1983 年第 3 届全国高中数学联赛

第一试

一、选择题

1. 设 p，q 是自然数，条件甲：p^3-q^3 是偶数；条件乙：$p+q$ 是偶数，那么，（　　）.

A. 甲是乙的充分而非必要条件　　B. 甲是乙的必要而非充分条件

C. 甲是乙的充要条件　　D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

2. $x=\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}$ 的值是属于区间（　　）.

A.（-2，-1）　　B.（1，2）　　C.（-3，-2）　　D.（2，3）

3. 已知等腰 ΔABC 的底边 BC 及高 AD 的长都是整数，那么 $\sin A$ 和 $\cos A$ 中，（　　）.

A. 一个是有理数，另一个是无理数　　B. 两个都是有理数

C. 两个都是无理数　　D. 是有理数还是无理数要根据 BC 和 AD 的数值来确定

4. 已知 $M=\left\{(x,y)\middle|\, y\ge x^2\right\}$，$N=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+(y-a)^2\le 1\right\}$. 那么，使 $M\cap N=N$ 成立的充要条件是：（　　）.

A. $a\ge 1\frac{1}{4}$　　B. $a=1\frac{1}{4}$　　C. $a\ge 1$　　D. $0<a<1$

5. 已知函数 $f(x)=ax^2-c$ 满足：$-4\le f(1)\le -1$，$-1\le f(2)\le 5$. 那么，$f(3)$ 应满足（　　）.

A. $7\le f(3)\le 26$　　B. $-4\le f(3)\le 15$　　C. $-1\le f(3)\le 20$　　D. $-\frac{28}{3}\le f(3)\le \frac{35}{3}$

6. 设 a，b，c，d，m，n 都是正实数. $P=\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$，$Q=\sqrt{ma+nc}\cdot\sqrt{\frac{b}{m}+\frac{d}{n}}$，那么（　　）.

A. $P\ge Q$　　B. $P\le Q$　　C. $P<Q$　　D. P，Q 间的大小关系不确定，而与 m，n 的大小有关

7. 在正方形 $ABCD$ 所在平面上有点 P，使 ΔPAB，ΔPBC，ΔPCD，ΔPDA 都是等腰三角形. 那么，具有这样性质的 P 点个数共有（　　）.

A. 9 个　　B. 17 个　　C. 1 个　　D. 5 个

8. 任间 ΔABC，设它的周长、外接圆半径长与内切圆半径长分别为 l，R 与 r，那么（　　）.

A. $l>R+r$　　B. $l\le R+r$　　C. $\frac{1}{6}<R+r<6l$　　D. ABC 三种关系都不对

二、填空题

1. 在ΔABC中，$\sin A=\dfrac{3}{5}$，$\cos B=\dfrac{5}{13}$，那么$\cos C$的值等于________.

2. 三边均为整数，且最大边长为11的三角形，共有________个.

3. 一个六面体的各个面和一个正八面体的各个面都是边长为a的正三角形，这样两个多面体的内切球的半径之比是一个既约分数$\dfrac{m}{n}$. 那么，积$m\cdot n$是________.

第二试

一、

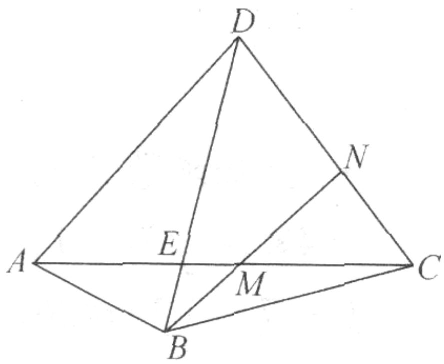
求证：$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，其中$x\in[-1,1]$.

二、

函数$f(x)$在$[0,1]$上有定义，$f(0)=f(1)$，如果对于任意不同的x_1，$x_2\in[0,1]$，都有$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|<\dfrac{1}{2}$. 求证：$\left|f(x_2)-f(x_1)\right|<\dfrac{1}{2}$.

三、

如图，在四边形$ABCD$中，ΔABD，ΔBCD，ΔABC的面积比是$3:4:1$，点M，N分别在AC，CD上，满足$AM:AC=CN:CD$，并且B，M，N三点共线. 求证：M与N分别是AC与CD的中点.



四、

在六条棱分别为2，3，3，4，5，5的所有四面体中，最大的体积是多少？证明你的结论.

五、

函数$F(x)=\left|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B\right|$在$0\le x\le\dfrac{3}{2}\pi$上的最大值$M$与参数$A$，$B$有关. 问$A$，$B$取什么值时$M$为最小？证明你的结论.