

# 1985 年第 5 届全国高中数学联赛

## 第一试

### 一、选择题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 假如有两个命题：甲： $a$  是大于零的实数；乙： $a > b$  且  $a^{-1} > b^{-1}$ ，那么（ ）。

- A. 甲是乙的充分而不必要条件    B. 甲是乙的必要而不充分条件  
C. 甲是乙的充分必要条件    D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

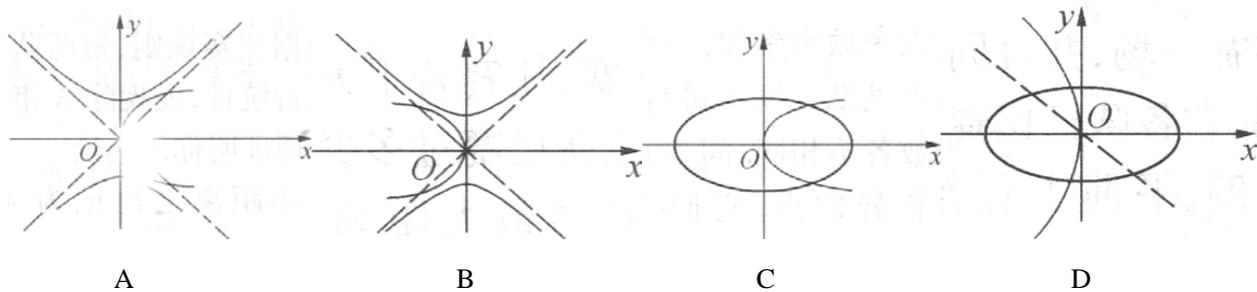
2.  $PQ$  为经过抛物线  $y^2 = 2px$  焦点的任意一条弦， $MN$  为  $PQ$  的准线  $l$  上的射影， $PQ$  绕  $l$  转一周所得的旋转面面积为  $S_1$ ，以  $MN$  为直径的球面面积为  $S_2$ ，则下面的结论中，正确的是（ ）。

- A.  $S_1 > S_2$     B.  $S_1 < S_2$     C.  $S_1 \geq S_2$     D. 有时  $S_1 > S_2$ ，有时  $S_1 = S_2$ ，有时  $S_1 < S_2$

3. 已知方程  $\arccos \frac{4}{5} - \arccos \left( -\frac{4}{5} \right) = \arcsin x$ ，则（ ）。

- A.  $x = \frac{24}{25}$     B.  $x = -\frac{24}{25}$     C.  $x = 0$     D. 这样的  $x$  不存在

4. 在下列四个图形中，已知有一个是方程  $mx + ny^2 = 0$  与  $mx^2 + ny^2 = 1$  ( $m \neq 0, n \neq 0$ ) 在同一坐标系中的示意图，它应是（ ）。



5. 设  $Z, W, \lambda$  为复数， $|\lambda| \neq 1$ ，关于  $Z$  的方程  $\bar{Z} - \lambda Z = W$  有下面四个结论：

- (1)  $Z = \frac{\bar{\lambda}W + \bar{W}}{1 - |\lambda|^2}$  是这个方程的解；(2) 这个方程只有一个解；(3) 这个方程有两个解；(4) 这

个方程有无穷多解。则（ ）。

- A. 只有 (1) 和 (2) 是正确的    B. 只有 (1) 和 (3) 是正确的  
C. 只有 (1) 和 (4) 是正确的    D. 以上 ABC 都不正确

6. 设  $0 < a < 1$ ，若  $x_1 = a, x_2 = a^{x_1}, x_3 = a^{x_2}, \dots, x_n = a^{x_{n-1}}, \dots$  则数列  $\{x_n\}$ （ ）。

- A. 是递增的    B. 是递减的

- C. 奇数项是递增的，偶数项是递减的      D. 偶数项是递增的，奇数项是递减的

## 二、填空题（每小题 6 分，共 24 分）

1. 在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 若角  $A, B, C$  的大小成等比数列，且  $b^2 - a^2 = ac$ ，则角  $B$  的弧度数等于\_\_\_\_\_.
2. 方程  $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$  的非负整数解共有\_\_\_\_\_组.
3. 在已知数列 1, 4, 8, 10, 16, 19, 21, 25, 30, 43 中，相领若干数之和能被 11 整除的数组共有\_\_\_\_\_.
4. 对任意实数  $x, y$ ，定义运算  $x * y$  为  $x * y = ax + by + cxy$ ，其中  $a, b, c$  为常数，等式右端中的运算是通常的实数加法、乘法运算，现已知  $1 * 2 = 3$ ， $2 * 3 = 4$ ，并且有一个非零实数  $d$ ，使得对于任意实数  $x$  都有  $x * d = x$ ，则  $d =$ \_\_\_\_\_.

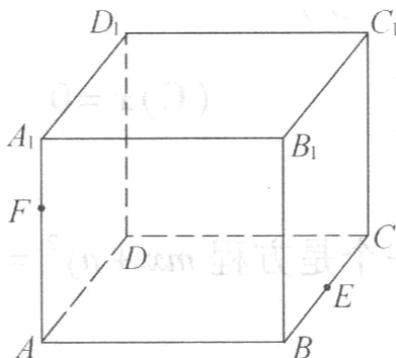
## 第二试

### 一、(15 分)

在直角坐标系  $xOy$  中，点  $A(x_1, y_1)$  和点  $B(x_2, y_2)$  的坐标均为一位正整数， $OA$  与  $x$  轴正方向的夹角大于  $45^\circ$ ， $OB$  与  $x$  轴正方向的夹角小于  $45^\circ$ ， $B$  在  $x$  轴上的射影为  $B'$ ， $A$  在  $y$  轴上的射影为  $A'$ ， $\triangle OB'B$  的面积比  $\triangle OA'A$  的面积大 33.5，由  $x_1, y_1, x_2, y_2$  组成四位数，并写出求解过程.

### 二、(15 分)

如图，在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $E$  是  $BC$  的中点， $F$  在  $AA_1$  上，且  $A_1F : FA = 1 : 2$ ，求平面  $B_1EF$  与底面  $A_1B_1C_1D_1$  所成的二面角.



### 三、(15 分)

某足球邀请赛有十六个城市参加，每市派出甲、乙两个队. 根据比赛规则，每两队之间至多赛一场，

并且同一城市的两队之间不进行比较；比赛若干天后进行统计，发现除 A 市甲队外，其它各队已比赛过的场数各不相同. 问 A 市乙队已赛过多少场？请证明你的结论.

#### 四、(15 分)

平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比记为  $\lambda$ ，求证： $\lambda \geq 2\sin 54^\circ$ ，并讨论等号成立的充要条件.

中华数学竞赛网www.100math.com

中华数学竞赛网www.100math.com