

# 2010 年全国高中数学联赛 陕西赛区预赛试卷

(5 月 23 日上午 8: 30—11: 00)

	一 试		二 试			总成绩
题 号	一	二	一	二	三	
		9	10			
得 分						
评卷人						
复核人						

考生注意:

1. 本试卷分两试. 第一试共四大题(10 个小题), 满分 100 分; 第二试共 3 大题, 满分 100 分.
2. 用蓝色(或黑色)钢笔、签字笔或圆珠笔作答.
3. 解题书写不要超过装订线.
4. 不能使用计算器.

## 第 一 试

得分	评卷人

一、填空题(每小题 8 分, 共 64 分)

本题共有 8 小题, 要求直接将答案填在题中的横线上.

1. 设集合  $A = \{5, \log_2(a+3)\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $a, b \in \mathbf{R}$ . 若  $A \cap B = \{1\}$ , 则  $A \cup B =$  \_\_\_\_\_.
2. 如图 1, 在第一象限内, 矩形  $ABCD$  的三个顶点  $A, B, C$  分别在函数  $y = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x$ 、 $y = x^{\frac{1}{2}}$ 、 $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$  的图象上, 且矩形的边分别平行于两坐标轴. 若点  $A$  的纵坐标为 2, 则点  $D$  的坐标为 \_\_\_\_\_.
3. 将四个全等的直角三角形可以拼成如图 2(1) 所示的正方形弦图, 还可以拼成如图 2(2) 所示的菱形. 若图 2(1) 中大正方形的面积为 100, 小正方形的面积为 4, 则图 2(2) 中菱形的一个锐角的余弦值为 \_\_\_\_\_.
4. 一个长方体的体对角线长为 10, 这条对角线在长方体一个表面上投影的长为

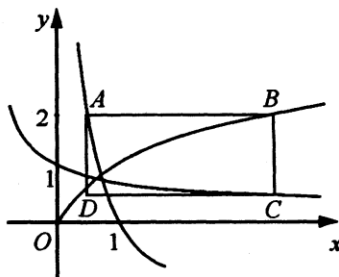
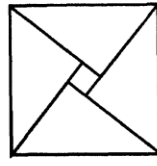


图 1

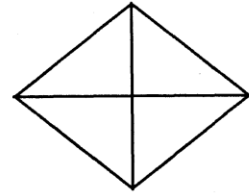
8, 则这个长方体体积的最大值为\_\_\_\_\_.

5. 从一个正方体的8个顶点中取出3个, 则以这3个点为顶点构成直角三角形的概率是\_\_\_\_\_.

6. 设  $a, b, c$  是三个素数(质数), 且满足  $abc = 5(a + b + c)$ , 则这三个数从小到大依次是\_\_\_\_\_.



(1)



(2)

图2

7. 若关于  $x$  的方程  $x^3 + ax^2 + bx - 4 = 0 (a, b \in \mathbb{N}^*)$  有正整数解, 则  $|a - b| =$ \_\_\_\_\_.

8. 设对任意的正整数  $n$ , 都有

$$\frac{1}{n} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{2}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right] < a < \frac{1}{n} \left[ 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{1}{n}\right)^2} + \dots + \sqrt{1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^2} \right].$$

则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.

二、解答题(本大题共2小题,第9题16分,第10题20分,共36分)

得分	评卷人

9. 在  $\triangle ABC$  中,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 8$ , 记  $\angle BAC = \theta$ ,  $\triangle ABC$  的面积为  $S$ , 且满足  $4(2 - \sqrt{3}) \leq S \leq 4\sqrt{3}$ .

(1) 求  $\theta$  的取值范围;

(2) 求函数  $f(\theta) = 2\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + 2\cos^2\theta - \sqrt{3}$  的最大值和最小值.

得分	评卷人

10. 设动圆圆心在抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  上, 半径等于该圆圆心的纵坐标. 求所有这样的圆上点的集合.

## 第二试

得分	评卷人

### 一、(本题满分 30 分)

已知函数  $f(x) = \log_a \frac{x-3}{x+3}$ ,  $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ . 若存在实数  $m, n (m < n)$  及  $a$ , 使得  $f(x)$  的定义域为  $(m, n)$ , 值域为  $(1 + \log_a(n-1), 1 + \log_a(m-1))$ , 分别求  $m$  和  $a$  的取值范围.

得分	评卷人

### 二、(本题满分 30 分)

如图 3, 在凸四边形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = \angle ADC$ ,  $E, F, G, H$  分别为  $AC, BD, AD, CD$  的中点. 求证:

- (1)  $E, F, G, H$  四点共圆;
- (2)  $\angle AEF = \angle ACB - \angle ACD$ .

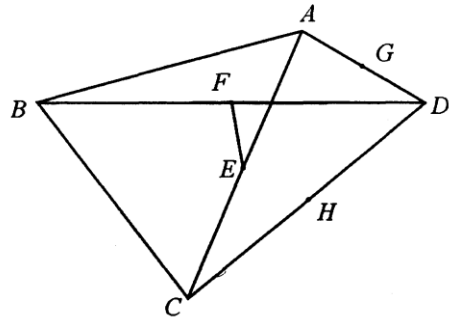


图 3

得分	评卷人

### 三、(本题满分 40 分)

把正整数数列  $1, 2, 3, \dots$  中含有数字 9 的项都删除掉, 剩下的项按原次序组成一个数列, 记作  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . 证明:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} < 80.$$