1984年第4届全国高中数学联赛

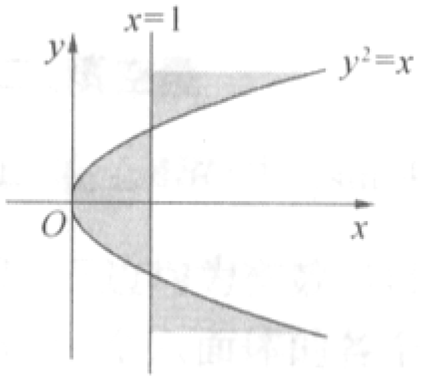
第一试

一、选择题

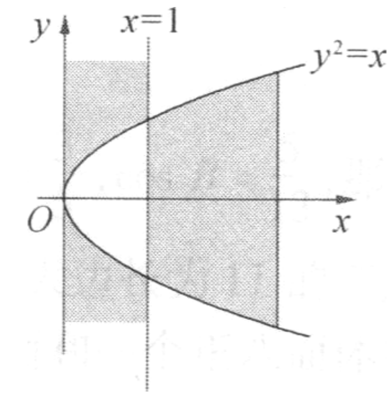
1. 集合 $S=\left\{\overline{z^2}\,\middle|\,\arg z=a,\ a\in R\right\}$ 在复平面的图形是（　　）.

A. 射线 $\arg z=2a$　　B. 射线 $\arg z=-2a$　　C. 射线 $\arg z=-a$　　D. 上述答案都不对

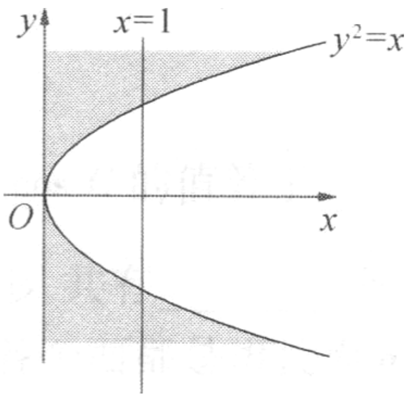
2. 下列四个图的阴影部分（不包括边界）满足不等式 $\log_x\left(\log_x y^2\right)>0$ 的是（　　）.



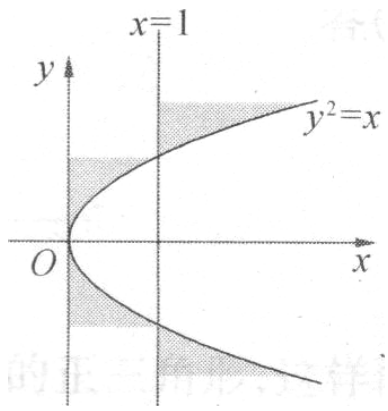
A



B



C



D

3. 对所有满足 $1\le n\le m\le 5$ 的 m，n，极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-C_m^n\cos\theta}$ 表示的不同双曲线条数是（　　）.

A. 15　　B. 10　　C. 7　　D. 6

4. 方程 $\sin x=\lg x$ 的实根是（　　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 大于3

5. 若 $a>0$，$a\neq 1$，$F(x)$ 是奇函数，则 $G(x)=F(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 是（　　）.

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 不是奇函数也不是偶函数　　D. 奇偶性与a的具体数值有关

6. 若$F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x$，则下列等式中正确的是（　　）.

A. $F(-2-x)=-2-F(x)$　　B. $F(-x)=F\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

C. $F\left(x^{-1}\right)=F(x)$　　D. $F\left[F(x)\right]=-x$

7. 若动点P（x，y）以等角速度ω在单位圆上逆时针运动，则点Q（$-2xy$，y^2-x^2）的运动方程是（　　）.

A. 以角速度ω在单位圆上顺时针运动　　B. 以角速度ω在单位圆上逆时针运动

C. 以角速度2ω在单位圆上顺时针运动　　D. 以角速度2ω在单位圆上逆时针运动

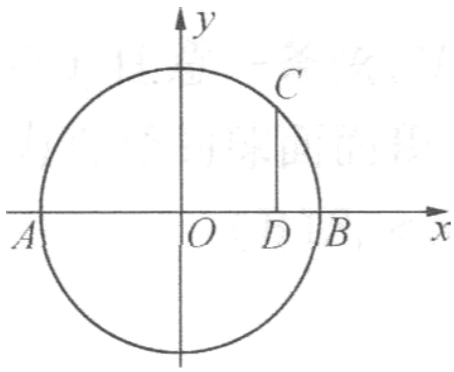
8. 若四面体的一条棱长是x，其余棱长都是1，体积是$F(x)$，则函数$F(x)$在其定义域上（　　）.

A. 是增函数但无最大值　　B. 是增函数且有最大值

C. 不是增函数且无最大值　　D. 不是增函数但有最大值

二、填空题

1. 如图，AB是单位圆的直径，在AB上任取一点D，作$DC\perp AB$，交圆周于C. 若D点的坐标为（x，0），则当$x\in$________时，线段AD，BD，CD可构成三角形.



2. 方程$\cos\frac{x}{4}=\cos x$的通解是________，在（0，24π）内，不相同的解有________个.

第二试

一、下列命题是否正确？若正确，请给予证明.

1. 若P，Q是直线l同侧的两个不同点，则必存在两个不同的圆，通过点P，Q且和直线l相切.

2. 若$a>0$，$b>0$且$a\neq 1$，$b\neq 1$，则$\log_a b+\log_b a\geq 2$.

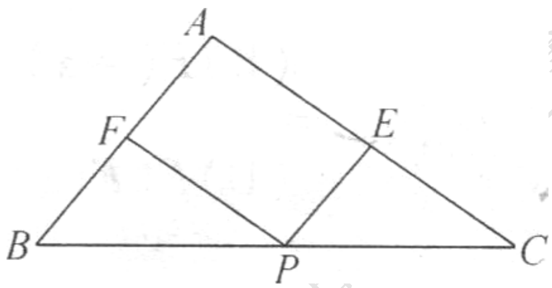
3．设 A，B 是坐标平面上的两个点集，$C_r=\left\{(x,y)\left|x^2+y^2\le r^2\right.\right\}$．若对任何 $r\ge 0$ 都有 $C_r\cup A\subseteq C_r\cup B$，则必有 $A\subseteq B$．

二、

已知两条异面直线 a，b 所成的角为 θ，它们的公垂线 $A'A$ 的长度为 d，在直线 a，b 上分别取点 E，F，设 $A'E=m$，$AF=n$，求 EF．（A' 在直线 a 上，A 在直线 b 上）

三、

如图，在 ΔABC 中，P 为边 BC 上任意一点，$PE\,/\!/\,BA$，$PF\,/\!/\,CA$．若 $S_{\Delta ABC}=1$，证明 $S_{\Delta BPF}$，$S_{\Delta PCE}$ 和 $S_{\square PEAF}$ 中至少有一个不小于 $\frac{4}{9}$．（S 表示图形的面积）



四、

设 a_n 是 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的个位数字，$n=1$，2，3，$\cdots$ 试证 $\overline{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots}$ 是有理数.

五、

设 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 都是正数，求证：$\frac{x_1^{\ 2}}{x_2}+\frac{x_2^{\ 2}}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}^{\ \ 2}}{x_n}+\frac{x_n^{\ 2}}{x_1}\ge x_1+x_2+\cdots+x_n$．