

2004 年全国高中数学联赛（安徽赛区）

初 赛

（时间：2004 年 9 月 12 日 9:00—11:00）

一、选择题（每小题 6 分，满分 36 分）

1. 设 $a < b < 0$ ，则下列不等关系中不成立的是（ ）.

A. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ B. $\frac{1}{a-b} > \frac{1}{a}$ C. $|a| > |b|$ D. $a^2 > b^2$

2. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x - x^2)$ 单调递减区间是（ ）.

A. $(0, 2)$ B. $[1, +\infty)$ C. $[1, 2)$ D. $(0, 1]$

3. 已知集合 $S \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 26\}$ ，且满足： S 中任何两个元素的和都不能被 5 整除. 则集合 S 中元素的个数最多是（ ）.

A. 10 个 B. 11 个 C. 12 个 D. 13 个

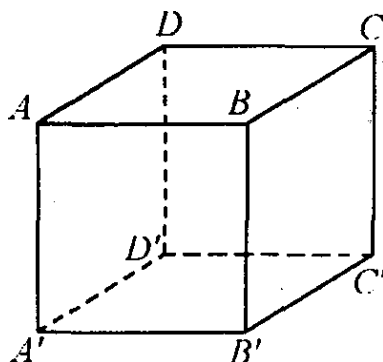
4. 已知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，则 $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha$ 与 1 的大小关系是（ ）.

A. $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha > 1$ B. $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha < 1$

C. $\alpha \sin \alpha + \cos \alpha = 1$ D. 大小与 α 的取值有关

5. 如图，正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 的面 $AB'C'$ 内有一点 M 到两直线 AB 和 $B'C'$ 的距离相等，则 M 的轨迹是（ ）.

A. 抛物线的一部分 B. 双曲线的一部分 C. 椭圆的一部分 D. 线段



6. 已知 $A(a, b)$ ， $B(c, d)$ ， $(a-c)^2 + (b-d)^2 \neq 0$ ，点 $P_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 满足： $\overline{AP_1} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ ，

$\overline{BP_2} = \frac{1}{2} \overline{BP_1}$ ， $\overline{P_n P_{n+2}} = \frac{1}{2} \overline{P_n P_{n+1}}$ ，则点 P_n 的极限位置是（ ）.

A. $\left(\frac{c-a}{3}, \frac{d-b}{3}\right)$ B. $\left(\frac{c-a}{2}, \frac{d-b}{2}\right)$

$$C. \left[\frac{2(c-a)}{3}, \frac{2(d-b)}{3} \right] \quad D. \left[\frac{3(c-a)}{4}, \frac{3(d-b)}{4} \right]$$

二、填空题（每小题 9 分，共 54 分）

7. 如果 a 、 b 、 c 是三角形的三边长，且满足 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$ ，则这个三角形的形状是_____.

8. 一个数列的各项均为 3 和 5，首项为 3，且在第 k 个 3 和第 $k+1$ 个 3 之间有 2^{k-1} 个 5，即 3, 5, 3, 5, 5, 3, 5, 5, 5, 5, 3, ……则此数列的前 2004 项的和 $S_{2004} =$ _____.

9. 设直线 $l: y = x + b$ ($0 < b < \frac{1}{2}$) 与抛物线 $y^2 = 2x$ 相交于 A 、 B 两点， O 为坐标原点，则当 $\triangle AOB$ 的面积增大时，直线 l 的方程为_____.

10. 一个正三棱锥的三条侧棱长均为 1，且两两垂直，将这个三棱锥绕着它的高旋转 60° ，则旋转后的三棱锥与原三棱锥公共部分的体积为_____.

11. 某学校盖教学楼，需甲种尺寸的玻璃 400 块，乙种尺寸的玻璃 500 块，商店中有 A 、 B 两种规格的玻璃. 已知 A 种每块 48 元，可裁成甲、乙两种尺寸的玻璃各为 5 块. 该校购买 A 、 B 两种规格的玻璃所付出的最少费用是_____元.

$$12. \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x + a, & x \leq 0 \\ f(x-1), & x > 0 \end{cases}, \text{ 且方程 } f(x) = x \text{ 恰有两解, 则实数 } a \text{ 的取值范围是_____}.$$

三、解答题（每小题 20 分，共 60 分）

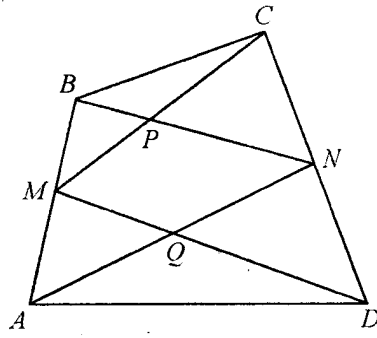
13. 已知 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上有意义， $f\left(\frac{1}{2}\right) = -1$ ，且满足 $x, y \in (-1, 1)$ 时，有

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

(1) 数列 $\{x_n\}$ 满足： $x_1 = \frac{1}{2}$ ， $x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+x_n^2}$. 设 $a_n = f(x_n)$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = n^2 + 3n + 1$ ，求 $1 + f\left(\frac{1}{b_1}\right) + f\left(\frac{1}{b_2}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{b_{2002}}\right) + f\left(\frac{1}{2004}\right)$ 的值.

14. 如图，点 M ， N 是四边形 $ABCD$ 中边 AB 、 CD 的中点， BN 与 MC 交于点 P ， AN 与 DM 相交于点 Q . 求证：四边形 $MQNP$ 面积等于 $\triangle BCP$ 与 $\triangle ADQ$ 面积和，即 $S_{MQNP} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle ADQ}$.



15. 甲、乙两人轮流掷一个均匀的硬币，谁先掷出正面，谁获胜，他们玩了好多局，而且前一局的输家下一局先掷. 若甲第一场先掷，则第6局甲获胜的概率是多少？

中华数学竞赛网www.100math.com

中华数学竞赛网www.100math.com