答题

9.（本题满分 14 分）如图，在平行四边形$ABCD$中，$AB=x,BC=1$，对角线AC与BD的夹角$\angle BOC=45°$，记直线AB与CD的距离为$h(x)$．求$h(x)$的表达式，并写出x的取值范围．



10．（本题满分 14 分）给定实数$a>1$，求函数$f(x)=\frac{(a+\sin x)(4+\sin x)}{1+\sin x}$的最小值．

11．（本题满分 16 分）正实数x,y,z满足$9xyz+xy+yz+zx=4$；求证：（1）$xy+yz+zx\ge\frac{4}{3}$；（2）$x+y+z\ge 2$．

12．（本题满分 16 分）给定整数$n(\ge 3)$，记$f(n)$为集合$\{1,2,\cdots,2^n-1\}$的满足如下两个条件的子集A的元素个数的最小值：①$1\in A,2^n-1\in A$；②A中的元素（除 1 外）均为A中的另两个（可以相同）元素的和．

（1）求$f(3)$的值；

（2）求证：$f(100)\le 108$．

2012年四川省高中数学预赛

一、单项选择题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分）

1、设集合$S=\{x|x^2-5x-6<0\}$，$T=\{x||x+2|\leq 3\}$，则$S\cap T$=

A、$\{x|-5\leq x<-1\}$　B、$\{x|-5\leq x<5\}$

C、$\{x\mid -1\leq x\leq 1\}$　D、$\{x|1\leq x<5\}$

2、正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中BC_1与截面BB_1D_1D所成的角是

A、$\frac{\pi}{6}$　B、$\frac{\pi}{4}$　C、$\frac{\pi}{3}$　D、$\frac{\pi}{2}$

3、已知$f(x)=x^2-2x+3,g(x)=kx-1$，则“$|k|\leq 2$”是“$f(x)\geq g(x)$在R上恒成立”的

A、充分但不必要条件 B、必要但不充分条件

C、充要条件 D、既不充分也不必要条件

4、设正三角形Δ_1的面积为S_1，作Δ_1的内切圆，再作内切圆的内接正三角形，设为Δ_2，面积为S_2，如此下去作一系列的正三角形$\Delta_3,\Delta_4,\cdots$，其面积相应为$S_3,S_4,\cdots$，设$S_1=1,T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$，则$\lim_{n\to+\infty}T_n=$

A、$\frac{6}{5}$　B、$\frac{4}{3}$　C、$\frac{3}{2}$　D、2

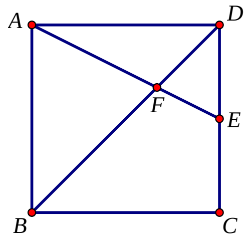
5、设抛物线$y^2=4x$的焦点为F，顶点为O,M是抛物线上的动点，则$\frac{|MO|}{|MF|}$的最大值为

A、$\frac{\sqrt{3}}{3}$　B、$\frac{2\sqrt{3}}{3}$　C、$\frac{4}{3}$　D、$\sqrt{3}$

6、设倒圆锥形容器的轴截面为一个等边三角形，在此容器内注入水，并放入半径为r的一个实心球，此时球与容器壁及水面恰好都相切，则取出球后水面高为（　）

A、r　B、$2r$　C、$\sqrt[3]{12r}$　D、$\sqrt[3]{15r}$

二、填空题（本大题共6个小题，每小题5分，共30分）



7、如图，正方形$ABCD$的边长为3，E为DC的中点，AE与BD相交于F，则$\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{DE}$的值是____________.

8、$(x^2+x-\frac{1}{x})^6$的展开式中的常数项是____________.（用具体数字作答）

9、设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，满足$S_n=\frac{(a_n+1)^2}{4}$，则S_{20}的值为____________.

10、不超过2012的只有三个正因数的正整数个数为_________.

11、已知锐角A,B满足$\tan(A+B)=2\tan A$，则$\tan B$的最大值是____________.

12、从1,2,3,4,5组成的数字不重复的五位数中，任取一个五位数$\overline{abcde}$，满足条件“$a<b>c<d>e$”的概率是____________.

三、解答题（本大题共4个小题，每小题20分，共80分）

13、设函数$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x+1$，

（I）求函数$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的最大值与最小值；

（II）若实数a,b,c使得$af(x)+bf(x-c)=1$对任意$x\in R$恒成立，求$\frac{b\cos c}{a}$的值.

14、已知$a,b,c\in R^{+}$，满足$abc(a+b+c)=1$，

（I）求$S=(a+c)(b+c)$的最小值；

（II）当S取最小值时，求c的最大值.

15、直线$y=kx+1$与双曲线$x^2-y^2=1$的左支交于A、B两点，直线l经过点$(-2,0)$和AB的中点，求直线l在y轴的截距b的取值范围.

16、设函数$f_n(x)=x^n(1-x)^2$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上的最大值为$a_n(n=1,2,3,\cdots)$.

（I）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（II）求证：对任何正整数$n(n\geq 2)$，都有$a_n\leq\frac{1}{(n+2)^2}$成立；

（III）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求证：对任意正整数n，都有$S_n<\frac{7}{16}$成立.

2012年陕西省高中数学预赛

第一试

一、　填空题（每小题8分，共80分）

1. 已知集合$M=\{1,3,5,7,9\}$,若非空集合A满足:A中各元素都加4后构成M的一个子集,A中各元素都减4后也构成M的一个子集，则$A=$___________.

2. 已知两条直线$l_1{:}\,y=2,l_2{:}\,y=4$，设函数$y=3^x$的图像与l_1,l_2分别交于点A,B，函数$y=5^x$的图像与l_1,l_2分别交于点C,D，则直线AB与CD的交点坐标是______.

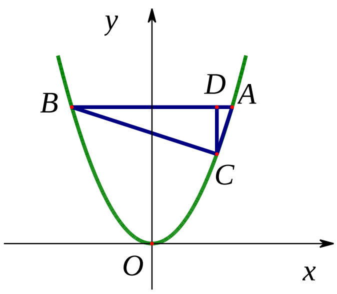
3. 对于正整数n，若$n=p*q(p\geq q,p$、$q\in N_+)$，当$p-q$最小时，我们称$p*q$为n的“最佳分解”，并规定$f(n)=\frac{q}{p}$.例如，12的分解有$12\times 1,6\times 2,4\times 3$，其中$4\times 3$为12的最佳分解，则$f(12)=\frac{3}{4}$，关于$f(n)$，有下列四个判断:

①$f(4)=0$;②$f(7)=\frac{1}{7}$;③$f(24)=\frac{3}{8}$;④$f(2012)=\frac{4}{503}$

其中，所有正确判断的序号是__________.

4. 已知$\triangle ABC$为等腰直角三角形，$\angle A=90°$，且$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，若$\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)(\theta\in R)$，则$\triangle ABC$的面积等于_______.

5. 在正四面体$ABCD$中，$AO\perp$平面BCD，垂足为O.设M是线段AO上一点，且满足$\angle BMC=90°$，则$\frac{AM}{MO}=$________.



6. 如图，$\text{Rt}\triangle ABC$的三个顶点都在给定的抛物线$x^2=2py(p>0)$上，且斜边$AB\parallel x$轴，则斜边上的高$|CD|=$______.

7. 某项游戏活动的奖励分成一、二、三等奖（参与游戏活动的都有奖），且相应获奖的概率是以a为首项、2为公比的等比数列，相应获得的奖金是以700元为首项、-140为公差的等差数列.则参与这项游戏活动获得奖金的期望是_______元.

8. 设p,q是两个不同的质数，则$p^{q-1}+q^{p-1}$被$p\cdot q$除的余数是_________.

9. 定义在R上的函数$f(x)$满足$f(1)=1$，且对任意的$x\in R$，都有$f'(x)<\frac{1}{2}$.则不等式$f(\log_2 x)>\frac{\log_2 x+1}{2}$的解集为_____.

10. 从公路旁的材料工地沿笔直公路向同一方向运送电线杆到500m以外的公路边埋栽，在500m处栽一根，然后每间隔50m在公路边栽一根.已知运输车辆一次最多只能运3根，要完成运载20根电线杆的任务，并返回材料工地，则运输车总的行程最小为__________m.

第二试

一．（本题满分 20 分）

在$\triangle ABC$中，已知$AB=2,AC=1,$且$\cos 2A+2\sin^2\frac{B+C}{2}=1.$

（1）求角A的大小和边BC的长;

（2）若点P在$\triangle ABC$内运动（含边界），且点P到三边距离之和为d.设点P到边BC,CA的距离分别为x,y，试用x,y表示d，并求d的取值范围.

二．（本题满分 20 分）

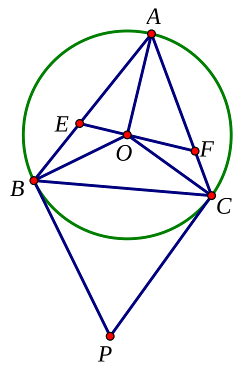
在平面直角坐标系中，以点$C(t,\frac{2}{t})$为圆心的圆经过坐标原点O，且分别与x轴、y轴交于点A,B（不同于原点O）.

（1）求证：$\triangle AOB$的面积S为定值;

（2）设直线$l:y=-2x+4$与圆C相交于不同的两点M,N，且$|OM|=|ON|$，求圆C的标准方程.

三．（本题满分 20 分）

如图，锐角$\triangle ABC$内接于圆O，过圆心O且垂直于半径OA的直线分别交边AB,AC于点E,F.设圆O在B,C两点处的切线相交于点P，求证：直线AP平分线段EF.



四．（本题满分 30 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2},a_n=2a_na_{n+1}+3a_{n+1}(n\in N^*)$..

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若数列$\{b_n\}$满足$b_n=1+\frac{1}{a_n}(n\in N^*)$，且对任意正整数$n(n\geq 2)$，不等式$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\log_3 b_k}>\frac{m}{24}$恒成立，求整数$m$的最大值.

五．（本题满分 30 分）

对于任意的正整数n，证明：$\frac{1}{3-2}+\frac{1}{3^2+2^2}+\frac{1}{3^3-2^3}+\cdots+\frac{1}{3^n+(-2)^n}<\frac{7}{6}.$

2012 年河北省高中数学预赛

一、选择题（本大题共有 10 小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题 5 分，共 50 分）

1． 已知$\theta \in \left[\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right]$，则$\sqrt{1-\sin 2\theta}-\sqrt{1+\sin 2\theta}$可化简为（ ）

A．$2\sin\theta$　B. $-2\sin\theta$　C. $-2\cos\theta$　D. $2\cos\theta$

2． 如果复数$(a+2i)(1+i)$的模为 4，则实数a的值为（　）

A. 2　B. $2\sqrt{2}$　C.　± 2　D. $\pm 2\sqrt{2}$

3． 设A ,B为两个互不相同的集合, 命题p: $x \in A \cap B$， 命题q: $x \in A$或$x \in B$, 则p是q的(　)

A. 充分且必要条件　　B. 充分非必要条件

C. 必要非充分条件　　D. 非充分且非必要条件

4． 过椭圆$\frac{x^2}{2}+y^2=1$的右焦点F_2作倾斜角为$45°$弦AB，则$|AB|$为（　）

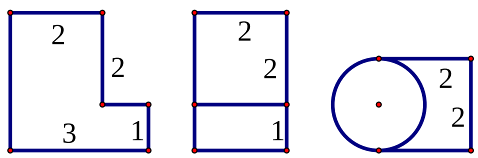
A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　C. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$　D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

5． 函数$f(x)=\begin{cases}1-5^{-x} & x\ge 0\\ 5^x-1 & x<0\end{cases}$，则该函数为（ ）

A. 单调增加函数、奇函数　B. 单调递减函数、偶函数

C. 单调增加函数、偶函数　D. 单调递减函数、奇函数

6． 设有一立体的三视图如下，则该立体体积为（　）



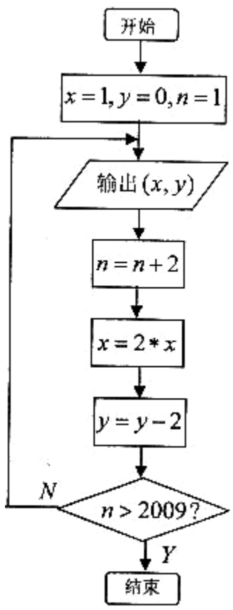
正视图　侧视图　俯视图（圆和正方形）

A. $4+\frac{5\pi}{2}$　B. $4+\frac{3\pi}{2}$　C. $4+\frac{\pi}{2}$　D. $4+\pi$

7． 某程序框图如右图所示，现将输出(x,y)值依次记为：$(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n),\cdots$若程序运行中输出的一个数组是 $(x,-10)$,则数组中的$x=$（　）

A．64　B．32

C．16　D．8



8． 在平面区域$\{(x,y)||x|\le 1,|y|\le 1\}$上恒有$ax-2by\le 2$，则动点$P(a,b)$所形成平面区域的面积为（ ）

A. 4　B.8　C. 16　D.　32

9． 已知函数$f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-m$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上有两个零点，则$m$的取值范围为（ ）

A. $\left(\frac{1}{2},1\right)$　B $\left[\frac{1}{2},1\right]$　C. $\left[\frac{1}{2},1\right)$　D. $\left(\frac{1}{2},1\right]$

10. 已知$a\in[-1,1]$，则$x^2+(a-4)x+4-2a>0$的解为（ ）

A. $x>3$ 或$x<2$ B. $x>2$ 或$x<1$

C. $x>3$ 或$x<1$ D. $1<x<3$

二、填空题（本大题共有 7 小题，将正确答案填入题干后的横线上，每空 7 分，共 49 分）

11. 函数$f(x)=2sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}cosx$的最小正周期为__________.

12. 已知等差数列$\{a_n\}$前 15 项的和$S_{15}=30$，则$a_1+a_8+a_{15}=$__________.

13. 向量$\vec{a}=(1,sin\theta),\vec{b}=\left(cos\theta,\sqrt{3}\right),\theta\in R$，则$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$的取值范围为____.

14. 直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$，底面ΔABC是正三角形，P,E分别为BB_1,CC_1上的动点（含端点），D为BC边上的中点，且$PD\perp PE$.则直线AP,PE的夹角为________.

15．设x,y为实数，则$\max_{5x^2+4y^2=10x}(x^2+y^2)=$__________.

16. 马路上有编号为 1，2，3，…，2011 的 2011 只路灯，为节约用电要求关闭其中的 300 只灯，但不能同时关闭相邻两只，也不能关闭两端的路灯，则满足条件的关灯方法共有__________种.（用组合数符号表示）

17. 设x,y,z为整数，且$x+y+z=3,x^3+y^3+z^3=3$，则$x^2+y^2+z^2=$______.

三、解答题（本大题共 3 小题，每小题 17 分，共计 51 分）

18. 设$a\le 2$，求$y=(x-2)|x|$在$[a,2]$上的最大值和最小值.

19. 给定两个数列$\{x_n\},\{y_n\}$满足$x_0=y_0=1$，$x_n=\frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}(n\ge 1)$，$y_n=\frac{y_{n-1}^2}{1+2y_{n-1}}(n\ge 1)$.证明对于任意的自然数$n$，都存在自然数$j_n$，使得 $y_n=x_{j_n}$.

20. 已知椭圆$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$，过其左焦点$F_1$作一条直线交椭圆于$A,B$两点，$D(a,0)$为$F_1$右侧一点，连$AD$、$BD$分别交椭圆左准线于$M,N$.若以$MN$为直径的圆恰好过$F_1$，求 a的值.

四、附加题（本大题共 2 小题，每小题 25 分，共计 50 分）

21. 在锐角三角形ABC中，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，设在其内部同时满足$PA\le PB$和$PA\le PC$的点P的全体形成的区域G的面积为三角形ABC面积的$\frac{1}{3}$.证明三角形ABC为等边三角形.

22. 设$a,b,c\in R^+$，且$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=3$.求证:$\frac{a+b}{2+a+b}+\frac{b+c}{2+b+c}+\frac{c+a}{2+c+a}\ge\frac{3}{2}$，并指明等号成立的条件.

2012年甘肃省高中数学预赛

一． 填空题（本题满分56分，每小题7分）

1． 空间四点A,B,C,D两两间的距离均为1，点P与点Q分别在线段AB与CD上运动，则点P与点Q间的最小距离为______;

2． 向量$\overrightarrow{OA}=(1,0)$，$\overrightarrow{OB}=(1,1)$，$O$为坐标原点，动点$P(x,y)$满足$\begin{cases}0\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}\le 1\\0\le\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}\le 2\end{cases}$，则点$Q(x+y,y)$构成的图形的面积为_________;

3． 设有非空集合$A\subseteq\{1,2,3,4,5,6,7\}$，且当$a\in A$时，必有$8-a\in A$，这样的集合$A$的个数是________;

4． 设$f(x)=\begin{cases}x-[x],\ x<0\\f(x-1),x>0\end{cases}$，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，若$f(x)=kx+k(k>0)$有三个不同的实数根，则实数$k$的取值范围是____________;

5． 11位数的手机号码，前七位数字时1390931，若余下的4个数字只能是1、3、5且都至少出现1次，这样的手机号码有____________个;

6． 若$\tan x_1\cdot\tan x_2\cdot\cdots\cdot\tan x_n=1$，则$\sin x_1\cdot\sin x_2\cdot\cdots\cdot\sin x_{2012}$的最大值是_________;

7． 设函数$f:R\to R$，满足$f(0)=1$且对任意$x,y\in R$都有$f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$，则$f(x)=$_______;

8． 实数x,y,z满足$x^2+y^2+z^2=1$，则$xy+yz$的最大值为____________.

二． 解答题（本题满分64分，第9、10题每题14分，第11、12题每题18分）

9． 已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_{n+1}+a_n-1}{a_{n+1}-a_n+1}=n(n\in N^*)$，且$a_2=6$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）设$b_n=\frac{a_n}{n+c}(n\in N^*)$，$c$为非零常数，若数列$\{b_n\}$是等差数列，记$c_n=\frac{b_n}{2^n}$，$S_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$，求$S_n$.

10． M是抛物线$y^2=2px(p>0)$的准线上任意点，过M点作抛物线的切线，切点分别为A,B（A在x轴上方）.

（1）证明：直线AB过定点;

（2）设AB的中点为P，求$|MP|$的最小值.

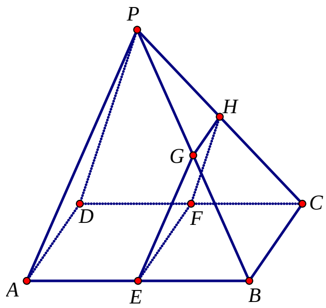
11． 设a,b,c为正实数，且$a+b+c=1$，求证：$(a^2+b^2+c^2)(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b})\ge\frac{1}{2}$.

12． 某校数学兴趣小组有m位同学组成，学校专门安排n为老师作为指导教师.在该小组的一次活动中，每两位同学之间相互为对方提出一个问题，每位同学又向每位指导教师各提出一个问题，并且每位指导教师也向全组提出一个问题，以上所有问题互不相同，这样共提出了51个问题.试求m,n的值.

2012 年安徽省高中数学预赛

一、填空题（每题 8 分，共 64 分）

1. 设函数$f(x)=\arcsin(\cos(x))$，则$f(f(f(x)))$的最小正周期为____________.
2. 设实数x,y满足$x^2-8x+y^2-6y+24=0$，则$x-2y$的最大值为___________.
3. $\cos\frac{\pi}{11}-\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}-\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}=$__________（用数字作答）.
4. 设两点 C，D 在以线段 AB 为直径的半圆弧上，线段 AC 和线段 BD 相交于点 E，$AB=10,AC=8,BD=5\sqrt{2}$ 则 ΔABE 的面积为____________.



5. 设两个椭圆$\frac{x^2}{t^2+2t-2}+\frac{y^2}{t^2+t+2}=1$和$\frac{x^2}{2t^2-3t-5}+\frac{y^2}{t^2+t-7}=1$有公共的焦点，则$t=$__________.
6. 如图，设正四棱锥 P-$ABCD$ 的体积为 1，E，F，G，H 分别是线段 AB，CD，PB，PC 的中点，则多面体 BEG-CFH 的体积为___________.
7. 不超过 2012 且与 210 的最大公约数是 1 的正整数共有___________个.
8. 设随机变量$X\sim N(1,2),Y\sim N(3,4)$.若$P(X<0)=P(Y>a)$，则$a=$____________.

二、解答题（第 9-10 题每题 25 分，第 11-12 题每题 18 分，共 86 分）

9. 已知ΔABC 的周长为 1，并且$sin2A+sin2B=4sinAsinB$.

（1）证明：ΔABC 是直角三角形；（2）求ΔABC 面积的最大值.

10. 设无穷数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geq 2)$.证明：

（1）当$n\geq 2$时，$a_n\geq\sqrt{2n}$；（2）不存在实数 C 使得$a_n<\sqrt{2n+c}$对所有 n 都成立.

11. 设$n=2^m,m$是正整数。求所有满足$f(x^2+1)=f(x)^2+1$的 n 次实系数多项式$f(x)$.
12. 设$n\geq 2$.对平面上的任意 n 个向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，以 M 表示满足$i<j$且$\alpha_i\cdot\alpha_j<0$的实数对(i,j)的个数.证明：$M\leq\frac{n^2}{3}$.

2012 年山东省高中数学预赛

一． 选择题（本大题共 10 个小题，每小题 6 分）

1. 已知集合$A=\{1,b,a+b\},B=\{-1,0\}$，则a,b的值分别为

（A）$-1,0$（B）$0,-1$（C）$-1,1$（D）$1,-1$

2. 在平面直角坐标系xOy中，曲线$2|x|+3|y|=5$所围成的图形的面积为

（A）$\frac{3}{5}$（B）5（C）$\frac{20}{3}$（D）$\frac{25}{3}$

3. $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^n$的展开式中，常数项为 15，则$n$的值为

（A）3（B）6（C）9（D）12

4. 设A,B,C,D是以点O为球心的球面上四点，AB,AC,AD两两互相垂直，且$AB=3\text{cm},AC=4\text{cm},AD=\sqrt{11}\text{cm}$，则球的半径为

（A）3cm（B）4 cm（C）5 cm（D）6 cm

5. 已知平面内三点A,B,C，满足$\overrightarrow{AB}=3,\overrightarrow{BC}=5,\overrightarrow{CA}=6$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$的值为

（A）-55（B）-45（C）-35（D）-25

6. 设z_1,z_2为一对不相等的共轭复数，且$|z_1|=\sqrt{3},\frac{z_1^2}{z_2}$为实数，则$|z_1-z_2|$的值为

（A）$\sqrt{3}$（B）$\sqrt{6}$（C）3（D）$2\sqrt{3}$

7. 已知S为直平行六面体，命题p:“S为正方体”，命题q:“S的任意对角线和其不相交的面对角线垂直”，则命题p是命题q的条件

（A）充分不必要（B）必要不充分

（C）充要（D）既不充分也不必要

8. 称分子和分母的最大公约数为 1 的分数为既约分数,所有分母为 100 的正的既约真分数之和为

（A）20（B）30（C）35（D）45

9. 某科室安排国庆节放假期间（共放假 8 天）甲、乙、丙、丁死人的值日表，已知甲、乙各值班四天，甲不能在第一天值班且甲、乙不在同一天值班；丙需要值班 3 天，且不能连续值班，丁需要值班 5 天；规定每天必须两人值班。问符合条件的不同的值日方案共有

（A）400 种（B）700 种（C）840 种（D）960 种

10. 已知$f(x)=\frac{x^4+kx^2+1}{x^4+x^2+1}(k,x\in R)$，则$f(x)$的最大值$f(x)_{\max}$与最小值$f(x)_{\min}$的和为

（A）$\frac{4k-1}{3}$（B）k（C$\frac{k+1}{2}$）（D）$\frac{k+2}{3}$

二． 填空题（本大题共 4 个小题，每小题 6 分，共 24 分，请将答案填写在答题纸指定位置）

11. 函数$y=\cos 2x+2\sin x,x\in(0,2\pi)$的单调递减区间为__________.

12. 等差数列$\{a_n\}$，$a_{20}=\frac{1}{a},a_{201}=\frac{1}{b},a_{2012}=\frac{1}{c}$，则$1992ac-1811bc$的值为______.

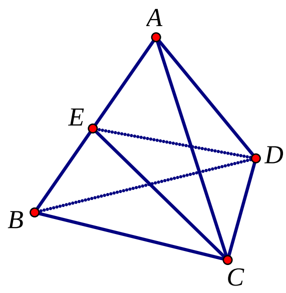
13. 已知常数a,b满足$a,b>0,a\neq 1$，且点$P(a,b),Q(b,a)$均在曲线$y=\cos(x+c)$上，其中c为常数，则$\log_a b$的值为________.

14. 设O为$\triangle ABC$内一点，$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$则$\triangle OAB$的面积与$\triangle OBC$的面积之比为__________.

三． 解答题（本大题共 5 题，共 66 分，请将答案填写在答题纸指定位置）

15. （本小题满分 12 分）给定正整数n，对于满足$a_1^2+a_{n+1}^2\leq\frac{2}{5}$的等差数列$\{a_n\}$，试证明$\sum_{i=n+1}^{2n+1}a_i\leq n+1$.

16. （本小题满分 12 分）三棱锥$A-BCD$中，$\triangle BCD,\triangle ACD$均为边长为 2 的正三角形，$\triangle BCD$在平面$\alpha$内，侧棱$AB=\sqrt{3}$。现对其四个顶点随机贴上写有数字 1 至 8 的 8 个标签中的 4 个，并记对应的标号为$f(\eta)$（η取值为A,B,C,D），E为侧棱AB上一点。



（1）求事件“$f(C)+f(D)$为偶数”的概率P_1；

（2）若$|BE|:|EA|=f(B):f(A)$，求二面角$E-CD-A$的平面角θ大于$\frac{\pi}{4}$的概率P_2。

17. （本小题满分 12 分）已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$，$A_d$与原点距离$d$的直线全体所成的集合。是否存在常数$d(0<d<b)$，使得对任意$l\in A_d$，均存在$l_1,l_2\in A_d$，$l_1,l_2$分别过$l$与椭圆$E$的交点$P,Q$，且有$l_1\parallel l_2$，并说明理由。

18. （本小题满分 12 分）设函数$f(x)=ax^2+bx+c,(a,b,c\in R,a\neq 0)$满足当$|x|\leq 1$时，均有$f'(x)\leq 1$，设$f'(x)$在$|x|\leq 1$时的最大值为$K$，试求所有函数$f(x)$，满足存在$x_0\in[-1,1]$使得$f'(x_0)=K$。

19. （本小题满分 18 分）集合$A\subseteq R,B$是A的所有子集所组成的集合。若A满足：对任意集合的映射$f:B\to B$，总存在$X\in B$，有$f(f(\cdots(f(X))\cdots))=A-X$这里$A-X$表示$A$的子集$X$的补集，$n$为给定的正整数，试求所有满足上述条件的集合$A$。

2012 年浙江省高中数学预赛

一、　　选择题（本大题共有 10 小题，每题只有一个正确答案，将正确答案的序号填入题干后的括号里，多选、不选、错选均不得分，每题 5 分，共 50 分）

1.　已知i为虚数单位，则复数$\frac{1+2i}{i-2}=$（ ）

（A）　i　（B）　$-i$　（C）　$-\frac{4}{5}-\frac{3}{5}i$　（D）$-\frac{4}{5}+\frac{3}{5}i$

2.　下列函数中，既是奇函数，又在区间$(-\infty,+\infty)$上单调递增的函数为（ ）

（A）　$y=x^2+x$（B）　$y=x+2\sin x$

（C）　$y=x^3+x$（D）$y=\tan x$

3.　已知$\vec{a}$与$\vec{b}$均为单位向量，其夹角为θ，则命题$p:\left|\vec{a}-\vec{b}\right|>1$，是命题$q:\theta\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$（ ）

（A）　充分非必要条件

（B）　必要非充分条件

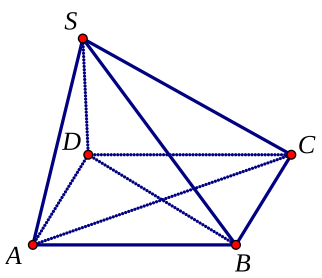
（C）　充分且必要条件

（D）　非充分也非必要条件

4.　已知集合$P=\{x|1\le x\le 2\},M=\{x|2-a\le x\le 1+a\}$，若$P\cap M=P$，则实数$a$的取值范围是（ ）

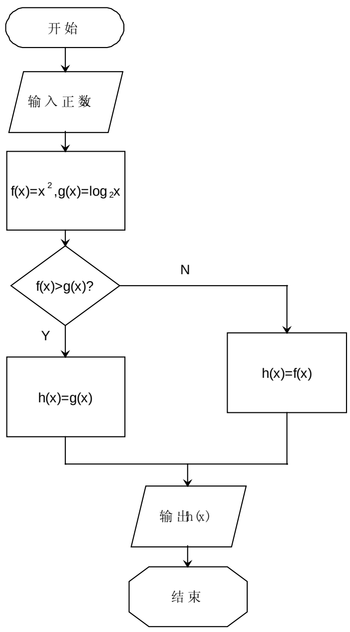
（A）　$(-\infty,1]$　（B）　$[1,+\infty)$　（C）　$[-1,1]$　（D）　$[-1,+\infty)$

5.　函数$y=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\frac{\pi}{2}-x)$的最大值为（ ）



（A）　$\frac{13}{4}$（B）　$\frac{\sqrt{13}}{4}$（C）　$\frac{\sqrt{13}}{2}$　（D）　$\sqrt{13}$

6.　如图，四棱锥$S-ABCD$的地面为正方形，$SD\perp$底面$ABCD$，则下列结论中不正确的是（ ）



（A）$AB\perp SA$（B）$BC\parallel$平面SAD

（C）BC 与 SA 所成的角等于 AD 与 SC 所成的角

（D）SA 与平面 SBD 所成的角等于 SC 与平面 SBD 所成的角

7.　程序框图如图所示，若$f(x)=x^2,g(x)=\log_2 x$，输入x的值为 0.25，则输出结果为（ ）

（A）0.24（B）-2

（C）2（D）-0.25

8.　设$\vec{i},\vec{j}$分别表示平面直角坐标系x,y轴上的单位向量，且$\left|\vec{a}-\vec{i}\right|+\left|\vec{a}-2\vec{j}\right|=\sqrt{5}$，则$\left|\vec{a}+2\vec{i}\right|$取值范围为（ ）

（A）$[2\sqrt{2},3]$（B）$\left[\frac{6\sqrt{5}}{5},2\sqrt{2}\right]$（C）$[\sqrt{5},4]$（D）$\left[\frac{6\sqrt{5}}{5},3\right]$

9.　已知F_1,F_2分别为双曲线$C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$的左、右焦点，点

A的坐标为$(\frac{9}{2},\frac{\sqrt{135}}{2})$，则$\angle F_1AF_2$的平分线与$x$轴交点$M$的坐标为（ ）

（A）$(2,0)$（B）$(-2,0)$（C）$(4,0)$（D）$(-4,0)$

10. 设$f(x)=x^2+bx+c$，若方程$f(x)=x$无实根，则方程$f\big(f(x)\big)=x$（ ）

（A）有四个相异实根（B）有两个相异实根

（C）有一个实根（D）无实数根

二、 填空题（本大题共有 7 小题，将正确答案填入题干后的横线上，每空 7 分，共 49 分）

11. 设直线$y=ax-4$与$y=8x-b$关于直线$y=x$对称，则$a=$_______,$b=$________.

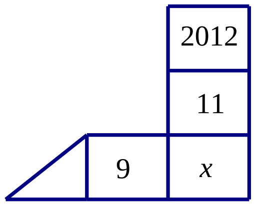
12. 已知$\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|}=\sin x$，则$x=$_______.

13. 已知$x\in R$，则$\sqrt{x(x+1)}+\arcsin\sqrt{x^2+x+1}$的值为_______.

14. 已知实数a,b,c,d满足$ab=c^2+d^2=1$，则$(a-c)^2+(b-d)^2$的最小值为_______.

15. 设$\{a_n\}$为等比数列，且每项都大于 1，则$\lg a_1\lg a_{2012}\sum_{i=1}^{2011}\frac{1}{\lg a_i\lg a_{i+1}}$的值为________.

16. 设$x>0$，则$f(x)=\frac{(x+\frac{1}{x})^4-(x^4+\frac{1}{x^4})}{(x+\frac{1}{x})^3-(x^3+\frac{1}{x^3})}$的最小值为______.



17. 如图是一个残缺的3×3幻方，此幻方每一行每一列及每一条对角线上的三个数之和有相等的值，则x的值为________.

三、 解答题（本大题共 3 小题，每小题 17 分，共计 51 分）

18. 已知实数$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$满足$\sum_{i=1}^{10}|x_i-1|\le4,\sum_{i=1}^{10}|x_i-2|\le6$，求$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$的平均值$\bar{x}$.

19. 设P为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$长轴上一个动点，过$P$点斜率为$k$直线交椭圆于$A,B$两点.若$|PA|^2+|PB|^2$的值仅依赖于$k$而与$P$无关，求$k$的值.

20. 设$p,q\in Z^+$，且$q\le p^2$.试证对$n\in Z^+$，存在$N\in Z^+$，使$(p-\sqrt{p^2-q})^n=N-\sqrt{N^2-q^n}$且$(p+\sqrt{p^2-q})^n=N+\sqrt{N^2-q^n}$.

四、 附加题（本大题 2 小题，每小题 25 分，共计 50 分）

21. 设圆O_4与O_1，圆O_1与O_2，圆O_2与O_3，圆O_3与O_4分别外切于P_1,P_2,P_3,P_4，试证：

（1）P_1,P_2,P_3,P_4四点共圆；

（2）四边形$O_1O_2O_3O_4$是某个圆的外切四边形；并且

（3）该圆的半径不超过四边形$P_1P_2P_3P_4$的外接圆的半径.

22. 设$i_1,i_2,\cdots,i_{10}$为$1,2,\cdots,10$的一个排列，记$S=|i_1-i_2|+|i_3-i_4|+\cdots+|i_9-i_{10}|$，求$S$可以取到的所有值.