2005年全国高中数学联赛（安徽赛区）

初　赛

一、选择题（每小题6分，共36分）

1. 已知$m>1$，$a=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$，$b=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$. 那么，（　　）.

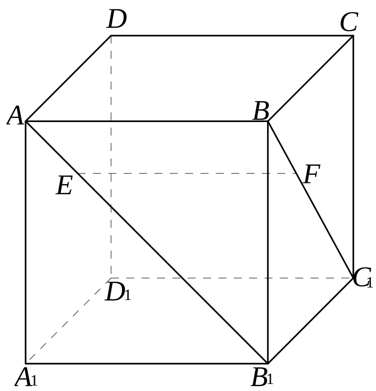
A. $a>b$　　B. $a<b$　　C. $a=b$　　D. a、b的大小与m的取值有关

2. 在$\left(x^2+3x+2\right)^5$的展开式中，含x项的系数是（　　）.

A. 160　　B. 240　　C. 360　　D. 800

3. 如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点E、F分别在AB_1、BC_1上（不与线段的端点重合），且$AE=BF$，那么下面4个结论：（1）$AA_1\perp EF$；（2）$A_1C_1 /\!/ EF$；（3）$EF /\!/$平面$A_1B_1C_1D_1$；（4）EF与A_1C_1异面. 正确的是（　　）.

A.（2）（4）　　B.（1）（4）　　C.（2）（3）　　D.（1）（3）



4. 已知数列：$\frac{1}{1}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{4}{1}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\cdots$，依它的前10项的规律，这个数列的第2005项a_{2005}满足（　　）.

A. $1\le a_{2005}\le 2$　　B. $\frac{1}{2}\le a_{2005}\le 1$　　C. $0<a_{2005}<\frac{1}{2}$　　D. $a_{2005}>2$

5. 若一个至少有两位数字的正整数除了最左边的数字外，其余各个数字都小于其左边的数字时，则称这样的正整数为“好数”. 那么，所有这样的好数的个数为（　　）.

A. 1013　　B. 1011　　C. 1010　　D. 1001

6. 设集合$A=\{-2,0,1\}$，$B=\{1,2,3,4,5\}$，映射f：$A\to B$使对任意$x\in A$都有$x+f(x)+xf(x)$是奇数，则这样的映射f的个数是（　　）.

A. 45　　B. 27　　C. 15　　D. 11

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

7. 函数 $y=f\left(x\right)$ 的反函数为 $y=f^{-1}\left(x\right)$，$y=f\left(x-1\right)$ 的图像过点（3，3）. 则函数 $y=f^{-1}\left(x+2\right)$ 的图像一定过点________.

8. 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右顶点为 A，上顶点为 B，左焦点为 F，且 $\angle ABF=90^\circ$，则椭圆的离心率为________.

9. 在正三棱锥 $S-ABC$ 中，M、N 分别是 SB、SC 的中点. 若截面 $AMN\perp$ 侧面 SBC，则此棱锥侧面与底面所成的二面角的大小是________.

10. 已知集合 M＝{x｜ x＝$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}-2}{\lambda^n+2^n}$，$\lambda$ 为常数，且 $\lambda+2\neq 0$}. 则 M 的所有元素的和为________.

11. 设函数 $f\left(x\right)=4\sin x\cdot\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2}\right)+\cos 2x$. 若 $\left|f\left(x\right)-m\right|<2$ 成立的充分条件是 $\dfrac{\pi}{6}\le x\le\dfrac{2\pi}{3}$，则实数 m 的取值范围是________.

12. 若 6^m+2^n+2（m、$n\in N$）是一个完全平方数，则所有可能的（m，n）＝________.

三、解答题（每小题 20 分，共 60 分）

13. 已知函数 $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$（$a$、$b$、$c\in R$），当 $x\in\left[-1,1\right]$ 时，$\left|f\left(x\right)\right|\le 1$.

（1）证明：$\left|b\right|\le 1$；

（2）若 $f\left(0\right)=-1$，$f\left(1\right)=1$，求 a 的值.

14. 已知常数 $a>0$，向量 $\vec{p}=\left(1,0\right)$，$\vec{q}=\left(0,a\right)$，经过定点 $M\left(0,-a\right)$，方向向量为 $\lambda\vec{p}+\vec{q}$ 的直线与经过定点 $N\left(0,a\right)$，方向向量为 $\vec{p}+2\lambda\vec{q}$ 的直线交于点 R，其中 $\lambda\in R$.

（1）求点 R 的轨迹方程；

（2）设 $a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，过 $F\left(0,1\right)$ 的直线 l 交点 R 的轨迹于 A、B 两点，求 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的取值范围.

15. 已知在数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_1=t$，$a_2=t^2$，其中 $t>0$，$x=\sqrt{t}$ 是函数

$$f\left(x\right)=a_{n-1}x^3-3\left[\left(t+1\right)a_n-a_{n+1}\right]x+1\quad（n\ge 2）$$

的一个极值点.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）若$\frac{1}{2}<t<2$，$b_n=\frac{2a_n}{1+a_n^2}$（$n\in N^+$），求证：$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<2^n-2^{-\frac{n}{2}}$.