

1985 年第 5 届全国高中数学联赛

第一试

一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 假如有两个命题：甲： a 是大于零的实数；乙： $a > b$ 且 $a^{-1} > b^{-1}$ ，那么（ ）.

- A. 甲是乙的充分而不必要条件 B. 甲是乙的必要而不充分条件
C. 甲是乙的充分必要条件 D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

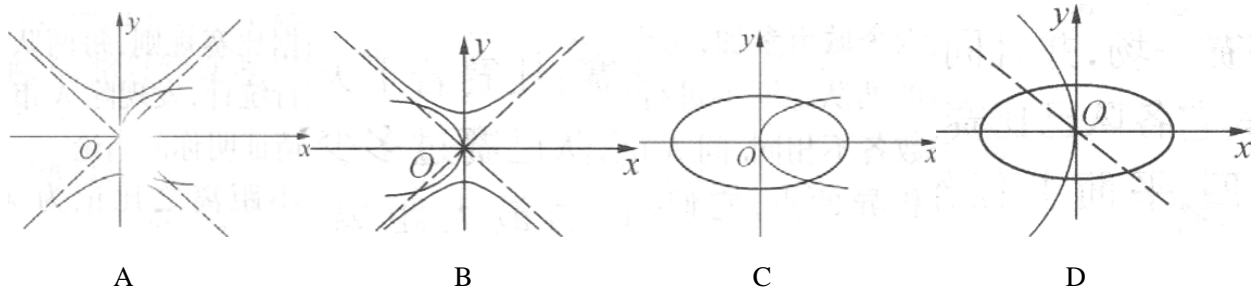
2. PQ 为经过抛物线 $y^2 = 2px$ 焦点的任意一条弦， MN 为 PQ 的准线 l 上的射影， PQ 线 l 转一周所得的旋转面面积为 S_1 ，以 MN 为直径的球面面积为 S_2 ，则下面的结论中，正确的是（ ）.

- A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 < S_2$ C. $S_1 \geq S_2$ D. 有时 $S_1 > S_2$ ，有时 $S_1 = S_2$ ，有时 $S_1 < S_2$

3. 已知方程 $\arccos \frac{4}{5} - \arccos \left(-\frac{4}{5} \right) = \arcsin x$ ，则（ ）.

- A. $x = \frac{24}{25}$ B. $x = -\frac{24}{25}$ C. $x = 0$ D. 这样的 x 不存在

4. 在下列四个图形中，已知有一个是方程 $mx + ny^2 = 0$ 与 $mx^2 + ny^2 = 1$ ($m \neq 0$, $n \neq 0$) 在同一坐标系中的示意图，它应是（ ）.



5. 设 Z , W , λ 为复数， $|\lambda| \neq 1$ ，关于 Z 的方程 $\bar{Z} - \lambda Z = W$ 有下面四个结论：

- (1) $Z = \frac{\bar{\lambda}W + \bar{W}}{1 - |\lambda|^2}$ 是这个方程的解；(2) 这个方程只有一个解；(3) 这个方程有两个解；(4) 这

个方程有无穷多解. 则（ ）.

- A. 只有 (1) 和 (2) 是正确的 B. 只有 (1) 和 (3) 是正确的
C. 只有 (1) 和 (4) 是正确的 D. 以上 ABC 都不正确

6. 设 $0 < a < 1$ ，若 $x_1 = a$ ， $x_2 = a^{x_1}$ ， $x_3 = a^{x_2}$ ， \dots ， $x_n = a^{x_{n-1}}$ ， \dots 则数列 $\{x_n\}$ （ ）.

- A. 是递增的 B. 是递减的

C. 奇数项是递增的，偶数项是递减的 D. 偶数项是递增的，奇数项是递减的

二、填空题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若角 A, B, C 的大小成等比数列，且 $b^2 - a^2 = ac$ ，则角 B 的弧度数等于_____.

2. 方程 $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$ 的非负整数解共有_____组.

3. 在已知数列 1, 4, 8, 10, 16, 19, 21, 25, 30, 43 中，相领若干数之和能被 11 整除的数组共有_____.

4. 对任意实数 x, y ，定义运算 $x * y$ 为 $x * y = ax + by + cxy$ ，其中 a, b, c 为常数，等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算，现已知 $1 * 2 = 3$ ， $2 * 3 = 4$ ，并且有一个非零实数 d ，使得对于任意实数 x 都有 $x * d = x$ ，则 $d =$ _____.

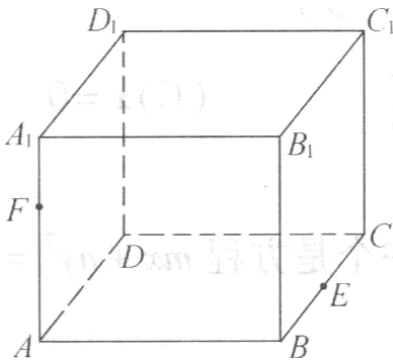
第二试

一、(15 分)

在直角坐标系 xOy 中，点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的坐标均为一位正整数， OA 与 x 轴正方向的夹角大于 45° ， OB 与 x 轴正方向的夹角小于 45° ， B 在 x 轴上的射影为 B' ， A 在 y 轴上的射影为 A' ， $\triangle OB'B$ 的面积比 $\triangle OA'A$ 的面积大 33.5，由 x_1, y_1, x_2, y_2 组成四位数，并写出求解过程.

二、(15 分)

如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 是 BC 的中点， F 在 AA_1 上，且 $A_1F : FA = 1 : 2$ ，求平面 B_1EF 与底面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成的二面角.



三、(15 分)

某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队. 根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，

并且同一城市的两队之间不进行比较；比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同. 问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论.

四、(15 分)

平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为 λ ，求证： $\lambda \geq 2\sin 54^\circ$ ，并讨论等号成立的充要条件.

中华数学竞赛网www.100math.com

中华数学竞赛网www.100math.com