

中国数学奥林匹克(CMO)
历届试题及解答

1986-2005

第一届中国数学奥林匹克(1986年)
天津 南开大学

1. 已知 a_1, a_2, \dots, a_n 为实数, 如果它们中任意两数之和非负, 那么对于满足

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$$

的任意非负实数 x_1, x_2, \dots, x_n , 有不等式

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$$

成立. 请证明上述命题及其逆命题.

证明: 原命题的证明: 由 $0 \leq x_i \leq 1, x_i - x_i^2 \geq 0, x_i \geq x_i^2 (i = 1, 2, \dots, n)$.

(1) 若 $a_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, 则显然有 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \geq a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2$;

(2) 否则至少存在一个 $a_i < 0$, 由对称性不妨设 $a_1 < 0$. 又因为 a_1, a_2, \dots, a_n 中任两数之和非负, 所以 $a_i + a_1 \geq 0, a_i \geq -a_1 > 0 (i = 2, 3, \dots, n)$.

$$\begin{aligned} \therefore & a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n - a_1x_1^2 - a_2x_2^2 - \dots - a_nx_n^2 \\ &= a_1(x_1 - x_1^2) + a_2(x_2 - x_2^2) + \dots + a_n(x_n - x_n^2) \\ &\geq a_1(x_1 - x_1^2) + (-a_1)(x_2 - x_2^2) + \dots + (-a_1)(x_n - x_n^2) \\ &= (-a_1)(x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2 - x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= (-a_1)(x_1^2 - x_1 + (1 - x_1) - x_2^2 - \dots - x_n^2) \\ &= (-a_1)((1 - x_1)^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2) \\ &= (-a_1)((x_2 + \dots + x_n)^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2) \geq 0 \end{aligned}$$

最后一步是由于 $x_2, x_3, \dots, x_n > 0, (x_2 + \dots + x_n)^2 = x_2^2 + \dots + x_n^2 + \sum_{2 \leq i < j \leq n} x_ix_j \geq x_2^2 + \dots + x_n^2$.

逆命题的证明: 对于任意的 $1 \leq i < j \leq n$, 令 $x_i = x_j = \frac{1}{2}$, 其余 x_k 均等于 0. 则 $\frac{1}{2}(a_i + a_j) \geq \frac{1}{4}(a_i + a_j)$.

$\therefore a_i + a_j \geq 0$, 即任两数之和非负. 证毕.

2. 在三角形 ABC 中, BC 边上的高 $AD = 12$, $\angle A$ 的平分线 $AE = 13$, 设 BC 边上的中线 $AF = m$, 问 m 在什么范围内取值时, $\angle A$ 分别为锐角, 直角, 钝角?

解: 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 不妨设 $AB > AC, \angle B$ 为锐角.

则 OF 垂直平分线段 BC , 由外心的性质, $\angle C$ 为锐角时, $\angle OAB = \angle OBA = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle C) = 90^\circ - \angle C$.

又因为 $AD \perp BC, \therefore \angle CAD = 90^\circ - \angle C, \therefore \angle OAB = \angle DAC$.

类似地, 当 $\angle C$ 为直角或钝角时也有 $\angle OAB = \angle DAC$.

由 AE 平分 $\angle BAC, \angle BAE = \angle CAE, \therefore \angle OAE = \angle DAE$. (由于 F, D 在 E 两侧).

$\angle A$ 为锐角时, O, A 在 BC 同侧, $\angle FAE < \angle OAE = \angle DAE$;

$\angle A$ 为直角时, O, F 重合, $\angle FAE = \angle OAE = \angle DAE$;

$\angle A$ 为钝角时, O, A 在 BC 异侧, $\angle FAE > \angle OAE = \angle DAE$.

由正弦定理 $\frac{\sin \angle FAE}{\sin \angle DAE} = \frac{FE}{DE} \times \frac{AD}{AF}$. 其中 $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = 5$,

$FE = FD - DE = \sqrt{AF^2 - AD^2} - DE = \sqrt{m^2 - 12^2} - 5 > 0. \therefore m > 13$,

且 $\angle A$ 为锐角等价于 $\frac{\sqrt{m^2 - 12^2} - 5}{5} \times \frac{12}{m} < 1$;

$\angle A$ 为直角等价于 $\frac{\sqrt{m^2 - 12^2} - 5}{5} \times \frac{12}{m} = 1$;

$\angle A$ 为钝角等价于 $\frac{\sqrt{m^2 - 12^2} - 5}{5} \times \frac{12}{m} > 1$.

解得当 $13 < m < \frac{2028}{119}$ 时, $\angle A$ 为锐角;

当 $m = \frac{2028}{119}$ 时, $\angle A$ 为直角;

当 $m > \frac{2028}{119}$ 时, $\angle A$ 为钝角.

3. 设 z_1, z_2, \dots, z_n 为复数, 满足

$$|z_1| + |z_2| + \dots + |z_n| = 1.$$

求证: 上述 n 个复数中, 必存在若干个复数, 它们的和的模不小于 $\frac{1}{6}$.

证明: 设 $z_k = x_k + y_k i (x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n)$

将所有的 z_k 分为两组 X, Y. 若 $|x_k| \geq |y_k|$, 则将 z_k 放入 X 中; 若 $|y_k| \geq |x_k|$, 则将 z_k 放入 Y 中. 其中必有一组中所有复数模长之和不小于 $\frac{1}{2}$. 不妨设为 X.

再将 X 中的复数分为两组 A, B. 若 $x_k \geq 0$, 则将 z_k 放入 A 中; 若 $x_k \leq 0$, 则将 z_k 放入 B 中. 其中必有一组中的所有复数模长之和不小于 $\frac{1}{4}$. 不妨设为 A.

则 $\sum_{z_k \in A} |z_k| \geq \frac{1}{4}$, 即 $\sum_{z_k \in A} \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \geq \frac{1}{4}$.

而对于 $z_k \in A, x_k^2 \geq y_k^2, \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \leq \sqrt{2} x_k$.

$\therefore \sum_{z_k \in A} x_k \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \therefore \left| \sum_{z_k \in A} z_k \right| = \left| \sum_{z_k \in A} x_k + i \sum_{z_k \in A} y_k \right| \geq \sum_{z_k \in A} x_k \geq \frac{1}{4\sqrt{2}}$.

而 $4\sqrt{2} < 6, \therefore \left| \sum_{z_k \in A} z_k \right| \geq \frac{1}{6}$.

即 A 中复数之和的模不小于 $\frac{1}{6}$. 证毕.

另证: 设 $z_k = x_k + y_k i (x_k, y_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots, n)$

则 $|z_k| = \sqrt{x_k^2 + y_k^2} \geq |x_k| + |y_k|$.

$\therefore \sum_{k=1}^n |x_k| + |y_k| \geq 1$.

$\therefore \left| \sum_{x_k \geq 0} x_k \right| + \left| \sum_{x_k < 0} x_k \right| + \left| \sum_{y_k \geq 0} y_k \right| + \left| \sum_{y_k < 0} y_k \right| \geq 1$.

其中必有一项不小于 $\frac{1}{4}$, 不妨设为第一项, 则 $\left| \sum_{x_k \geq 0} x_k \right| \geq \frac{1}{4}$.

$\therefore \left| \sum_{x_k \geq 0} z_k \right| = \left| \sum_{x_k \geq 0} x_k + i \sum_{x_k \geq 0} y_k \right| \geq \left| \sum_{x_k \geq 0} x_k \right| \geq \frac{1}{4} > \frac{1}{6}$. 证毕.

4. 已知: 四边形 $P_1 P_2 P_3 P_4$ 的四个顶点位于三角形 ABC 的边上.

求证: 四个三角形 $\triangle P_1 P_2 P_3, \triangle P_1 P_2 P_4, \triangle P_1 P_3 P_4, \triangle P_2 P_3 P_4$ 中, 至少有一个的面积不大于 $\triangle ABC$ 的面积的四分之一.

证明: 有两种情况: (1) 四个顶点在两条边上; (2) 四个顶点在三条边上.

(1) 不妨设 P_1, P_4 在 AB 上, P_2, P_3 在 AC 上, P_1, P_2 分别在 AP_4, AP_3 上. 将 B 移至 P_4, C 移至 P_3 , 三角形 ABC 的

面积减小,归为情形(2).

(2)不妨设 P_1 在 AB 上, P_2 在 AC 上, P_3, P_4 在 BC 上, P_3 在 P_4C 上.

(2.1)若 $P_1P_2 \parallel BC$,设 $\frac{AP_1}{AB} = \frac{AP_2}{AC} = \lambda, P_1P_2 = \lambda BC$. P_1P_2 到 BC 的距离为 $(1-\lambda)h$, h 为三角形 ABC 中 BC 边上的高的长度.

$$\therefore S_{\Delta P_1P_2P_3} = \lambda(1-\lambda)S_{\Delta ABC} \leq \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}.$$

(2.2)若 P_1P_2 不平行于 BC ,不妨设 P_1 到 BC 的距离大于 P_2 到 BC 的距离. 过 P_2 作平行于 BC 的直线交 AB 于 E ,交 P_1P_4 于 D .则 $S_{\Delta P_1P_2P_3}, S_{\Delta P_4P_2P_3}$ 中有一个不大于 $S_{\Delta DP_2P_3}$,也就不大于 $S_{\Delta EP_2P_3}$.

由(2.1)知 $S_{\Delta EP_2P_3} \leq \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$.则 $S_{\Delta P_1P_2P_3}, S_{\Delta P_4P_2P_3}$ 中有一个不大于 $\frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$.证毕.

5.能否把 $1, 1, 2, 2, \dots, 1986, 1986$ 这些数排成一行,使得两个1之间夹着1个数,两个2之间夹着2个数, \dots ,两个1986之间夹着1986个数.请证明你的结论.

解:不能.假设可以做出这样的排列,将已排好的数按顺序编号为 $1, 2, \dots, 3972$.

当 n 为奇数时,两个 n 的编号奇偶性相同;当 n 为偶数时,两个 n 的编号奇偶性不同.而1到1986之间有993个偶数,所以一共有 $2k + 993$ 个编号为偶数的数. $(k \in \mathbb{N}^*)$ 但是1到3972之间有1986个偶数, $k = 496.5$.矛盾.所以不能按要求排成这样一行.

6.用任意的方式,给平面上的每一点染上黑色或白色.求证:一定存在一个边长为1或 $\sqrt{3}$ 的正三角形,它的三个顶点是同色的.

证明:(1)若平面上存在距离为2的两个点 A, B 异色,设 O 为它们的中点,不妨设 A, O 同色.考虑以 AO 为一边的正三角形 AOC, AOD ,若 C, D 中有一个与 A, O 同色,则该三角形满足题意.否则 BCD 为边长 $\sqrt{3}$ 的同色正三角形.

(2)否则平面上任两个距离为2的点均同色,考虑任意两个距离为1的点,以他们连线为底,2为腰长作等腰三角形,则任一腰的两顶点同色.所以三个顶点同色,即任两个距离为1的点同色.所以平面上任意一个边长为1的正三角形三个顶点同色.证毕.

第二届中国数学奥林匹克(1987年)
北京 北京大学

1. 设 n 为自然数, 求证方程 $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 有模为 1 的复根的充分必要条件是 $n + 2$ 可被 6 整除.

证明: 当 $6|n + 2$ 时, 令 $z = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z^6 = 1$, $|z| = 1$.

$$\therefore z^{n+1} - z^n - 1 = e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}} - 1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 1 = 0.$$

$\therefore z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 有模为 1 的复根.

若 $z^{n+1} - z^n - 1 = 0$ 有模为 1 的复根 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

$$\text{则 } z^{n+1} - z^n - 1 = (\cos(n+1)\theta - \cos n\theta - 1) + i(\sin(n+1)\theta - \sin n\theta) = 0.$$

$$\therefore \cos(n+1)\theta - \cos n\theta - 1 = -(2 \sin \frac{2n+1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} + 1) = 0.$$

$$\sin(n+1)\theta - \sin n\theta = 2 \cos \frac{2n+1}{2}\theta \sin \frac{\theta}{2} = 0.$$

$$\therefore \cos \frac{2n+1}{2}\theta = 0, \sin \frac{2n+1}{2}\theta = \pm 1, \sin \frac{\theta}{2} = \pm \frac{1}{2}, \text{ 设 } \frac{\theta}{2} = \varphi.$$

$$(1) \sin \varphi = \frac{1}{2}, \sin(2n+1)\varphi = -1. \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2n+1)\varphi = (2l + \frac{3}{2})\pi (l \in \mathbb{Z}). \therefore (2n+1)(2k + \frac{1}{6}) = 2l + \frac{3}{2}, \frac{2n+1}{6} = 2t + \frac{3}{2}, n = 6t + 4 (t \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{或 } (2n+1)(2k + \frac{5}{6}) = 2l + \frac{3}{2}, \frac{5(2n+1)}{6} = 2t + \frac{3}{2}, 5|4t + 3, t \equiv 3 \pmod{5} (t \in \mathbb{Z}).$$

设 $t = 5s + 3$, 则 $n = 6s + 4$, 总有 $6|n + 2$.

$$(2) \sin \varphi = -\frac{1}{2}, \sin(2n+1)\varphi = 1. \text{ 显然以 } -\varphi \text{ 代 } \varphi \text{ 即有 (1). 所以 } 6|n + 2. \text{ 证毕.}$$

2. 把边长为 1 的正三角形 ABC 的各边都 n 等分, 过各分点平行于其它两边的直线, 将这三角形分成若干个小三角形, 这些小三角形的顶点都称为结点, 并且在每一结点上放置了一个实数. 已知:

(1) A, B, C 三点上放置的数分别为 a, b, c .

(2) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中, 两组相对顶点上放置的数之和相等.

试求: (1) 放置最大数的点和放置最小数的点之间的最短距离.

(2) 所有结点上数的总和 S .

解: (1) 不难证明同一直线上相邻三个结点上放置的数中间一个为两边的等差中项, 所以同一直线上的数按顺序成等差数列. 若两端的数相等, 则所有的数都相等. 否则两端的数为最大的和最小的.

若 a, b, c 相等, 显然所有数都相等, 最短距离显然为 0.

若 a, b, c 两两不等, 最大的数与最小的数必出现在 A, B, C 上, 最短距离为 1.

若 a, b, c 有两个相等但不与第三个相等, 不妨设 $a = b > c$, 最小的数为 c , 最大的数出现在线段 AB 的任意结点上. 当 n 为偶数时, 与 C 最近的为 AB 中点, 最短距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 当 n 为奇数时, 与 C 最近的为 AB 中点向两边偏 $\frac{1}{2n}$ 的点, 最短距离为 $\frac{1}{2}\sqrt{3 + \frac{1}{n^2}}$.

(2) 将这个三角形绕中心旋转 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 弧度, 得到的两个三角形也满足题意(2). 将这三个三角形对应结点的数相加形成的三角形也满足(2), 三个顶点上的数均为 $a + b + c$. 由(1)的分析知所有结点上的数均为 $a + b + c$. 共 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个结点, $\therefore S = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(n+1)(n+2))(a+b+c) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(a+b+c)$.

3. 某次体育比赛, 每两名选手都进行一场比赛, 每场比赛一定决出胜负, 通过比赛确定优秀选手, 选手 A 被确定为优秀选手的条件是: 对任何其它选手 B , 或者 A 胜 B , 或者存在选手 C , C 胜 B , A 胜 C . 结果按上

述规则确定的优秀选手只有一名, 求证: 这名选手一定胜所有其它选手.

证明: 假设该优秀选手为A, 且存在其他选手胜A.

设B为所有胜A的人中胜的场次最多的一个, 由B不是优秀选手, 必存在选手C使得C胜B, 且不存在选手D使得B胜D, D胜C. 由B胜A, C也胜A, 且C胜B胜过的所有人. C至少比B多胜一场, 且C胜A, 与B的选取矛盾. 所以A胜所有人.

4. 在一个面积为1的正三角形内部, 任意放五个点, 试证: 在此正三角形内, 一定可以作三个正三角形盖住这五个点, 这三个正三角形的各边分别平行于原三角形的边, 并且它们的面积之和不超过0.64.

证明: 可将0.64换成 $\frac{100}{169} + \varepsilon (\varepsilon > 0)$.

在面积为1的正三角形 ABC 中, 在 AB 上取 A_1, B_2 , AC 上取 A_2, C_1 , BC 上取 B_1, C_2 , 使得 $AA_1 = AA_2 = BB_1 = BB_2 = CC_1 = CC_2 = \frac{3}{13}AB$. 连结 A_1C_2, A_2B_1, B_2C_1 交于 A_0, B_0, C_0 .

(1) 若 $\triangle AB_2C_1, \triangle BC_2A_1, \triangle CA_2B_1$ 中有一个至少包含五个点中的三个, 另两个点可分别用面积为 $\frac{\varepsilon}{2}$ 的正三角形覆盖, 面积之和为 $(\frac{10}{13})^2 + 2 \times \frac{\varepsilon}{2} = \frac{100}{169} + \varepsilon$.

(2) 菱形 $AA_1A_0A_2, BB_1B_0B_2, CC_1C_0C_2$ 中有两个有两个点, 另一个中有一个点, 则可用两个边长为 $\frac{6}{13}AB$ 的正三角形和一个面积为 ε 的正三角形覆盖. 面积之和为 $2(\frac{6}{13})^2 + \varepsilon < \frac{100}{169} + \varepsilon$.

(3) 菱形 $AA_1A_0A_2, BB_1B_0B_2, CC_1C_0C_2$ 中有两个有一个点, 另一个中有两个点, 不妨设为 $AA_1A_0A_2$, 则 $B_1B_0C_0C_2$ 中有一个点, 不妨设这个点更靠近 B , 则可用一个边长为 $\frac{6}{13}AB$ 的正三角形覆盖 $AA_1A_0A_2$ 中两个点, 用一个边长为 $\frac{6}{13}AB$ 的正三角形覆盖 $BB_1B_0B_2, B_1B_0C_0C_2$ 中的点. 用一个面积为 ε 的正三角形覆盖最后一个点, 面积之和为 $(\frac{6}{13})^2 + (\frac{8}{13})^2 + \varepsilon = \frac{100}{169} + \varepsilon$. 证毕.

注: 当五个点取为 A, B, C, A_0, B_0C_0 中点是不难证明不能用三个面积之和为 $\frac{100}{169}$ 的正三角形覆盖这五个点. 即 $\frac{100}{169} + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ 为最优.

5. 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个四面体, S_1, S_2, S_3, S_4 分别是以 A_1, A_2, A_3, A_4 为球心的球, 它们两两相外切. 如果存在一点 O , 以这点为球心可作一个半径为 r 的球与 S_1, S_2, S_3, S_4 都相切, 还可以作一个半径为 R 的球和四面体的各棱都相切, 求证: 这个四面体是正四面体.

证明: 设 S_i 的半径为 $r_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 则 $A_iA_j = r_i + r_j (1 \leq i < j \leq 4)$.

设 O 到 $A_2A_3A_4$ 的投影为 O_1 , 由 O 到 A_2A_3, A_3A_4, A_4A_2 的距离相等, 得到 O_1 到 $\triangle A_2A_3A_4$ 的三边距离相等. 即 O_1 为 $\triangle A_2A_3A_4$ 的内心, 设 O 到 A_2A_3 的投影为 B , 即 O_1 到 A_2A_3 的投影. 而 $BA_3 = \frac{1}{2}(A_2A_3 + A_3A_4 - A_2A_4) = r_3, OB = R$. 若半径为 r 的球与四个球均外切, 则 $A_3O = r + r_3, (r + r_3)^2 = r_3^2 + R^2, r_3 = \frac{R^2 - r^2}{2r}$. 若半径为 r 的球与四个球均内切, 则 $A_3O = r - r_3, (r - r_3)^2 = r_3^2 + R^2, r_3 = \frac{r^2 - R^2}{2r}$. 类似可求得 r_1, r_2, r_4 均为该值, 所以该四面体各条棱长相等为正四面体.

6. m 个互不相同的正偶数与 n 个互不相同的正奇数的总和为1987, 对于所有这样的 m 与 n , 问 $3m + 4n$ 的最大值是多少? 请证明你的结论.

解: 设 m 个正偶数为 $a_1 < a_2 < \dots < a_m$, n 个正偶数为 $b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

$$\therefore a_i \geq 2i, b_j \geq 2j - 1.$$

$$\therefore 1987 = a_1 + a_2 + \dots + a_m + b_1 + b_2 + \dots + b_n.$$

$$\therefore 1987 \geq 2 + 4 + \dots + 2m + 1 + 3 + \dots + 2n - 1 = m^2 + m + n^2.$$

设 $s = 3m + 4n, m = \frac{1}{3}(s - 4n), \frac{1}{3}(s - 4n)(\frac{1}{3}(s - 4n) + 1) + n^2 \leq 1987$.

$$s^2 - 8ns + 25n^2 + 3s - 12n - 9 \times 1987 \leq 0.$$

$$s^2 + (3 - 8n)s + 25n^2 - 12n - 9 \times 1987 \leq 0.$$

所以判别式 $\Delta = (3 - 8n)^2 - 4(25n^2 - 12n - 9 \times 1987) = 26(1987\frac{1}{4} - n^2) > 0$.

$$s \leq \frac{1}{2}(8n - 3 + 6\sqrt{1987\frac{1}{4} - n^2}).$$

设 $f(n) = 8n + 6\sqrt{1987\frac{1}{4} - n^2}, f'(n) = 8 - 6n(1987\frac{1}{4} - n^2)^{-\frac{1}{2}}$, 又 n 为奇数.

不难知道 $n = 35$ 时, $f(n)$ 有最大值 $280 + 6\sqrt{762\frac{1}{4}}$.

所以 $s \leq \frac{1}{2}(280 + 6\sqrt{762\frac{1}{4}} - 3)$, 由 $s \in \mathbb{N}^*, s \leq 221$.

又当 $s = 221, n = 35, m = 27$. 取 $2, 4, \dots, 52, 60, 1, 3, \dots, 69$ 为和为 1987 的 35 个正奇数与 27 个正偶数, 所以 $3m + 4n$ 的最大值为 221.

第三届中国数学奥林匹克(1988年)

上海 复旦大学

1. 设 a_1, a_2, \dots, a_n 是给定的不全为零的实数, r_1, r_2, \dots, r_n 为实数, 如果不等式

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \dots + r_n(x_n - a_n) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

对任何实数 x_1, x_2, \dots, x_n 成立, 求 r_1, r_2, \dots, r_n 的值.

解: 令 $x_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, $-(r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n) \leq -\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i\right)^2 \geq \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

令 $x_i = 2a_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

$$\therefore \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

由Cauchy不等式, $\left(\sum_{i=1}^n r_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n r_i a_i\right)^2$, $\sum_{i=1}^n r_i^2 \geq 1$.

又令 $x_i = r_i (i = 1, 2, \dots, n)$, $\sum_{i=1}^n r_i^2 - \sum_{i=1}^n r_i a_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2} - \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

由 $\sum_{i=1}^n r_i a_i = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, $\sum_{i=1}^n r_i^2 \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n r_i^2}$, $\sum_{i=1}^n r_i^2 \leq 1$.

$\therefore \sum_{i=1}^n r_i^2 = 1$, 由Cauchy不等式取等号的条件知 $\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2} = \dots = \frac{r_n}{a_n}$.

不难解得 $r_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}} (i = 1, 2, \dots, n)$.

2. 设 C_1, C_2 为同心圆, C_2 的半径是 C_1 的半径的2倍, 四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 内接于 C_1 , 设 $A_4 A_1$ 延长线交圆 C_2 于 B_1 , $A_1 A_2$ 延长线交 C_2 于 B_2 , $A_2 A_3$ 延长线交圆 C_2 于 B_3 , $A_3 A_4$ 延长线交圆 C_2 于 B_4 .

试证: 四边形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 的周长 ≥ 2 (四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的周长). 并确定等号成立的条件.

证明: 设圆心为 O , 连结 OB_1, OB_4, OA_4 , 设 C_1 的半径为 R , C_2 的半径为 $2R$.

在四边形 $B_4 A_4 O B_1$ 中, 由Ptolemy定理, $OA_4 \times B_1 B_4 + OB_1 \times A_4 B_4 \geq OB_4 \times A_4 B_1$.

$R \times B_1 B_4 + 2R \times A_4 B_4 \geq 2R \times A_4 B_1$, 即 $B_1 B_4 \geq 2A_4 B_1 - 2A_4 B_4$.

同理 $B_1 B_2 \geq 2A_1 B_2 - 2A_1 B_1, B_2 B_3 \geq 2A_2 B_3 - 2A_2 B_2, B_3 B_4 \geq 2A_3 B_4 - 2A_3 B_3$.

相加得 $B_1 B_2 + B_2 B_3 + B_3 B_4 + B_4 B_1 \geq 2(A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + A_4 A_1)$.

即四边形 $B_1 B_2 B_3 B_4$ 的周长 ≥ 2 (四边形 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 的周长).

等号成立时 $OA_i B_i B_{i+1}$ 共圆, $\angle A_{i+1} A_i O = \angle B_{i+1} B_i O = \angle B_i B_{i+1} O = \angle A_{i-1} A_i O$,

$\therefore A_{i+1} A_i = A_{i-1} A_i (i = 1, 2, 3, 4, A_5 = A_1, A_0 = A_4, B_5 = B_1)$.

$\therefore A_1 A_2 A_3 A_4$ 为菱形, 又为圆内切四边形, 所以 $A_1 A_2 A_3 A_4$ 为正方形.

3. 在有限的实数列 a_1, a_2, \dots, a_n 中, 如果一段数 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 的算术平均值大于1988, 那么我们把这段数叫做一条“龙”, 并把 a_k 叫做这条龙的“龙头” (如果某一项 $a_n > 1988$, 那么单独这一项也叫龙). 假设以上的数列中至少存在一条龙, 证明: 这数列中全体可以作为龙头的项的算术平均数也必定大

于1988.

证明:引理:设 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$ 均可作为龙头, a_{k+m} 不能作为龙头,或 $k+m-1=n$,
则 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$ 的算术平均值大于1988.

引理的证明:对 m 用数学归纳法, $m=1$ 时,设以 a_k 为龙头的一条龙为 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$.

若 $l=1, a_k > 1988$,显然成立.

否则 $l > 1$,由 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 算术平均值大于1988, a_{k+1} 不是龙头, $a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 算术平均值不大于1988, $a_k > 1988$,结论成立.

设小于 m 时结论均成立($m \geq 2$),设以 a_k 为龙头的一条龙为 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$.

$1 \leq l \leq m$ 时, $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 算术平均值大于1988, 由归纳假设 $a_{k+l}, \dots, a_{k+m-1}$ 算术平均值大于1988,结论成立.

$l > m$ 时,由 a_{k+m} 不是龙头, $a_{k+m}, a_{k+m+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 算术平均值不大于1988, $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+l-1}$ 算术平均值大于1988,结论显然也成立.

综上所述,由数学归纳法,引理成立.

设所有的龙头为 $a_{i_1}, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_1+j_1-1}, a_{i_2}, a_{i_2+1}, \dots, a_{i_2+j_2-1}, \dots, a_{i_k}, a_{i_k+1}, \dots, a_{i_k+j_k-1}$,

其中 $j_1, j_2, \dots, j_k \geq 1$ 且 $i_{m+1} > i_m + j_m (m = 1, 2, \dots, k-1, k \geq 1)$.

由引理: $a_{i_m}, a_{i_m+1}, \dots, a_{i_m+j_m-1}$ 的算术平均值大于1988($m = 1, 2, \dots, k$). 所以所有龙头的算术平均值也大于1988.证毕.

4.(1)设三个正实数 a, b, c 满足

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4).$$

求证: a, b, c 一定是某个三角形的三条边长.

(2)设 n 个正实数 a_1, a_2, \dots, a_n 满足

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

其中 $n \geq 3$. 求证:这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

证明:(1)若不然,不妨设 $c \geq a + b$,则

$$\begin{aligned} & 2(a^4 + b^4 + c^4) - (a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 \\ &= -(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \geq 0 \end{aligned}$$

矛盾. $\therefore a, b, c$ 为某个三角形三边长.

(2) $n=3$ 即为(1)中的情况, $n > 3$ 时,若存在某三个不是某个三角形三条边长,不妨设为 a_1, a_2, a_3 .则由均值不等式

$$\begin{aligned} & (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4) < (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^2 \\ &= \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} + \dots + a_n^2 \right)^2 \\ &\leq (n-1) \left[\left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} \right)^2 + \left(\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2} \right)^2 + \dots + a_n^4 \right] \end{aligned}$$

可得 $\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2 > a^4 + b^4 + c^4, (a^2 + b^2 + c^2)^2 > 2(a^4 + b^4 + c^4)$.

但由(1), a_1, a_2, a_3 为某个三角形三边长, 矛盾. 所以这些数中任何三个一定是某个三角形的三条边长.

5. 给出三个四面体 $A_i B_i C_i D_i (i = 1, 2, 3)$, 过点 B_i, C_i, D_i 作平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2, 3)$, 分别与棱 $A_i B_i, A_i C_i, A_i D_i$ 垂直 $(i = 1, 2, 3)$, 如果九个平面 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i (i = 1, 2, 3)$, 相交于一点 E , 而三点 A_1, A_2, A_3 在同一直线 l 上, 求三个四面体的外接球面的交集(形状怎样? 位置如何?)

解: $\because A_i B_i \perp \alpha_i$ 于 B_i , 而 E 在 α_i 上, $\therefore A_i B_i \perp B_i E, B_i$ 在以 $A_i E$ 为直径的球上. 同理 C_i, D_i 也在以 $A_i E$ 为直径的球上, $A_i B_i C_i D_i$ 的外接球即为在以 $A_i E$ 为直径的球.

若 E 在 l 上, 显然这三个球的中心也都在 l 上, 它们必在 E 处两两相切, 交集为 E .

否则 E 不在 l 上, 三个球的球心在同一条直线上 ($\triangle E A_1 A_2$ 中位线所在直线), 且这三个球都过点 E , 交集为一个圆, 直径为 EE' , 其中 E' 为 E 到 l 的垂足.

6. 如 n 是不小于 3 的自然数, 以 $f(n)$ 表示不是 n 的因子的最小自然数, 例如 $f(12) = 5$. 如果 $f(n) \geq 3$, 又可作 $f(f(n))$. 类似地, 如果 $f(f(n)) \geq 3$, 又可作 $f(f(f(n)))$, 等等. 如果 $f(f(\cdots f(n)\cdots)) = 2$, 共有 k 个 f , 就把 k 叫做 n 的“长度”. 如果 l_n 表示 n 的长度, 试对任意自然数 $n (n \geq 3)$, 求 l_n . 并证明你的结论.

解: 设 $n = 2^k \cdot m (m$ 为奇数).

若 $k = 0, n$ 为奇数, $f(n) = 2, l_n = 1$.

若 $k > 0$, 考虑所有小于 2^{k+1} 的正奇数, 若它们均为 n 的因子, 由 $2^{k+1} \nmid n$ 且小于 2^{k+1} 的偶数 $t = 2^p \cdot q (p \leq k, q$ 为奇数), 由 $q|n, 2^p|n, \gcd(q, 2^p) = 1$, 知 $t|n, \therefore f(n) = 2^{k+1}, f(f(n)) = 3, f(f(f(n))) = 2, l_n = 3$.

否则取最小的 $t|n, t$ 必为奇数, 否则 t 必有一个奇因子不整除 n .

$\therefore f(n) = t, f(f(n)) = 2, l_n = 2$.

综上所述,

$$l_n = \begin{cases} 1, & n \text{ 奇数} \\ 2, & n = 2^k \cdot m (m \text{ 为奇数}) \text{ 所有小于 } 2^{k+1} \text{ 的正奇数不全整除 } n \\ 3, & n = 2^k \cdot m (m \text{ 为奇数}) \text{ 所有小于 } 2^{k+1} \text{ 的正奇数均整除 } n \end{cases}$$

第四届中国数学奥林匹克(1989年)
合肥 中国科技大学

1. 在半径为1的圆周上,任意给定两个点集 A, B , 它们都由有限段互不相交的弧组成, 其中 B 的每段的长度都等于 $\frac{\pi}{m}$, m 是自然数. 用 A^j 表示将集合 A 逆时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度所得的集合($j = 1, 2, \dots$).

求证:存在自然数 k ,使得 $L(A^j \cap B) \geq \frac{1}{2\pi} L(A)L(B)$.

这里 $L(X)$ 表示组成点集 X 的互不相交的弧的长度之和.

证明:我们把圆周上的点集 E 沿顺时针方向在圆周上转动 $\frac{j\pi}{m}$ 弧度所得的集合记为 E^{-j} ,于是 $L(A^j \cap B) = L(A \cap B^{-j})$.

设 b_1, b_2, \dots, b_n 为组成 B 的弧段,由已知它们两两不交且每段的长度均为 $\frac{\pi}{m}$,因此有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{2m} L(A^j \cap B) &= \sum_{j=1}^{2m} L(A \cap B^{-j}) \\ &= \sum_{j=1}^{2m} L(A \cap (\cup_{i=1}^n b_i^{-j})) \\ &= \sum_{j=1}^{2m} \sum_{i=1}^n L(A \cap b_i^{-j}) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{2m} L(A \cap b_i^{-j}) \\ &= \sum_{i=1}^n L(A \cap (\cup_{j=1}^{2m} b_i^{-j})) \end{aligned}$$

因为 $L(b_i) = \frac{\pi}{m}$,所以 $\cup_{j=1}^{2m} b_i^{-j}$ 恰好是整个圆周,从而有 $L(A \cap (\cup_{j=1}^{2m} b_i^{-j})) = L(A)$.

$\therefore \sum_{j=1}^{2m} L(A^j \cap B) = nL(A)$,至少存在一个 $k, 1 \geq k \geq 2m$,使得

$$L(A^k \cap B) \geq \frac{n}{2m} L(A) = \frac{1}{2\pi} L(A)L(B).$$

2. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 都是正数($n \geq 2$).且 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.求证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}.$$

证明:不妨设 $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$,则

$$\frac{1}{\sqrt{1-x_1}} \geq \frac{1}{\sqrt{1-x_2}} \geq \dots \geq \frac{1}{\sqrt{1-x_n}}$$

由Chebyshev不等式

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}$$

由Cauchy不等式

$$\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) \geq n^2$$

又

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i} &\leq \sqrt{n \sum_{i=1}^n (1-x_i)} = \sqrt{n(n-1)} \\ \therefore \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} &\geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1-x_i}} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \sqrt{1-x_i}} \geq \frac{n}{\sqrt{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} &\leq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sqrt{n \sum_{i=1}^n x_i} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \\ \therefore \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} &\geq \frac{1}{\sqrt{n-1}} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}. \end{aligned}$$

3. 设 S 为复平面上的单位圆周 (即模为1的复数的集合), f 为从 S 到 S 的映射, 对于任意 $z \in S$, 定义 $f^{(1)}(z) = f(z), f^{(2)}(z) = f(f(z)), \dots, f^{(k)}(z) = f(f^{(k-1)}(z))$. 如果 $c \in S$, 使得 $f^{(1)}(c) \neq c, f^{(2)}(c) \neq c, \dots, f^{(n-1)}(c) \neq c, f^{(n)}(c) = c$. 则称 c 为 f 的 n -周期点. 设 m 是大于1的自然数, f 定义为 $f(z) = z^m$, 试计算 f 的1989-周期点的个数.

解: 记 $A_n = \{z \in S | z \text{ 是 } f \text{ 的 } n\text{-周期点}\}, B_n = \{z \in S | f_n(z) = z\}$ 为 f_n 的不动点集合, 显然 $A_n \subseteq B_n$, 又 $f_1(z) = z^m, \therefore f_n(z) = z^{m^n}$

$$\therefore f_n(z) = z \Leftrightarrow z^{m^n} = z, \text{ 又 } |z| = 1, \therefore z^{m^n-1} = 1, |B_n| = m^n - 1.$$

我们证明 B_n, A_n 有如下性质:

(1) 若 $k|n$, 则 $B_k \subseteq B_n$;

$$\text{事实上, 令 } n = kq, \text{ 若 } c \in B_k, f_k(c) = c, \text{ 则 } f_n(c) = f_{kq}(c) = \underbrace{f_k(f_k(\dots f_k(c)\dots))}_{q \uparrow} = c.$$

$$\therefore c \in B_n, B_k \subseteq B_n.$$

(2) $B_k \cap B_n = B_{\gcd(k,n)}$, $\gcd(k,n)$ 为 k 与 n 的最大公约数.

由(1), $B_{\gcd(k,n)} \subseteq B_k, B_{\gcd(k,n)} \subseteq B_n, \therefore B_{\gcd(k,n)} \subseteq B_k \cap B_n$.

反之, 设 $c \in B_k \cap B_n, f_k(c) = c, f_n(c) = c$, 不妨设 $k < n$. 则 $f_{n-k}(c) = f_{n-k}(f_k(c)) = f_n(c) = c$, 由辗转相除法知 $f_{\gcd(k,n)}(c) = c, \therefore c \in B_{\gcd(k,n)}, B_k \cap B_n \subseteq B_{\gcd(k,n)}. \therefore B_k \cap B_n = B_{\gcd(k,n)}$.

(3) $c \in B_n \setminus A_n \Leftrightarrow \exists k < n, k \in \mathbb{N}^*$, 使 $k|n$ 且 $c \in B_k$.

充分性是显然的(由(1)), 设 $c \in B_n \setminus A_n, f_n(c) = c$. 且存在 $l < n$, 使得 $f_l(c) = c$, 设 $k = \gcd(l, n)$, 则 $f_k(c) = c, c \in B_k$, 且 $k \leq l < n, k|n$. 证毕.

由 $1989 = 3^2 \times 13 \times 17$, 若 $k|1989$, 且 $k < 1989$, k 必整除 $3 \times 13 \times 17, 3^2 \times 13, 3^2 \times 17$ 中至少一个.

$$\therefore B_k \subseteq B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117},$$

$$\therefore A_{1989} = B_{1989} \setminus \left(\bigcup_{\substack{k|1989 \\ k < 1989}} B_k \right) = B_{1989} \setminus (B_{663} \cup B_{153} \cup B_{117}).$$

由容斥原理 f 的1989-周期点个数为

$$\begin{aligned}
 |A_{1989}| &= |B_{1989}| - |B_{663}| - |B_{153}| - |B_{117}| + |B_{663} \cap B_{153}| + |B_{663} \cap B_{117}| + |B_{117} \cap B_{153}| \\
 &\quad - |B_{663} \cap B_{153} \cap B_{117}| \\
 &= |B_{1989}| - |B_{663}| - |B_{153}| - |B_{117}| + |B_{51}| + |B_{39}| + |B_9| - |B_3| \\
 &= (m^{1989} - 1) - (m^{663} - 1) - (m^{153} - 1) - (m^{117} - 1) + (m^{51} - 1) + (m^{39} - 1) \\
 &\quad + (m^9 - 1) - (m^3 - 1) \\
 &= m^{1989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3
 \end{aligned}$$

4. 设点 D, E, F 分别在 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 上, 且 $\triangle AEF, \triangle BFD, \triangle CDE$ 的内切圆有相等的半径 r , 又以 r_0 和 R 分别表示 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$ 的内切圆半径.

求证: $r + r_0 = R$.

证明: 设 $\triangle ABC$ 周长为 l , 面积为 S , 内切圆为 $\odot I$, 在各边的切点为 P, Q, R , $\triangle DEF$ 周长为 l' , 面积为 S' .

$\triangle AEF, \triangle BFD, \triangle CDE$ 的面积分别为 S_1, S_2, S_3 , 内切圆分别为 $\odot I_1, \odot I_2, \odot I_3$,

在各边的切点为 $P_i, Q_i, R_i (i = 1, 2, 3)$.

由面积公式 $2S = Rl, 2S' = r_0l'$,

$2S_1 = r(AE + EF + FA), 2S_2 = r(BD + DF + FB), 2S_3 = r(CD + DE + EC)$.

又 $S = S' + S_1 + S_2 + S_3, \therefore Rl = r_0l' + r(l + l')$, 即 $(R - r)l = (r + r_0)l'$.

又

$$\begin{aligned}
 \frac{AQ_1}{AQ} &= \frac{AR_1}{AR} = \frac{BQ_2}{BQ} = \frac{BP_2}{BP} = \frac{CP_3}{CP} = \frac{CR_3}{CR} = \frac{r}{R} \\
 \therefore \frac{l - Q_1Q_2 - P_2P_3 - R_1R_3}{l} &= \frac{r}{R}
 \end{aligned}$$

又 $Q_1Q_2 + P_2P_3 + R_1R_3 = Q_1F + FQ_2 + P_2D + DP_3 + R_3E + ER_1$

$= P_1F + R_2F + DR_2 + DQ_3 + EQ_3 + EP_1 = l'$.

$\therefore \frac{l'}{l} = 1 - \frac{r}{R} \therefore (R - r)R = (r + r_0)(R - r), R = r + r_0$. 证毕.

5. 空间中有1989个点, 其中任何三点不共线, 把它们分成点数各不相同的30组, 在任何三个不同的组中各取一点为顶点作三角形, 求三角形个数的最大值.

解: 由分组情况有限, 三角形个数必存在最大值, 设分为30组, 各组点数为 $x_1 < x_2 < \dots < x_{30}$, 三角形个

数为 $f(x_1, x_2, \dots, x_{30}) = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 30} x_i x_j x_k$.

若存在 $i \in \{1, 2, \dots, 29\}$, $x_{i+1} - x_i \geq 3$, 则将 $(x_1, x_2, \dots, x_{30})$ 调整为 $(x_1, \dots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \dots, x_{30})$.

$$\begin{aligned} & f(x_1, \dots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \dots, x_{30}) - f(x_1, x_2, \dots, x_{30}) \\ &= [(x_i + 1 + x_{i+1} - 1) \sum_{\substack{1 \leq j < k \leq 30 \\ j, k \neq i, i+1}} x_j x_k + (x_i + 1)(x_{i+1} - 1) \sum_{j \neq i, i+1} x_j] \\ &\quad - [(x_i + x_{i+1}) \sum_{\substack{1 \leq j < k \leq 30 \\ j, k \neq i, i+1}} x_j x_k + x_i x_{i+1} \sum_{j \neq i, i+1} x_j] \\ &= (x_{i+1} - x_i - 1) \sum_{j \neq i, i+1} x_j > 0 \end{aligned}$$

f 值增大, 类似的, 若存在 $i, j \in \{1, 2, \dots, 29\}$, $i < j$, $x_{i+1} - x_i \geq 2$, $x_{j+1} - x_j \geq 2$, 将 x_i 调整为 $x_i + 1$, x_{j+1} 调整为 $x_{j+1} - 1$, f 值增大.

所以当 f 取最大值时, x_1, x_2, \dots, x_{30} 中相邻两个的差最多有一个是 2, 其余均为 1.

如果所有的均为 1, $1989 = x_1 + (x_1 + 1) + \dots + (x_1 + 29) = 30x_1 + 435$, x_1 不是整数, 矛盾.

设 $x_{t+1} - x_t = 2$, $1 \leq t \leq 29$,

则 $1989 = x_1 + x_2 + \dots + x_{30} = 30x_1 + (1 + 2 + \dots + t - 1) + (t + 1 + \dots + 30) = 30x_1 + 465 - t$.

$30x_1 - t = 1524$, $x_1 = 51$, $t = 6$. 此时各组的点的个数分别为 51, 52, ..., 56, 58, 59, ..., 81.

6. 设 $f: (1, +\infty) \rightarrow (1, +\infty)$ 满足以下条件: 对于任意实数 $x, y > 1$, 及 $u, v > 0$, 有

$$f(x^u y^v) \leq f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{1}{4v}}.$$

试确定所有这样的函数 f .

解: 令 $x = y$, $u = v = \frac{t}{2}$ ($t > 0$), 则 $f(x^t) \leq (f(x))^{\frac{1}{t}}$.

以 x^t 代 x , $\frac{1}{t}$ 代 t , 则 $f(x) \leq (f(x^t))^t$.

$\therefore f(x^t) = (f(x))^{\frac{1}{t}}$.

设 $f(e) = c$, $c > 1$, 则 $f(x) = f(e)^{\frac{1}{\ln x}} = c^{\frac{1}{\ln x}}$.

另外, 当 $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ ($c > 1$) 时, $f(x^u y^v) = c^{\frac{1}{u \ln x + v \ln y}}$, $f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{1}{4v}} = c^{\frac{1}{4u \ln x} + \frac{1}{4v \ln y}}$.

由 Cauchy 不等式, $(u \ln x + v \ln y) \left(\frac{1}{4u \ln x} + \frac{1}{4v \ln y} \right) \geq 1$. $\therefore \frac{1}{u \ln x + v \ln y} \leq \frac{1}{4u \ln x} + \frac{1}{4v \ln y}$.

$\therefore f(x^u y^v) \leq f(x)^{\frac{1}{4u}} f(y)^{\frac{1}{4v}}$.

所以所求函数为 $f(x) = c^{\frac{1}{\ln x}}$ ($c > 1$).

第五届中国数学奥林匹克(1990年)

郑州 《中学生数理化》编辑部

1. 在凸四边形 $ABCD$ 中, AB 与 CD 不平行, $\odot O_1$ 过 A, B 且与边 CD 相切于 P ,
 $\odot O_2$ 过 C, D 且与边 AB 相切于 Q , $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 E, F .

求证: EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC \parallel AD$.

证明:分两部分证明结论.

(1) EF 平分 PQ 的充要条件为 $PC \cdot PD = QA \cdot QB$.

设 EF 与 PQ 交于 K , 直线 PQ 于 $\odot O_1, \odot O_2$ 分别交于 J, I .

$$\because PC \cdot PD = PI \cdot PQ, QA \cdot QB = PQ \cdot QJ, KQ \cdot KI = KE \cdot KF = KP \cdot KJ.$$

$$\therefore KQ \cdot (KP + IP) = KP \cdot (KQ + QJ), KQ \cdot IP = KP \cdot QJ.$$

$$\therefore KP = KQ \Leftrightarrow IP = QJ \Leftrightarrow PC \cdot PD = QA \cdot QB.$$

(2) $BC \parallel AD$ 充要条件为 $PC \cdot PD = QA \cdot QB$.

设 AB 与 DC 交于 S . $BC \parallel AD \Leftrightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{SA}{SB}$.

而 $SP^2 = SA \cdot SB, SQ^2 = SC \cdot SD$.

$$\therefore PC \cdot PD = QA \cdot QB \Leftrightarrow (SC - SP)(SP - SD) = (SB - SQ)(SQ - SA)$$

$$\Leftrightarrow (SC + SD)SP - SP^2 - SC \cdot SD = (SB + SA)SQ - SQ^2 - SA \cdot SB$$

$$\Leftrightarrow (SC + SD)SP = (SB + SA)SQ$$

$$\Leftrightarrow (SC + SD)^2 \cdot SA \cdot SB = (SA + SB)^2 \cdot SC \cdot SD$$

$$\Leftrightarrow \frac{SC}{SD} + \frac{SD}{SC} + 2 = \frac{SA}{SB} + \frac{SB}{SA} + 2$$

$$\text{又 } \frac{SD}{SC} < 1, \frac{SA}{SB} < 1, \therefore PC \cdot PD = QA \cdot QB \Leftrightarrow \frac{SD}{SC} = \frac{SA}{SB} \Leftrightarrow BC \parallel AD.$$

所以 EF 平分线段 PQ 的充分必要条件是 $BC \parallel AD$.

2. 设 x 是一个自然数,若一串自然数 $x_0 = 1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_l = x$ 满足 $x_{i-1} | x_i (i = 1, 2, \dots, l)$, 则称 $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ 为 x 的一条因子链. l 称为该因子链的长度. $L(x)$ 与 $R(x)$ 分别表示 x 的最长因子链的长度和最长因子链的条数.

对于 $x = 5^k \times 31^m \times 1990^n, k, m, n$ 都是自然数,试求 $L(x)$ 与 $R(x)$.

解:对于 $x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$, (p_1, p_2, \dots, p_n 为互不相同的质数, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为正整数). x 的因子链 $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ 是最长因子链的充要条件是 $\frac{x_i}{x_{i-1}}$ 均为质数($i = 1, 2, \dots, l$).

事实上,对于因子链 $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$,若存在 $i, (1 \leq i \leq l)$,使得 $\frac{x_i}{x_{i-1}} = q_1 q_2$,其中 q_1, q_2 均为大于1的正整数,则 $\{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, q_1 x_{i-1}, x_i, \dots, x_l\}$ 是长度为 $l + 1$ 的因子链,所以 $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ 不是最长因子链.

反之,若 $\frac{x_i}{x_{i-1}}$ 均为质数($i = 1, 2, \dots, l$),则 $x = x_l = \frac{x_l}{x_{l-1}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1 (x_0 = 1)$ 为 l 个质数的积.所以 $l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. 而对 x 的任意一个因子链 $\{x_0, x_1, \dots, x_t\}, x = x_t = \frac{x_t}{x_{t-1}} \cdots \frac{x_2}{x_1} \cdot x_1$ 是 t 个大于1的正整数之积,而 x 至多写成 $l = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ 个大于1的正整数之积,所以 $t \leq l$.所以 $\{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ 是最长因子链.

$$L(x) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

每个最长因子链对应一个排列 $x_1, \frac{x_2}{x_1}, \dots, \frac{x_l}{x_{l-1}}, l = L(x)$, 为 α_1 个 p_1, α_2 个 p_2, \dots, α_n 个 p_n 的一个排列.

$$\therefore R(x) = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)!}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_n!}.$$

当 $x = 5^k \times 31^m \times 1990^n = 2^n \times 5^{n+k} \times 31^m \times 1990^n$ 时,

$$L(x) = 3n + k + m, R(x) = \frac{(3n+k+m)!}{(n!)^2 (n+k)! m!}.$$

3. 设函数 $f(x)$ 对 $x \geq 0$ 有定义, 且满足条件:

(1) 对任何 $x, y \geq 0, f(x)f(y) \leq y^2 f(\frac{x}{y}) + x^2 f(\frac{y}{x})$;

(2) 存在常数 $M > 0$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $|f(x)| \leq M$.

求证: 对任意 $x \geq 0, f(x) \leq x^2$.

证明: 令 $x = y, (f(x))^2 \leq 2x^2 f(\frac{x}{2})$.

令 $x = 0, (f(0))^2 \leq 0, \therefore f(0) = 0$, 满足结论.

假设存在 $x > 0$, 使得 $f(x) > x^2$, 用归纳法证明

$$f(\frac{x}{2^n}) > 2^{2^n - 2n - 1} x^2 (n \in \mathbb{N})$$

$n = 0$ 时显然成立, 设 $n = k$ 时成立, $f(\frac{x}{2^k}) > 2^{2^k - 2k - 1} x^2$.

$$\therefore f(\frac{x}{2^{k+1}}) \geq \frac{(f(\frac{x}{2^k}))^2}{2(\frac{x}{2^k})^2} > \frac{(2^{2^k - 2k - 1} x^2)^2}{2(\frac{x}{2^k})^2} = 2^{2^{k+1} - 2(k+1) - 1} x^2$$

即 $n = k + 1$ 时也成立, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}, f(\frac{x}{2^n}) > 2^{2^n - 2n - 1} x^2$.

又 $n \rightarrow +\infty$ 时, $2^n - 2n - 1 \rightarrow +\infty, \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$.

$\therefore \exists m_1$, 当 $n \geq m_1$ 时, $0 < \frac{x}{2^n} < 1, \exists m_2$, 当 $n \geq m_2$ 时, $2^{2^n - 2n - 1} x^2 > M$.

取 $m = \max\{m_1, m_2\}, 0 < \frac{x}{2^m} < 1, f(\frac{x}{2^m}) > M$, 矛盾. 所以对任意 $x \geq 0, f(x) \leq x^2$.

4. 设 a 是给定的正整数, A 和 B 是两个实数, 试确定方程组:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (13a)^2 \tag{1}$$

$$x^2(Ax^2 + By^2) + y^2(Ay^2 + Bz^2) + z^2(Az^2 + Bx^2) = \frac{1}{4}(2A + B)(13a)^4 \tag{2}$$

有整数解的充分必要条件(用 A, B 的关系式表示, 并予以证明).

解: (2) $- \frac{B}{2} \times (1)^2$, 得 $(A - \frac{B}{2})(x^4 + y^4 + z^4) = \frac{1}{2}(A - \frac{B}{2})(13a)^4$.

若 $A = \frac{B}{2}$, (1) 与 (2) 等价, 不难验证 $x = 3a, y = 4a, z = 12a$ 为一组解.

若 $A \neq \frac{B}{2}$, 则

$$2(x^4 + y^4 + z^4) = (13a)^4 \tag{3}$$

$\therefore 2|a$, 设 $a = 2a_1, x^4 + y^4 + z^4 = 8(13a_1)^4$.

若 x, y, z 不全为偶数, 则必为两个奇数一个偶数, $x^4 + y^4 + z^4 \equiv 2 \pmod{4}$, 矛盾.

$\therefore 2|x, 2|y, 2|z$. 设 $x = 2x_1, y = 2y_1, z = 2z_1$, 则若 (x, y, z, a) 为 (3) 的解, (x_1, y_1, z_1, a_1) 也为 (3) 的解. 类似可依次得到 (x_2, y_2, z_2, a_2) 也为 (3) 的解, 等等. 但这个过程不能一直进行下去, 矛盾.

所以方程组有整数解的充分必要条件为 $A = \frac{B}{2}$.

5. 设 X 是一个有限集合, 法则 f 使得 X 的每一个偶子集 E (偶数个元素组成的子集) 都对应一个实数 $f(E)$, 满足条件:

(1) 存在一个偶子集 D , 使得 $f(D) > 1990$;

(2) 对于 X 的任意两个不相交的偶子集 A, B , 有 $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - 1990$.

求证: 存在 X 的子集 P, Q , 满足

(1) $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q = X$;

(2) 对 P 的任何非空偶子集 S , 有 $f(S) > 1990$;

(3) 对 Q 的任何偶子集 T , 有 $f(T) \leq 1990$.

证明: 考虑 X 的所有偶子集经法则 f 得到的实数最大的一个为 P , 若不止一个, 取元素个数最少的一个.

$Q = X \setminus P$. 则 $P \cap Q = \emptyset, P \cup Q = X$.

令 $A = B = \emptyset$, 则 $f(\emptyset) = 1990$.

对于 $\forall S \subseteq P, S \neq \emptyset, f(P) = f(S) + f(P \setminus S) - 1990$, 显然 $f(P \setminus S) < f(P), \therefore f(S) > 1990$.

对于 $\forall T \subseteq Q$, 若 $T = \emptyset, f(T) = 1990$, 否则 $T \neq \emptyset$, 由 $f(P \cup T) = f(P) + f(T) - 1990 \leq f(P), f(T) \leq 1990$.
 $\therefore P, Q$ 满足条件. 证毕.

6. 凸 n 边形及 $n - 3$ 条在 n 边形内不相交的对角线组成的图形称为一个剖分图.

求证: 当且仅当 $3|n$ 时, 存在一个剖分图是可以一笔划的图 (即可以从一个顶点出发, 经过图中各线段恰一次, 最后回到出发点).

证明: 因为 $n - 3$ 条在形内互不相交的对角线将凸 n 边形分为 $n - 2$ 个顶点均是 n 边形顶点的小区域, 每个区域的内角和不少于 π , n 边形的内角和为 $(n - 2)\pi$, 所以每个小区域都是三角形.

先证必要性. 用归纳法容易证明可将每个三角形区域涂成黑白两色之一, 使得有公共边的三角形不同色. 假设已按照这样的要求染色, 由于剖分图是可以一笔画的圈, 所以由每个顶点引出的线段都是偶数条. 从而每个顶点都是奇数个三角形的顶点, 因此以原多边形外边界为一边的三角形区域有着相同的颜色, 不妨设为黑色; 另一方面, 剖分图的每条对角线都是两种不同颜色三角形的公共边, 所以设黑三角形有 m_1 个, 白三角形有 m_2 个. 则 $n = 3m_1 - 3m_2$, 所以 $3|n$.

再证充分性, 设 $n = 3m$, 多边形为 $A_1 A_2 \dots A_{3m}$. 连接 $A_1 A_{3i}, A_{3i} A_{3i+2}, A_{3i+2} A_1 (i = 1, 2, \dots, m-1)$ 这 $3m - 3$ 条对角线, 形成 $m - 1$ 个三角形, 可由 A_1 出发, 依次走过这些三角形, 再走过凸多边形即可一笔画并回到初始点. 证毕.

第六届中国数学奥林匹克(1991年)
武汉 华中师范大学

1. 平面上有一凸四边形 $ABCD$.

(1). 如果平面上存在一点 P , 使得 $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CDP, \triangle DAP$ 面积都相等, 问四边形 $ABCD$ 应满足什么条件?

(2). 满足(1)的点 P , 平面上最多有几个? 证明你的结论.

解: (1)(1.1) P 在 $ABCD$ 内部, 若 A, P, C, B, P, D 分别三点共线, 显然 $ABCD$ 为平行四边形, P 为对角线的交点.

若 A, P, C 不共线, 由于 $\triangle PAB, \triangle PAD$ 等面积, AP 必经过对角线 BD 的中点, 同理 CP 过 BD 的中点, 必有 P 为 BD 的中点, 所以 $\triangle ABD, \triangle BCD$ 面积相等. 即一条对角线平分 $ABCD$ 的面积, 显然也是充分条件.

(1.2) P 在 $ABCD$ 之外, 不妨设 P 与 B, C 在 AD 异侧, P 必与 A, B 在 CD 同侧, 与 C, D 在 AB 同侧.

由 $\triangle PAB, \triangle PAD$ 面积相等, $PA \parallel BD$, 同理 $PD \parallel AC$. 设 AC, BD 相交于 $E, AEDP$ 为平行四边形.

$$S_{AED} = S_{APD} = S_{ABP} + S_{CDP} + S_{PBC} - S_{ABCD} = 3S_{APD} - S_{ABCD}.$$

$$\therefore S_{AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

这个条件也是充分条件, 若 $S_{AED} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, 作平行四边形 $AEDP$, 显然 PB, PC 均在 $APDCB$ 内.

$$\therefore S_{ABP} = S_{APD} = S_{CDP} = S_{AED}, S_{PBC} = S_{APD} + S_{ABCD} - S_{ABP} - S_{CDP} = S_{AED}. P$$
满足要求.

所以四边形 $ABCD$ 有一条对角线平分面积, 或者在对角线分成的四个三角形中有一个为四边形面积的一半.

(2) 由(1)知, P 在形内, 形外都至多有一个, 又由充要条件不同时取到, P 最多有一个.

2. 设 $I = [0, 1], G = \{(x, y) | x, y \in I\}$.

求 G 到 I 的所有映射 f , 使得对任何 $x, y, z \in I$ 有

$$(1) f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z));$$

$$(2) f(x, 1) = x, f(1, y) = y;$$

$$(3) f(zx, zy) = z^k f(x, y). \text{ 这里, } k \text{ 是与 } x, y, z \text{ 无关的正数.}$$

解: 由(3), $f(x, y) = f(y \cdot \frac{x}{y}, y \cdot 1) = y^k f(\frac{x}{y}, 1) (0 < x < y)$

$$f(x, y) = f(x \cdot 1, x \cdot \frac{y}{x}) = y^k f(1, \frac{y}{x}) (0 < y < x)$$

$$\text{再由(2), } f(x, y) = y^{k-1}x (0 < x < y), f(x, y) = x^{k-1}y (0 < y < x)$$

$$\text{又 } x = y \text{ 时, } f(x, x) = x^k f(1, 1) = x^k.$$

在(1)中, 取 $0 < x < y < z < 1, x$ 充分小时, $y^{k-1}x < z, x < z^{k-1}y$.

$$f(f(x, y), z) = f(y^{k-1}x, z) = z^{k-1}y^{k-1}x, f(x, f(y, z)) = f(x, z^{k-1}y) = x(z^{k-1}y)^{k-1}.$$

$$\therefore z^{k-1} = z^{(k-1)^2}, (k-1)(k-2) = 0, k = 1 \text{ 或 } 2.$$

$$k = 1 \text{ 时, } f(x, y) = \min\{x, y\}; k = 2 \text{ 时, } f(x, y) = xy. (x > 0, y > 0)$$

$$\text{又 } f(x, 0) = f(x \cdot 1, x \cdot 0) = x^k f(0, 1) = 0, f(0, y) = 0, f(0, 0) = z^k f(0, 0), f(0, 0) = 0.$$

$$\therefore k = 1 \text{ 时, } f(x, y) = \min\{x, y\}; k = 2 \text{ 时, } f(x, y) = xy. k \neq 1, k \neq 2 \text{ 时, 无解.}$$

3.地面上有10只小鸟在啄食,其中任5只小鸟中至少有4只在一个圆上,问有鸟最多的圆上最少有几只鸟?

解:用10个点表示10只鸟,若其中任意四点均共圆,则十个点共圆.

否则设 $ABCD$ 不共圆,过其中任意不共线的三个点可作一个圆,最多有四个 $S_i(i = 1, 2, 3, 4)$. 从其余六个点中任取一点 P 与 $ABCD$ 构成5点组,其中必有4点共圆,必有 P 落在某个圆 S_i 上,有抽屉原则,另六个点中必有两个点落在同一个圆上,这个圆上至少有5个点.

不妨设为 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 在 C_1 上,若存在 P, Q 不在 C_1 上,考察 $\{A_1, A_2, A_3, P, Q\}$,其中必有四点共圆 C_2 ,显然 $C_2 \neq C_1, A_1, A_2, A_3$ 不全在 C_2 上,设 $A_1, A_2, P, Q \in C_2, A_3, A_4, A_5 \notin C_2$.

考察 $\{A_3, A_4, A_5, P, Q\}$,必有四点共圆 $C_3, C_3 \neq C_1$, 设 $A_3, A_4, P, Q \in C_3, A_1, A_2, A_5 \notin C_3, C_3 \neq C_2$.

考察 $\{A_1, A_2, A_5, P, Q\}$,必有四点共圆 $C_4, C_4 \neq C_1, P, Q \in C_4, A_1, A_3$ 中至少有一个属于 $C_4, C_4 = C_2$ 或 C_3 .但是这显然均构成矛盾.

所以至多有一个点不在 C_1 上,又因为十个点中九点共圆而另一个不在这个圆上满足题意.所以有鸟最多的圆上最少有九只鸟.

4.求方程 $x^{2n+1} - y^{2n+1} = xyz + 2^{2n+1}$ 的所有满足条件 $n \geq 2, z \leq 5 \times 2^{2n}$ 的正整数解组 (x, y, z, n) .

解:显然 $x > y$,且 x, y 奇偶性相同,所以 $x - y \geq 2$.

当 $x = 3, y = 1$ 时, $z = 3^{2n} - \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1})$ 为整数,又 $z \leq 5 \times 2^{2n}, 3^{2n} \leq 5 \times 2^{2n} + \frac{1}{3}(1 + 2^{2n+1}) = (5 + \frac{2}{3})2^{2n} + \frac{1}{3} \leq 6 \times 2^{2n}. \therefore n \leq 2, n = 2, z = 70$.

下面证不存在其他正整数解:

(1)若 $y = 1, x > 4, y^{2n+1} + 2^{2n+1} = 2^{2n+1} + 1, x^{2n+1} - xyz = z(x^{2n} - z) \geq x(x^{2n} - 5 \times 2^{2n})$

$\therefore x^{2n+1} - xyz > 4(4^{2n} - 5 \times 2^{2n}) = 2^{2n+2}(2^{2n} - 5) > 2^{2n+1}$,矛盾.

(2)若 $y \geq 2$,由 $x \geq 2, z \leq 5 \times 2^{2n}, n \geq 2$.

$$\begin{aligned} x^{2n+1} - xyz &\geq x[(y+2)^{2n} - yz] \\ &> x[y^{2n} + 4ny^{2n-1} + 4n(2n-1)y^{2n-2} + 2^{2n} - yz] \\ &\geq xy^{2n} + x \cdot 2^{2n} + x[4ny^{2n-1} + 4n(2n-1)y^{2n-2} - 5 \times 2^{2n}y] \\ &> y^{2n+1} + 2^{2n+1} + xy[4ny^{2n-2} + 4n(2n-1)y^{2n-3} - 5 \times 2^{2n}] \end{aligned}$$

$\therefore y \geq 2, 4ny^{2n-2} + 4n(2n-1)y^{2n-3} \geq 8 \times 2^{2n-2} + 8 \times 3 \times 2^{2n-3} > 5 \times 2^{2n}$.

$\therefore x^{2n+1} - xyz > y^{2n+1} + 2^{2n+1}$,矛盾,所以只有一组正整数解 $(x, y, z, n) = (3, 1, 70, 2)$.

5.求所有自然数 n ,使得

$$\min_{k \in \mathbb{N}^*} (k^2 + \left\lceil \frac{n}{k^2} \right\rceil) = 1991.$$

这里 $[x]$ 表示 x 的整数部分.

解:条件等价于对于 $\forall k \in \mathbb{N}^*, k^2 + \frac{n}{k^2} \geq 1991$, 且 $\exists k_0 \in \mathbb{N}^*, k_0^2 + \frac{n}{k_0^2} < 1992$.

即对于 $\forall k \in \mathbb{N}^*, k^4 - 1991k^2 + n \geq 0$

即 $(k^2 - \frac{1991}{2})^2 + n - \frac{1991^2}{4} \geq 0$

取 k ,使得 $|k^2 - \frac{1991}{2}|$ 最小, $k = 32, 32^4 - 1991 \times 32^2 + n \geq 0, n \geq 1024 \times 967 = 990208$.

并且存在 $k_0 \in \mathbb{N}^*$, $k_0^4 - 1991k_0^2 + n < 0$

即 $(k^2 - 996)^2 + n - 996^2 < 0$

由 $|k_0^2 - 996|$ 的最小值为 28, 所以 $n - 996^2 < -28^2$, $n < 996^2 - 28^2 = 1024 \times 968 = 991232$.

$\therefore 990208 \leq n \leq 991231$.

6. MO牌足球由若干多边形皮块用三种不同颜色的丝线缝制而成, 它有以下特点:

(1) 任一多边形皮块的一条边恰与另一多边形皮块同样长的一条边用一种颜色的丝线缝合;

(2) 足球上每一个结点, 恰好是三个多边形的顶点, 每一结点的三条缝线颜色互不相同.

求证: 可以在MO牌足球的每一结点上放置一个不等于1的复数, 使得每一多边形的所有顶点上放置的复数的乘积都等于1.

证明: 设这三种颜色为红, 黄, 蓝, 对每条边赋值, 红色为1, 黄色为 $e^{\frac{2}{3}\pi i}$, 蓝色为 $e^{\frac{4}{3}\pi i}$.

对于每个节点, 若三种颜色的线依逆时针方向依次为红, 黄, 蓝, 则在这个结点放上 $e^{\frac{2}{3}\pi i}$, 否则放上 $e^{\frac{4}{3}\pi i}$. 则结点上放置的数为逆时针方向一条边的复数除以下一条边的复数,

$$(e^{\frac{2}{3}\pi i} = \frac{1}{e^{\frac{4}{3}\pi i}} = \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{1}, e^{\frac{4}{3}\pi i} = \frac{1}{e^{\frac{2}{3}\pi i}} = \frac{e^{\frac{2}{3}\pi i}}{e^{\frac{4}{3}\pi i}} = \frac{e^{\frac{4}{3}\pi i}}{1})$$

所以对于任意一个多边形, 沿顺时针方向走过每条边依次为 z_1, z_2, \dots, z_k , 则顶点上依次放置 $\omega_1 = \frac{z_1}{z_2}, \omega_2 = \frac{z_2}{z_3}, \dots, \omega_k = \frac{z_k}{z_1}, \therefore \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_k = 1$. 满足题意, 证毕.

第七届中国数学奥林匹克(1992年)

北京 北京数学奥林匹克发展中心

1. 设方程 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的系数都是实数, 且适合条件 $0 < a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1$. 已知 λ 为方程的复根且 $|\lambda| \geq 1$.

求证: $\lambda^{n+1} = 1$.

证明: 由 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0, a_0 > 0, \lambda \neq 0$.

$$\therefore a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + 1 = 0$$

$$a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1} + a_1\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{\lambda} = 0$$

由 $|\lambda| > 1, \left|\frac{1}{\lambda}\right| \geq 1$.

$$\begin{aligned} \therefore 1 &= a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1} + (a_1 - a_0)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + \cdots + (1 - a_{n-1})\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &= \left|a_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n+1} + (a_1 - a_0)\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n + \cdots + (1 - a_{n-1})\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| \\ &\leq a_0\left|\frac{1}{\lambda}\right|^{n+1} + (a_1 - a_0)\left|\frac{1}{\lambda}\right|^n + \cdots + (1 - a_{n-1})\left|\frac{1}{\lambda}\right| \\ &\leq a_0 + (a_1 - a_0) + \cdots + (1 - a_{n-1}) = 1 \end{aligned}$$

取等号条件为 $\frac{a_0}{\lambda^{n+1}}, \frac{a_1 - a_0}{\lambda^n}, \dots, \frac{1 - a_{n-1}}{\lambda}$ 的辐角相同, 且 $|\lambda| = 1$.

但是 $\frac{a_0}{\lambda^{n+1}} + \frac{a_1 - a_0}{\lambda^n} + \cdots + \frac{1 - a_{n-1}}{\lambda} = 1$ 所以它们均为非负实数, 又 $a_0 > 0, \therefore \lambda^{n+1} \in \mathbb{R}^+$.

又因为 $|\lambda^{n+1}| = 1, \therefore \lambda^{n+1} = 1$.

2. 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为非负实数, 记 $x_{n+1} = x_1, a = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 试证:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq n + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - a)^2$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

证明: 对 n 用数学归纳法, $n = 1$ 时, $x_1 = a$, 结论显然成立.

设 $n = k$ 时结论成立, 当 $n = k + 1$ 时, 不妨设 $x_1 = a$, 由归纳假设

$$\sum_{i=1}^k \frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} + \frac{1 + x_k}{1 + x_1} \leq k + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{j=1}^k (x_j - a)^2$$

因此要证明

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{1 + x_i}{1 + x_{i+1}} \leq k + 1 + \frac{1}{(1+a)^2} \sum_{i=1}^{k+1} (x_i - a)^2$$

只需证明

$$\frac{1 + x_k}{1 + x_{k+1}} + \frac{1 + x_{k+1}}{1 + x_1} - \frac{1 + x_k}{1 + x_1} \leq 1 + \frac{(x_{k+1} - a)^2}{(1+a)^2}$$

即

$$\frac{(x_{k+1} - x_1)(x_{k+1} - x_k)}{(1 + x_{k+1})(1 + x_1)} \leq \frac{(x_{k+1} - a)^2}{(1 + a)^2} \quad (1)$$

由 $x_{k+1} \geq x_1 = a, x_k \geq x_1 = a$, 所以 $(1+x_{k+1})(1+x_1) \geq (1+a)^2, (x_{k+1}-x_1)(x_{k+1}-x_k) \leq (x_{k+1}-a)^2$.
 (1)显然成立, 等号成立时当且仅当 $x_1 = x_2 = \dots = x_k$, 且 $x_{k+1} = x_k = x_1$. 所以 $n = k + 1$ 时结论成立. 由归纳法, 结论成立.

3. 在平面上给出一个 9×9 的方格表, 并在其中每一方格中都任意填入+1或-1. 下面一种改变填入数字的方式称为一次变动: 对于任意一个小方格, 将与此格有一条公共边的所有小方格 (不包含此格本身) 中的数作连乘积, 于是每取一个格, 就算出一个数. 在所有小格都取遍后, 就将原来格中的数全部擦去, 而将这些算出的数填入相应的小方格中. 试问是否总可以经过有限次变动, 使得所有小方格中的数都变为+1?

解: 未必, 例如如下的 4×4 表格经变动后保持不变, 将它对称填入 9×9 格子的四个角的 4×4 方格, 并将正中一行与正中一列均填上+1, 该 9×9 方格表经变动后保持不变.

+1	-1	-1	-1
-1	+1	-1	+1
-1	-1	+1	+1
-1	+1	+1	+1

4. 凸四边形内接于 $\odot O$, 对角线 AC 与 BD 相交于 P , $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 的外接圆相交于 P 和另一点 Q , 且 O, P, Q 三点两两不重合. 试证 $\angle OQP = 90^\circ$.

证明: 不妨设 Q 在 $\angle BPC$ 内, 连结 AO, AQ, DO, DQ .

则 $\angle AQD = \angle AQP + \angle DQP = \angle ABP + \angle DCP = 2\angle ABD = \angle AOD$.

所以 A, D, Q, O 四点共圆.

$\therefore \angle OQP = \angle AQO + \angle PQA = \angle ADO + \angle ABD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOD) + \frac{1}{2}\angle AOD = 90^\circ$, 证毕.

5. 在有8个顶点的简单图中, 没有四边形的图的边数的最大值是多少? (简单图是指任意顶点与自己没有边相连, 而且任意两个顶点之间至多有一条边相连的图)

解: 最大值为11, 首先构造一个8顶点11条边的图, 其中没有四边形. 顶点为 $A_i (i = 1, 2, \dots, 8)$, 边为 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1, A_5A_6, A_6A_7, A_7A_8, A_8A_4, A_1A_6, A_3A_8$. 不难验证这个图满足题意.

下面证明: 若简单图 G 中有8个顶点, 12条边, 其中必存在四边形. 若不然, 设 G 中度数最大的顶点(中的一个)为 A , A 的度数为 d . 显然 $8d \geq 2 \times 12 = 24$, 即 $d \geq 3$.

(1) 若 $d \geq 5$, 设与 A 有边相连的顶点组成的集合为 $S, |S| = d$. 则 S 中不会有顶点与其他两个同在 S 中的顶点相连, 顶点均在 S 中的边至多有 $\binom{d}{2}$ 条, 而其他的顶点每个至多与 S 中一个顶点相连, 所以图 G 中最多有边 $f(d) = d + \binom{d}{2} + 7 - d + \binom{7-d}{2}$ 条, 不难验证 $d \geq 5$ 时, $f(d) < 12$, 矛盾.

(2) $d = 4$, (1)中的讨论仍适用, 此时 $f(d) = 12$, 必有所有取等号的条件都取到. 设 $S = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, 另三个点为 C_1, C_2, C_3 . 不妨设 B_1, B_2 相连, B_3, B_4 相连, $C_1C_2C_3$ 构成三角形. $S_1 = \{B_1, B_2\}, S_2 = \{B_3, B_4\}$, 由于 C_1, C_2, C_3 每个向 S 中的一个点连出一条边, 必有两个同向 S_1 或 S_2 中的点连出边, 不妨设为 C_1, C_2 都向 S_1 中的点连出边, C_1 与 B_1 相连. 但是此时, 若 C_2 与 B_1 相连, 则 $B_1C_1C_3C_2$ 为四边形; 若 C_2 与 B_2 相连, 则 $B_1C_1C_2B_2$ 为四边形. 矛盾.

(3) $d = 3$, 则所有的顶点度数均为3, 不妨设 A, B 之间没有边相连, 从它们连出的边为 $AA_i, BB_i (i = 1, 2, 3)$. 则 $S_1 = \{A_1, A_2, A_3\}, S_2 = \{B_1, B_2, B_3\}$ 至多有一个公共元素.

(3.1) 若它们没有公共元素, $A, A_1, A_2, A_3, B, B_1, B_2, B_3$ 为全部8个点, 由(1)中的讨论知, S_1, S_2 中顶点相连各自至多有一条边. 它们之间最多有3条边, 最多有11条边, 矛盾.

(3.2) 若它们有公共元素, 设 $A_3 = B_3$, 第8个点为 C , 从它出发只能各向 S_1, S_2 连出一条边, 而它又不与 A, B 相连, 所以 C 的度数小于3, 矛盾.

综上所述, 若简单图 G 中有8个顶点, 12条边, 其中必存在四边形. 所以在有8个顶点的简单图中, 没有四边形的图的边数的最大值是11.

6. 已知整数序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 满足条件:

$$(1) a_{n+1} = 3a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2}, n = 2, 3, \dots$$

$$(2) 2a_1 = a_0 + a_2 - 2.$$

(3) 对任意的自然数 m , 存在 k , 使得 $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}$ 都为完全平方数.

试证: 序列 $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$ 的所有项都是完全平方数.

证明: 由(1)的特征方程 $x^3 = 3x^2 - 3x + 1$ 的三个根均为1知 $a_n = an^2 + bn + c (a, b, c$ 为待定实数).

$$\text{代入(2)得 } a = 1, a_n = n^2 + bn + c = (n + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

$b = a_1 - a_0 - 1, c = a_0$ 均为整数, 令

$$(n + \frac{b-1}{2})^2 < a_n = (n + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4} < (n + \frac{b+1}{2})^2 \quad (*)$$

只需

$$n > \frac{(b-1)^2}{4} - c, n > c - \frac{(b+1)^2}{4}.$$

令

$$n_0 = [\max\{\frac{(b-1)^2}{4} - c, c - \frac{(b+1)^2}{4}\}] + 1$$

则当 $n \geq n_0$ 时, (*) 成立. 在(3)中令 $m = n_0 + 1$, 知道必存在 $n \geq n_0$ 使 a_n 为完全平方数, 必有 $a_n = (n + \frac{b}{2})^2, b$ 为偶数.

所以 $c - \frac{b^2}{4} = 0, \therefore \forall n \in \mathbb{N}, a_n = (n + \frac{b}{2})^2$ 为完全平方数, 证毕.

第八届中国数学奥林匹克(1993年)

济南 山东大学

1. 设 n 是奇数, 试证明存在 $2n$ 个整数 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n$, 使得对于任意一个整数 $k, 0 < k < n$. 下列 $3n$ 个数 $a_i + a_{i+k}, a_i + b_i, b_i + b_{i+k}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, 其中 $a_{n+j} = a_j, b_{n+j} = b_j$)被 $3n$ 除时余数互不相同.

证明: 令 $a_i = 3i, b_i = 3i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\text{则 } a_i + a_{i+k} = 3(2i+k) \equiv 0 \pmod{3}$$

$$a_i + b_i = 6i + 1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$b_i + b_{i+k} = 3(2i+k) + 2 \equiv 2 \pmod{3}$$

显然不同组的两数被 $3n$ 除余数互不相同, 只需说明同一组中任一两个数模 $3n$ 互不相同, 即 $c_i = 6i$ 模 $3n$ 互不相同. ($i = 1, 2, \dots, n$)

若 $c_i \equiv c_j \pmod{3n}$, 则 $6(j-i) \equiv 0 \pmod{3n}$, 即 $n|2(j-i)$, 但是 n 为奇数, $\therefore n|j-i$, 又因为 $|j-i| < n$, 必有 $j=i$.

所以这 $3n$ 个数被 $3n$ 除时余数互不相同.

2. 给定自然数 k 及实数 $a > 0$, 已知 $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k, k_i \in \mathbb{N}^* (i = 1, 2, \dots, r, 1 \leq r \leq k)$. 求 $a^{k_1} + a^{k_2} + \dots + a^{k_r}$ 的最大值.

解: 当 $a = 1$ 时, $a^{k_1} + a^{k_2} + \dots + a^{k_r} = r$, 显然最大值为 k .

当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, $f(x) = a^x$ 在 $[1, +\infty)$ 上为下凸函数, 即 $a^{k_i} + a^{k_j} \leq a + a^{k_i+k_j-1} (k_i, k_j \in \mathbb{N}^*)$. 这是由于它等价于 $a(a^{k_i-1} - 1)(a^{k_j-1} - 1) \geq 0$, 两括号内显然同号.

所以我们可以经过 $r-1$ 次调整将其调整为 $k_1 = k_2 = \dots = k_{r-1} = 1, k_r = k + 1 - r$ 的情况, 而值始终不减. 设此时的值为 $F(r) = (r-1)a + a^{k+1-r}$.

$$\text{又 } a + a^m \leq a^{m+1} \Leftrightarrow m \geq \log_a \left(\frac{a}{a-1} \right).$$

若 $k+1-r \geq \log_a \left(\frac{a}{a-1} \right)$, 则

$$F(r) = (r-2)a + a + a_{k+1-r} \leq (r-2)a + a_{k+2-r} \leq (r-3)a + a_{k+3-r} \leq \dots \leq a^k = F(1)$$

若 $k+1-r < \log_a \left(\frac{a}{a-1} \right)$, 则

$$F(r) = ra - a + a_{k+1-r} \leq ra + a_{k-r} \leq \dots \leq ka = F(k)$$

所以 F 的最大值为 $\max\{a^k, ka\} = \max\{a^k, ka\}$.

所以 $a^{k_1} + a^{k_2} + \dots + a^{k_r}$ 的最大值为

$$\max\{a^k, ka\} = \begin{cases} ka, & a \leq k^{\frac{1}{k-1}} (k \geq 2) & \text{当 } r = k, k_1 = k_2 = \dots = k_r = 1 \text{ 取等号} \\ a^k, & k = 1 \text{ 或 } a > k^{\frac{1}{k-1}} (k \geq 2) & \text{当 } r = 1, k_1 = k \text{ 取等号} \end{cases}$$

3. 设圆 K 和 K_1 同心, 它们的半径分别为 R 和 $R_1, R_1 > R$. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 K , 四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1 , 点 A_1, B_1, C_1, D_1 分别在射线 CD, DA, AB, BC 上, 求证:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}.$$

证明:设 $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AB_1 = w, BC_1 = x, CD_1 = y, DA_1 = z$.则

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{BC_1D_1}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{CD_1A_1}}{S_{ABCD}} + \frac{S_{DA_1B_1}}{S_{ABCD}} = 1 + \frac{w(a+x)}{ad+bc} + \frac{x(b+y)}{ab+cd} + \frac{y(c+z)}{ad+bc} + \frac{z(d+w)}{ab+cd}$$

由切割线定理, $(a+x)x = (b+y)y = (c+z)z = (d+w)w = R_1^2 - R^2$.要证明

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geq \frac{R_1^2}{R^2}.$$

$$\text{只需证明 } (R_1^2 - R^2) \left(\frac{w}{x(ad+bc)} + \frac{x}{y(ab+cd)} + \frac{y}{z(ad+bc)} + \frac{z}{w(ab+cd)} \right) \geq \frac{R_1^2 - R^2}{R^2}$$

即

$$\frac{w}{x(ad+bc)} + \frac{x}{y(ab+cd)} + \frac{y}{z(ad+bc)} + \frac{z}{w(ab+cd)} \geq \frac{1}{R^2} \quad (*)$$

由均值不等式知(*)左边 $\geq \frac{4}{\sqrt{(ad+bc)(ab+cd)}}$.

再由均值不等式

$$\begin{aligned} (ad+bc)(ab+cd) &\leq \left(\frac{ad+bc+ab+cd}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} [(a+c)(b+d)]^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left[\left(\frac{a+c+b+d}{2} \right)^2 \right]^2 = \frac{1}{64} (a+b+c+d)^4 \end{aligned}$$

由圆内接四边形中正方形周长最长知 $a+b+c+d \leq 4\sqrt{2}R$.

$\therefore (ab+cd)(bc+ad) \leq 16R^4$,显然有(*)成立.证毕.

4.给定集合 $S = \{z_1, z_2, \dots, z_{1993}\}$,其中 $z_1, z_2, \dots, z_{1993}$ 是非零复数(可看作平面上的非零向量).求证:可以把 S 中的元素分成若干组,使得

- (1) S 中每个元素属于且仅属于其中一组;
- (2)每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过 90° ;
- (3)将任意两组中复数分别求和,所得和数之间的夹角大于 90° .

证明:取 S 中某些元素组成子集 A ,使得这些元素之和的模长最大.

由于元素个数有限,所以子集的取法有限,必然存在这样的 A .

在 $S \setminus A$ 中同样取元素之和模长最大的一些元素组成 B .

$C = S \setminus A \setminus B$,下面我们证明 A, B, C 满足题意.

若不然,设 A, B, C 中元素之和分别为 a, b, c ,

(1)若存在 $z \in A$,与 a 夹角大于 90° ,则 $-z$ 与 a 夹角为锐角,则 $|(-z) + a| > |a|$,与 A 的选取矛盾. $\therefore A$ 中的元素与 a 的夹角均不超过 90° ,类似的这对 B 也成立.

(2)对于 $z \notin A$,若 z 与 a 的夹角不大于 90° ,则 $|z + a| > |a|$,与 A 的选取矛盾.所以任意不在 A 中的元素或它们的和与 a 的夹角大于 90° .类似的,任意在 C 中的元素或它们的和与 b 的夹角大于 90° .

所以 a, b, c 两两夹角大于 90° .

(3)若存在 $z \in C$, z 与 c 的夹角大于 90° ,则 a, b, c, z 两两夹角大于 90° ,矛盾.所以 C 中的元素与 c 的夹角均不超过 90° .

综上所述, A, B, C 满足题意,证毕.

5.10人到书店买书,已知

(1)每人都买了三种书;

(2)任何两人所买的书,都至少有一种相同.

问购买人数最多的一种书最(至)少有几人购买?说明理由.

解:至少有5个人.

设A买的书为1,2,3,其余9人每人至少买这三者之一,有抽屉原则至少有4人买了同一种书,再加上A,至少有5个人.

另外,若10个人买的书分别为(123),(123),(145),(167),(246),(246),(257),(347),(356),(356). 则不难验证满足条件,且购买人数最多的一种书恰有5人购买.

6. 设函数 $f : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 满足以下条件: 对于任意正实数 x, y , 有 $f(xy) \leq f(x)f(y)$.

试证: 对任意的正实数 x 及自然数 n , 有

$$f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$$

证明: 设 $F_n(x) = f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$, 则 $F_n(x) = F_{n-1}(x)f(x^n)^{\frac{1}{n}}$, $F_n^n(x) = F_{n-1}^n(x)f(x^n)$.

类似的, $F_{n-1}^{n-1}(x) = F_{n-2}^{n-1}(x)f(x^{n-1})$, \cdots , $F_2^2(x) = F_1^2(x)f(x^2)$, $F_1(x) = f(x)$.

相乘得 $F_n^n(x) = F_{n-1}^n(x)F_{n-2}^n(x) \cdots F_2^n(x)F_1^n(x)f(x^n)f(x^{n-1}) \cdots f(x)$.

用归纳法证明 $F_n(x) \geq f(x^n)$. 对于 $n = 1$ 显然成立, 设对 $n \leq k$ 均成立, 由归纳假设

$$\begin{aligned} F_{k+1}^{k+1}(x) &= F_k(x)F_{k-1}(x) \cdots F_1(x)f(x^{k+1})f(x^k) \cdots f(x) \\ &\geq f(x^k)f(x^{k-1}) \cdots f(x)f(x^{k+1})f(x^k) \cdots f(x) \\ &= f(x^{k+1})(f(x^k)f(x))(f(x^{k-1})f(x^2)) \cdots (f(x)f(x^k)) \\ &\geq (f(x^{k+1}))^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore F_{k+1}(x) \geq f(x^{k+1})$, 由数学归纳法知结论对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 均成立.

$\therefore F_n(x) \geq f(x^n)$, 即 $f(x^n) \leq f(x)f(x^2)^{\frac{1}{2}} \cdots f(x^n)^{\frac{1}{n}}$. 证毕.

第九届中国数学奥林匹克(1994年)

上海 复旦大学

1. 设 $ABCD$ 是一个梯形 ($AB \parallel CD$), E 是线段 AB 上一点, F 是线段 CD 上一点, 线段 CE 与 BF 相交于点 H , 线段 ED 与 AF 相交于点 G , 求证: $S_{EHFG} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果 $ABCD$ 是一个任意的凸四边形, 同样结论是否成立? 请说明理由.

证明: 引理: 在梯形 $ABCD$ 中, AC, BD 交于 E . ($AB \parallel CD$) 则 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

引理的证明: 显然 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle BCD}$, 都减去 $S_{\triangle CDE}$, 即有 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC}$, 设为 S . 则

$$\frac{S}{S_{\triangle ABE}} = \frac{DE}{BE} = \frac{S_{\triangle CDE}}{S}$$

$\therefore S_{\triangle ABE}S_{\triangle CDE} = S^2$, 由均值不等式

$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} + 2S \geq 2\sqrt{S_{\triangle ABE} \cdot S_{\triangle CDE}} + 2S = 4S$$

所以 $S_{\triangle AED} = S_{\triangle BEC} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

回到原题, 由引理, $S_{\triangle EGF} \leq \frac{1}{4}S_{AEDF}$, $S_{\triangle EHF} \leq \frac{1}{4}S_{BECF}$.

相加得 $S_{EHFG} \leq \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

如果 $ABCD$ 是一个任意的凸四边形, 结论未必成立.

当 $DA \rightarrow 0, E \rightarrow B, F \rightarrow C$ 时, $S_{EFGH} \rightarrow S_{ABCD}$.

所以当 $\frac{AD}{BC}, \frac{BE}{AB}, \frac{CF}{CD}$ 足够小时, $S_{EFGH} > \frac{1}{4}S_{ABCD}$.

2. $n (n \geq 4)$ 个盘子里放有总数不少于 4 的糖块, 从任意的两个盘子各取一块糖, 放入另一个盘子中, 称为一次操作, 问能否经过有限次操作, 将所有的糖块集中到一个盘子中去? 证明你的结论.

解: 能够做到. 用数学归纳法证明, 设有 m 块糖, ($m \geq 4$).

当 $m = 4$ 时, 至多有 4 个盘子中有糖, 只有下面几种情况, 不难看出结论均成立.

$$(1) (1, 1, 1, 1) \rightarrow (3, 1, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 2, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 4)$$

$$(2) (2, 1, 1, 0) \rightarrow (4, 0, 0, 0)$$

$$(3) (3, 1, 0, 0) \rightarrow (2, 0, 2, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 2) \rightarrow (0, 0, 0, 4)$$

$$(4) (2, 2, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 2, 0) \rightarrow (0, 0, 4, 0)$$

$$(5) (4, 0, 0, 0)$$

设当小于 m 时结论均成立 ($m > 4$), 当有 m 块糖时, 可以先将 $m - 1$ 块糖集中到一个盘子内, 由归纳假设这是可以做到的. 剩下的一块若也在同一个盘子内, 显然结论成立. 否则可由如下的过程将 m 块糖集中到一个盘子内.

$$(m-1, 1, 0, 0) \rightarrow (m-2, 0, 2, 0) \rightarrow (m-3, 2, 1, 0) \rightarrow (m-4, 1, 1, 2) \rightarrow (m-2, 0, 1, 1) \rightarrow (m, 0, 0, 0)$$

由归纳法, 总可经有限次操作将所有的糖集中到同一个盘子中.

3. 求适合以下条件的所有函数 $f: [1, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$,

$$(1) f(x) \leq 2(x+1);$$

$$(2) f(x+1) = \frac{(f(x))^2 - 1}{x}.$$

解:显然 $f(x) = x + 1$ 是一个符合条件的函数,若存在 f 满足条件,且 $\exists x_0 \in [1, +\infty)$,使得 $f(x_0) \neq x_0 + 1$.

(1) $f(x_0) > x_0 + 1$, 设 $g(x) = f(x) - x - 1, g(x_0) > 0$, 又由于 $f(x) \leq 2(x+1)$, 得到 $g(x) \leq x + 1$.

而且由条件(2)不难得到 $g(x+1) = 2g(x) + \frac{1}{x}[(g(x))^2 + 2g(x)]$.

$\therefore g(x_0 + 1) > 2g(x_0) > 0$, 由数学归纳法不难证明 $g(x_0 + n) > 2^n g(x_0)$, 当 n 充分大时, $g(x_0 + n) > 2^n g(x_0) > x_0 + n + 1$, 矛盾.

(2) $f(x_0) < x_0 + 1$, 设 $g(x) = x + 1 - f(x), g(x_0) > 0$, 由 $f(x) \geq 1$, 得到 $g(x) \leq x$.

而且由条件(2)不难得到 $g(x+1) = 2g(x) - \frac{1}{x}[(g(x))^2 - 2g(x)]$.

$\therefore g(x_0 + 1) \geq 2g(x_0) - (g(x_0) - 2) = g(x_0) + 2$, 由数学归纳法不难证明 $f(x_0 + n) \geq g(x_0) + 2n$, 当 n 充分大时, $g(x_0 + n) \geq g(x_0) + 2n > x_0 + n$, 矛盾.

综上所述,对于任意的 $x \in [1, +\infty)$, $f(x) = x + 1$, 所以 $f(x) = x + 1$ 是唯一满足条件的函数.

4. 已知 $f(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + C_2 z^{n-2} + \dots + C_{n-1} z + C_n$ 是一个 n 次复系数多项式, 求证:一定存在一个复数 $z_0, |z_0| \leq 1$, 满足 $|f(z_0)| \geq |C_0| + |C_n|$.

证明:取 $\omega, |\omega| = 1$, 使得 $C_0 \omega^n$ 与 C_n 辐角相同, ($C_n = 0$ 时, $\omega = 1$ 即可). $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ 为 n 次单位根.

令 $z_i = \omega \varepsilon^{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$, 则

$$f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n) = n(C_0 \omega^n + C_n), |z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$$

$$\therefore \sum_{i=1}^n |f(z_i)| \geq |f(z_1) + f(z_2) + \dots + f(z_n)| = n|C_0 \omega^n + C_n| = n(|C_0| + |C_n|)$$

所以必然存在 i , 使得 $|f(z_i)| \geq |C_0| + |C_n|, |z_i| = 1$, 显然结论成立.

5. 对任何自然数 n , 求证恒等式:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

其中 $\binom{0}{0} = 1, \lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor$ 表示 $\frac{n-k}{2}$ 的整数部分.

证明:考虑函数 $f(x) = (1+x)^{2n+1}$, 显然 $\binom{2n+1}{n}$ 为它的 n 次项系数.

$$\text{另一方面} \quad f(x) = (x^2 + 2x + 1)^n (x+1) = \sum_{k=1}^n (x+1)(x^2+1)^{n-k} (2x)^k \binom{n}{k}$$

考虑每一项中 x^n 的系数, 若 $n-k$ 为偶数, $(x+1)(x^2+1)^{n-k}$ 中 x^{n-k} 的系数为 $\binom{n-k}{\frac{n-k}{2}}$; 若 $n-k$ 为奇数, $(x+1)(x^2+1)^{n-k}$ 中 x^{n-k} 的系数为 $\binom{n-k}{\frac{n-k-1}{2}}$.

所以每一项中 x^n 的系数均为 $\binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$.

所以每一项中 x^n 的系数均为 $\binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor}$.

$f(x)$ 中 x^n 的系数为

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} \\ \therefore & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \binom{n-k}{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n} \end{aligned}$$

6. 设 M 为平面上坐标为 $(1994p, 7 \times 1994p)$ 的点, 其中 p 是素数, 求满足下述条件的直角三角形的个数:

(1) 三角形的三个顶点都是整点, 而且 M 是其直角顶点;

(2) 三角形的内心是坐标原点.

解: 设该直角三角形为 MAB , 并且 MA 斜率为正.

将坐标原点平移至 M , 设 MA, MO 的倾斜角分别为 α, β , 则 $\tan \beta = 7$.

所以 MA 的斜率为 $k = \tan \alpha = \tan(\beta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan \beta - 1}{1 + \tan \beta} = \frac{3}{4}$.

MB 的斜率为 $-\frac{4}{3}$, 设 $A(-4t, -3t), B(3t', -4t')$, 由 A, B 为整点, t, t' 为正整数, $MA = 5t, MB = 5t'$.

由内心性质, 并且 $\angle M$ 是直角, $MA + MB - AB = 2r, \sqrt{2}r = MO = \sqrt{(1994p)^2 + (7 \times 1994p)^2}$,

$MA > r, MB > r$. (r 为内切圆半径)

$$\therefore 5t + 5t' - 5\sqrt{t^2 + t'^2} = 1 \times 5 \times 1994p,$$

$$t^2 + t'^2 = (t + t' - 2 \times 1994p)^2,$$

$$tt' - 2 \times 1994p(t + t') + 2 \times 1994^2 p^2 = 0 (t > 1994p, t' > 1994p)$$

$$(t - 2 \times 1994p)(t' - 2 \times 1994p) = 2 \times (1994p)^2$$

$$\text{设 } m = t - 2 \times 1994p, n = t' - 2 \times 1994p. mn = 2^3 \times 997^2 \times p^2.$$

不难知道 m, n 均为正整数, 所以 (m, n) 一组正整数解对应一个直角三角形.

\therefore 直角三角形的个数为 $2^3 \times 997^2 \times p^2$ 的正因子个数.

$$p \neq 2, p \neq 997 \text{ 时为 } (3+1)(2+1)(2+1) = 36;$$

$$p = 2 \text{ 时为 } (5+1)(2+1) = 18;$$

$$p = 997 \text{ 时为 } (3+1)(4+1) = 20.$$

第十届中国数学奥林匹克(1995年)
合肥 中国科技大学

1. 设 $2n$ 个实数 $a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n (n \geq 3)$ 满足

$$(1) a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n;$$

$$(2) 0 < a_1 = a_2, a_i + a_{i+1} = a_{i+2} (i = 1, 2, \dots, n-2);$$

$$(3) 0 < b_1 \leq b_2, b_i + b_{i+1} \leq b_{i+2} (i = 1, 2, \dots, n-2).$$

求证: $a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$.

证明:若 $a_1 \leq b_1$,则由递推关系不难证明 $a_i \leq b_i (i = 1, 2, \dots, n)$,显然结论成立.

若存在 $2 \leq i \leq n$,使得 $a_i \leq b_i, a_{i+1} \leq b_{i+1}$.

$i = n-1$ 时,显然有结论成立; $i < n-1$ 时,由递推关系不难证明 $a_j \leq b_j (j \geq i)$,所以也有结论成立.

否则必有 $a_1 > b_1$,设 $I = \{i | a_i \leq b_i\}$,则 I 中不存在相邻的正整数.

设 $I' = \{j | j = i-1, i \in I\}, I \cap I' = \emptyset$.

若 $i \in I$,则 $a_i \leq b_i, a_{i-1} > b_{i-1}, a_{i+1} > b_{i+1} (i \leq n-2)$.

$$\therefore a_i + a_{i-1} = a_{i+1} > b_{i+1} \geq b_i + b_{i-1}. \therefore \sum_{i \in I \cup I'} a_i > \sum_{i \in I \cup I'} b_i (i \leq n-2).$$

又若 $i \in I \cup I', a_i > b_i$.

$$\therefore \sum_{i=1}^{n-2} a_i > \sum_{i=1}^{n-2} b_i, \text{ 又 } \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i, \therefore a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n.$$

综上所述, $a_{n-1} + a_n \leq b_{n-1} + b_n$.

2. 设 \mathbb{N} 为自然数集合, $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ 适合条件: $f(1) = 1$,对于任何自然数 n 都有

$$\circ 3f(n)f(2n+1) = f(2n)(1+3f(n));$$

$$\circ f(2n) < 6f(n).$$

试求方程 $f(k) + f(l) = 293$,其中 $k < l$ 的所有解.

解:由 $\gcd(3f(n), 1+3f(n)) = 1, \therefore 3f(n) | f(2n)$.

又因为 $f(2n) < 6f(n)$,所以 $f(2n) = 3f(n), f(2n+1) = 3f(n) + 1 = f(2n) + 1$.

由 $f(1) = 1$,由归纳法不难证明:若 n 的二进制表示为

$$(a_m a_{m-1} \dots a_0)_2 = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \dots + a_0 (a_i = 0 \text{ 或 } 1)$$

则 $f(n)$ 的三进制表示为

$$(a_m a_{m-1} \dots a_0)_3 = a_m 3^m + a_{m-1} 3^{m-1} + \dots + a_0 (a_i = 0 \text{ 或 } 1)$$

由 $k < l$,显然 $f(k) < f(l)$,

设 $k = (a_m a_{m-1} \dots a_0)_2, l = (b_m b_{m-1} \dots b_0)_2, c_i = a_i + b_i, c_i = 0, 1, 2 (i = 0, 1, \dots, m)$.

则 $f(k) + f(l) = (c_m c_{m-1} \dots c_0)_3$.

而 $293 = 3^5 + 3^3 + 2 \times 3^2 + 3 + 2 = (101212)_3$.所以由 $f(k) < f(l), a_m \leq b_m, m = 5$.

必有 $a_5 = 0, b_5 = 1, a_4 = b_4 = 0, a_2 = b_2 = a_0 = b_0 = 1, a_3 + b_3 = 1, a_1 + b_1 = 1$.

不难知道只有四组解:

- (1) $a_3 = a_1 = 1, f(k) = (1111)_3, f(l) = (100101)_3, (k, l) = (15, 37);$
 (2) $a_3 = 0, a_1 = 1, f(k) = (111)_3, f(l) = (101101)_3, (k, l) = (7, 45);$
 (3) $a_3 = 1, a_1 = 0, f(k) = (1101)_3, f(l) = (100111)_3, (k, l) = (13, 39);$
 (4) $a_3 = a_1 = 0, f(k) = (101)_3, f(l) = (101111)_3, (k, l) = (5, 47).$

3. 试求

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} |k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

的最小值,其中 x 和 y 是任意实数.

解: 设

$$F = \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{10} \sum_{k=1}^{10} |k(x+y-10i)(3x-6y-36j)(19x+95y-95k)|$$

$$F_1 = \sum_{i=1}^{10} |x+y-10i|, F_2 = \sum_{j=1}^{10} |3x-6y-36j|, F_3 = \sum_{k=1}^{10} k|x+5y-5k|$$

则 $F = 57F_1F_2F_3$.

引理: a_1, a_2, \dots, a_n 为 n 个实数, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. 定义 b 为它们的中位数:

若 $2|n, n = 2m, a_m \leq b \leq a_{m+1};$

若 $2 \nmid n, n = 2m + 1, b = a_{m+1}.$

设 $g(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \dots + |x - a_n|$, 则 $g(t)$ 的最小值为 $g(b)$.

引理的证明: $\because |x - a_1| + |x - a_n| \geq a_n - a_1$ (当 $a_1 \leq x \leq a_n$ 时取等号)

$|x - a_2| + |x - a_{n-1}| \geq a_{n-1} - a_2$ (当 $a_2 \leq x \leq a_{n-1}$ 时取等号) \dots

n 为偶数时, $|x - a_{\frac{n}{2}}| + |x - a_{\frac{n}{2}+1}| \geq a_{\frac{n}{2}+1} - a_{\frac{n}{2}}$ (当 $a_{\frac{n}{2}} \leq x \leq a_{\frac{n}{2}+1}$ 时取等号)

n 为奇数时, $|x - a_{\frac{n+1}{2}}| \geq 0$ (当 $x = a_{\frac{n+1}{2}}$ 时取等号)

$\therefore g(x) \geq (a_n + a_{n-1} + \dots + a_{[\frac{n}{2}]+1}) - (a_{[\frac{n+1}{2}]} + \dots + a_1)$ (当 $x = b$ 时取等号)

回到原题, 由引理分别应用到 F_1, F_2, F_3 上得

$$F_1 \geq 10 \times (10 + 9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1) = 250, 50 \geq x + y \geq 60 \text{ 时取等号.}$$

$$F_2 \geq 12 \times (10 + 9 + 8 + 7 + 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1) = 300, 60 \geq x - 2y \geq 72 \text{ 时取等号.}$$

$$F_3 \geq 5 \times (10 \times 10 + 9 \times 9 + 8 \times 8 - 7 \times 6 - 6 \times 6 - 5 \times 5 - 4 \times 4 - 3 \times 3 - 2 \times 2 - 1) = 560, x + 5y = 35 \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore F \geq 57 \times 250 \times 300 \times 560 = 2394000000.$$

且不难验证 $x = 60, y = -5$ 时满足所有取等号条件, 所以原式的最小值为 2394000000.

4. 空间有四个球, 它们的半径分别为 2, 2, 3, 3, 每个球都与其余 3 个球外切, 另有一个小球与这四个球都外切, 求该小球的半径.

解: 设四个球的球心分别为 A, B, C, D , 则 $AB = 4, CD = 6, AC = BC = AD = BD = 5$.

设 E, F 分别为 AB, CD 中点, 小球球心为 O , 半径为 r , 则四面体 $ABCD$ 关于平面 ABF, CDE 对称.

四个球也同样, 所以由对称性 O 在 EF 上.

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{(2+r)^2 - 2^2} = \sqrt{r^2 + 4r},$$

$$OF = \sqrt{OD^2 - DF^2} = \sqrt{(3+r)^2 - 3^2} = \sqrt{r^2 + 6r},$$

$$EF = \sqrt{FA^2 - AE^2} = \sqrt{DA^2 - DF^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\therefore \sqrt{r^2 + 4r} + \sqrt{r^2 + 6r} = 2\sqrt{3}.$$

解得 $r = \frac{6}{11}$.

5. 设 a_1, a_2, \dots, a_{10} 是任意10个两两不同的自然数, 它们的和为1995. 试求 $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1$ 的最小值.

解: 将 a_1, a_2, \dots, a_{10} 按顺时针方向依次写在一个圆周上, 于是所求表达式即为每相邻两数乘积的总和 A . 并且将 a_1, a_2, \dots, a_{10} 的和记为 $N, N \geq 55$. 将和为 N 的任意10个不同自然数所对应的表达式的最小值记为 $S(N)$.

先考虑这10个数为 $1, 2, \dots, 10$ 的情况, 即 $N = 55$ 时.

不妨设 $a_1 = 10$, 我们通过调整证明 a_1, a_2, \dots, a_{10} 依次为 $10, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2$ 时取到最大值.

若 $a_j = 1, j \neq 2$, 将 $(a_2, \dots, a_{j-1}, a_j)$ 这一段整个的按逆过来的顺序排列, 即变为 $(a_j, a_{j-1}, \dots, a_2)$, 设操作前所求表达式为 A , 操作后为 A' ,

则 $A' - A = (10 + a_2a_{j+1}) - 10a_2 - a_{j+1} = (a_2 - 1)(a_{j+1} - 10) \leq 0$, A 的值下降了.

同理若 $a_{10} \neq 2$, 通过类似的调整使 $a_{10} = 2$, 且 A 的值减少; 类似的经过有限次操作即得到 $(a_1, a_2, \dots, a_{10}) = (10, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2)$, 且每次操作 A 的值都下降.

$$\therefore S(55) = 10 + 9 + 27 + 21 + 35 + 30 + 24 + 32 + 16 + 20 = 224.$$

对于 $N > 55$, 显然最大的数大于10, 第二大的数不小于9, \dots , 最小的数不小于1.

不妨设 a_1 最大, 经类似的讨论可知道若将 a_1, a_2, \dots, a_{10} 从大到小依次以 $10, 9, \dots, 1$ 代替, 必有按照上面方式排列时取最小值.

设 $(b_1, b_2, \dots, b_{10}) = (10, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2), c_i = a_i - b_i \geq 0, c_{11} = c_1, b_{11} = b_1, b_0 = b_{10}$.

$$\begin{aligned} A &= a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1 \\ &= \sum_{i=1}^{10} b_i b_{i+1} + \sum_{i=1}^{10} c_i c_{i+1} + \sum_{i=1}^{10} c_i (b_{i-1} + b_{i+1}) \\ &\geq 224 + (b_2 + b_{10})(N - 55) = 3N + 59 \end{aligned}$$

而当 $(a_1, a_2, \dots, a_{10}) = (N - 45, 1, 9, 3, 7, 5, 6, 4, 8, 2)$ 时, $A = 3N + 59. \therefore S(N) = 3N + 59$.

所以 $N = 1995$ 时, $a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_9a_{10} + a_{10}a_1$ 的最小值为 $3 \times 1995 + 59 = 6044$.

6. 设 n 是大于1的奇数, 已给 $y_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) = (1, 0, \dots, 0, 1)$.

设
$$x_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & x_i^{(k-1)} = x_{i+1}^{(k-1)} \text{ 时, } i = 1, 2, \dots, n \\ 1 & x_i^{(k-1)} \neq x_{i+1}^{(k-1)} \text{ 时, } i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

其中 $x_{n+1}^{(k-1)} = x_1^{(k-1)}$.

记 $y_k = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}), k = 1, 2, \dots$

若正整数 m 满足 $y_0 = y_m$. 求证: m 是 n 的倍数.

证明: 将一个圆周 n 等分, 将 $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}$ 依次按顺时针方向写在这些分点上表示 y_k .

对于 y_0 ,显然它有唯一的对称轴,不妨设为竖直线.

因为 $x_i^{(k)} \equiv x_i^{(k-1)} + x_{i+1}^{(k-1)} \pmod{2}$.

所以将 y_k 中每两个相邻点上的数的和除以2的余数放在这段弧的中点上,再将原先的数撤去,显然对称轴是不变的. 而再将它逆时针旋转 $\frac{\pi}{n}$ 时,即得到 y_{k+1} .所以 y_{k+1} 的对称轴是 y_k 的对称轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{n}$.

若 $y_0 = y_m$,它们的对称轴也相同,而中间变换了 m 次,对称轴旋转了 $\frac{m\pi}{n}$,而它重合于竖直线,所以它旋转了 π 的整数倍,记为 $k\pi$. $\therefore \frac{m\pi}{n} = k\pi, m = kn$,即 m 是 n 的倍数.

第十一届中国数学奥林匹克(1996年)

天津 南开大学

1. 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的垂心, 由 A 向以 BC 为直径的圆作切线 AP, AQ , 切点分别为 P, Q .

求证: P, H, Q 三点共线.

证明: 设三条高的垂足分别为 D, E, F, BC 中点为 O, PQ 与 AO 交于 R , 则 $AO \perp PR$.

由 $\angle APO = \angle ARP = 90^\circ, \triangle APO \sim \triangle ARP, AO \cdot AR = AP^2$.

又 $\angle ADC = \angle BEC = 90^\circ, \therefore H, D, C, E$ 四点共圆. $\therefore AE \cdot AC = AH \cdot AD$.

由切割线定理 $AE \cdot AC = AP^2$.

$\therefore AO \cdot AR = AH \cdot AD$.

若 D 与 O 重合, 则 H 与 R 重合, P, H, Q 显然共线.

否则, O, D, H, R 四点共圆, $\angle ORH = \angle ODH = 90^\circ$.

$\therefore AO \perp RH, P, H, Q$ 共线, 证毕.

2. 设 $S = \{1, 2, \dots, 50\}$, 求最小自然数 k , 使 S 的任一 k 元子集中, 都存在两个不同的数 a 和 b , 满足 $a + b$ 整除 ab .

解: 设 $a, b \in S$, 满足 $a + b$ 整除 ab . 设 $c = \gcd(a, b)$, 于是 $a = ca_1, b = cb_1$, 其中 $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, 且 $\gcd(a_1, b_1) = 1$. 因此

$$c(a_1 + b_1) = a + b \mid ab = c^2 a_1 b_1, a_1 + b_1 \mid ca_1 b_1$$

$\therefore \gcd(a_1 + b_1, a_1) = \gcd(a_1 + b_1, b_1) = 1$, 所以 $a_1 + b_1 \mid c$.

因为 $a, b \in S, a + b \leq 99, c(a_1 + b_1) \leq 99$. 所以 $3 \leq a_1 + b_1 \leq 9$.

易知 S 中所有满足 $a + b$ 整除 ab 的不同数对共有23对如下:

$$a_1 + b_1 = 3: (6, 3)(12, 6)(18, 9)(24, 12)(30, 15)(36, 18)(42, 21)(48, 24)$$

$$a_1 + b_1 = 4: (12, 4)(24, 8)(36, 12)(48, 16)$$

$$a_1 + b_1 = 5: (20, 5)(40, 10)(15, 10)(30, 20)(45, 30)$$

$$a_1 + b_1 = 6: (30, 6)$$

$$a_1 + b_1 = 7: (42, 7)(35, 14)(28, 21)$$

$$a_1 + b_1 = 8: (40, 24)$$

$$a_1 + b_1 = 9: (45, 36)$$

令 $M = \{6, 12, 15, 18, 20, 21, 24, 35, 40, 42, 45, 48\}, |M| = 12$. 并且上述23个数对中每一对都至少包含 M 中1个元素. 因此, 若令 $T = S \setminus M$, 则 $|T| = 38$, 且 T 中任何两数都不满足题中条件, 所以 $k \geq 39$.

而下列12个满足题中条件的数对互不相交:

$$(6, 3)(12, 4)(20, 5)(42, 7)(24, 8)(18, 9)(40, 10)(35, 14)(30, 15)(48, 16)(28, 21)(45, 36)$$

对于 S 的任意一个39元子集 R , 只比 S 少11个元素, 而这11个元素至多属于上述12个数对中的11对, 从而必有一对属于 R .

综上可知,所求的最小自然数 $k = 39$.

3. 设 \mathbb{R} 为实数集合, 函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 适合条件

$$f(x^3 + y^3) = (x + y)((f(x))^2 - f(x)f(y) + (f(y))^2), x, y \text{ 为实数.}$$

试证:对一切实数 x ,都有 $f(1996x) = 1996f(x)$.

证明:令 $x = y = 0$,有 $f(0) = 0$.令 $y = 0$, $f(x^3) = x(f(x))^2$.

所以 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2, x \in \mathbb{R}$.

由此可知 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$; $x \leq 0$ 时, $f(x) \leq 0$.

设 $S = \{a > 0 \mid \text{对于} \forall x \in \mathbb{R}, f(ax) = af(x)\}$.

显然 $1 \in S$,若 $a \in S$,由 $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2$,

$$ax(f(x))^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f(a^{\frac{1}{3}}x^3) = a^{\frac{1}{3}}x(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2.$$

所以 $(f(a^{\frac{1}{3}}x))^2 = (a^{\frac{1}{3}}f(x))^2, f(a^{\frac{1}{3}}x) = a^{\frac{1}{3}}f(x)$.

即 $a^{\frac{1}{3}} \in S$.

若 $a, b \in S$,则 $a^{\frac{1}{3}}, b^{\frac{1}{3}} \in S$

$$\begin{aligned} f((a+b)x) &= f((a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3) \\ &= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}[(f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2 - f(a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}) + (f(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}))^2] \\ &= (a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})x^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})(f(x^{\frac{1}{3}}))^2 \\ &= (a+b)x^{\frac{1}{3}}(f(x^{\frac{1}{3}}))^2 = (a+b)f(x) \end{aligned}$$

$\therefore a + b \in S$.

由 $1 \in S, 1 + 1 = 2 \in S$,由归纳法易知所有自然数 $n \in S$.

$\therefore 1996 \in S$,即 $f(1996x) = 1996f(x)$.

4. 8位歌手参加艺术会,准备为他们安排 m 次演出,每次由其中4位登台表演.要求8位歌手中任意两位同时演出的次数都一样多,请设计一种方案,使得演出的次数 m 最少.

解:设任两位同时演出 r 次,则 $r \binom{8}{2} = m \binom{4}{2}$,即 $14r = 3m$.

$\therefore 3 \mid r, r \geq 3, m \geq 14$.

用 $1, 2, \dots, 8$ 代表8位歌手,如下14次演出满足要求:

(1,2,3,4);(1,2,5,6);(1,2,7,8);(1,3,5,7);(1,3,6,8);(1,4,5,8);(1,4,6,7);
(2,3,5,8);(2,3,6,7);(2,4,5,7);(2,4,6,8);(3,4,5,6);(3,4,7,8);(5,6,7,8).

$\therefore m = 14$.

5. 设 n 为自然数, $x_0 = 0, x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ 且 $\sum_{i=1}^n x_i = 1$.求证:

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1}} \sqrt{x_i + \dots + x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

证明:设 $x_0 + x_1 + \dots + x_{i-1} = \cos \theta_i$,则 $x_i + x_{i+1} + \dots + x_n = 1 - \cos \theta_i (i = 1, 2, \dots, n + 1)$.

$\therefore x_i = \cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i, \theta_i \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} > \theta_2 > \cdots > \theta_n > \theta_{n+1} = 0.$$

往证:

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i}{\sqrt{1 + \cos \theta_i} \sqrt{1 - \cos \theta_i}} < \frac{\pi}{2}$$

即

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i}{\sin \theta_i} < \frac{\pi}{2}$$

而由 $\sin \theta_i \in (0, 1] (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \geq \sum_{i=1}^n (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i) = \cos \theta_{n+1} - \cos \theta_1 = 1$$

又由于 $\frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} < \theta_i, \sin x < x (0 < x < \frac{\pi}{2})$.

$$\begin{aligned} \therefore & \sum_{i=1}^n \frac{\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i}{\sin \theta_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{2 \sin \frac{\theta_{i+1} + \theta_i}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{2}}{\sin \theta_i} \\ &\leq \sum_{i=1}^n \frac{2 \sin \theta_i \sin \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{2}}{\sin \theta_i} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \sin \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{2} \\ &< 2 \sum_{i=1}^n \frac{\theta_i - \theta_{i+1}}{2} \\ &= \theta_1 - \theta_{n+1} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

所以原不等式成立.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, BC = 1$, 求 $\triangle ABC$ 的内接三角形(三顶点分别在 $\triangle ABC$ 三边上的三角形)的最长边的最小值.

解: 令 $\triangle DEF$ 为内接三角形, D, E, F 分别在 BC, CA, AB 上.

对于 BC 上的任意一点 D , 令 $\angle EDF = 60^\circ$ 保持不变, 设 G, H 分别在 AC, AB 上, $\angle ADG = \angle ADH = 60^\circ$. 显然当 E 从 G 运动到 A 时, F 从 A 运动到 H .

因为 $\angle DGA > \angle C = 90^\circ$, 所以 $DG > DA$;

又 $\angle DHA = \angle B + \angle BDH = \angle ADB > \angle C = 90^\circ$, 所以 $DA > DH$.

所以必然存在某个 E , 使得 $DE = DF$, 即 $\triangle DEF$ 为等边三角形. 并且 E 从 G 运动到 A 时, DE 严格增, DF 严格减, 所以有唯一的 E , 使得 $\triangle DEF$ 为等边三角形.

设 $BD = x$, 令 $CE = \frac{\sqrt{3}}{2}x, BF = 1 - \frac{x}{2}$. 由余弦定理

$$DF^2 = x^2 + (1 - \frac{x}{2})^2 - 2x(1 - \frac{x}{2}) \cos 60^\circ = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

$$DE^2 = (1 - x)^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

$$EF^2 = (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}x)^2 + (1 + \frac{x}{2})^2 - 2\sqrt{3}(1 - \frac{x}{2})(1 + \frac{x}{2})\cos 30^\circ = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1$$

即 $DF = DE = EF$, 此时 $\triangle DEF$ 为等边三角形, 即 D 固定时唯一的等边三角形.

设 DEF 为等边三角形, 记 AB, AC 中点分别为 M, N, BM 中点为 S, T 在 AB 上, $BT = \frac{1}{3}AB$.

D 从 B 运动到 C 时, E 从 C 运动到 N, F 从 M 运动到 S . 设 $\triangle DEF$ 的边长为 a .

$$a^2 = \frac{7}{4}x^2 - 2x + 1 = \frac{7}{4}(x - \frac{4}{7})^2 + \frac{3}{7}.$$

当 $x = \frac{4}{7}$ 时, 有最小值 $\sqrt{\frac{3}{7}}$. 设此时在 $\triangle PQR$ 的位置.

下面证明对任意内接三角形 XYZ , 最大边长不小于 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

考虑 Z 在 AB 上的位置,

$$(1) Z \text{ 在 } AM \text{ 上, 则 } ZX \geq \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{3}}{2} > \sqrt{\frac{3}{7}};$$

$$(2) Z \text{ 在 } BT \text{ 上, 则 } ZY \geq \frac{2}{3}BC = \frac{2}{3} > \sqrt{\frac{3}{7}};$$

(3) Z 在 MT 上, 按照前面的方法作出正三角形 $DEF, (F = Z), x < \frac{1}{3}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}BF = \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - \frac{x}{2}) > \frac{\sqrt{3}}{2}x = CE. \text{ 则 } DE = DF = EF \geq \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$(3.1) X \text{ 在 } CD \text{ 上, } XZ \geq DF \geq \sqrt{\frac{3}{7}};$$

$$(3.2) Y \text{ 在 } CE \text{ 上, } \angle FEC > 90^\circ, YZ \geq EF \geq \sqrt{\frac{3}{7}};$$

$$(3.3) X \text{ 在 } BD \text{ 上, } Y \text{ 在 } AE \text{ 上, } XY = \sqrt{CX^2 + CY^2} \geq \sqrt{CD^2 + CE^2} = DE \geq \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

综上所述, $\triangle ABC$ 的内接三角形的最长边的最小值为 $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

第十二届中国数学奥林匹克(1997年)

杭州 浙江大学

1. 设实数 $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ 满足如下两个条件:

$$(1) -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3} (i = 1, 2, \dots, 1997)$$

$$(2) x_1 + x_2 + \dots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$$

试求 $x_1^{12} + x_2^{12} + \dots + x_{1997}^{12}$ 的最大值, 并说明理由.

解: 考虑函数 $f(x) = (t+x)^{12} + (t-x)^{12}$, (t 为常数).

显然 $f(x)$ 为偶函数且展开式中所有偶次项系数均为正, 所有奇次项均为0, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上为增函数.

所以对于 $\forall i, j, 1 \leq i < j \leq 1997$, $x_i + x_j$ 为定值时, 当 $|x_j - x_i|$ 的值越大时, $x_i^{12} + x_j^{12}$ 越大.

这样我们逐次进行调整, 过程如下: 每次选取 $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x_i \leq x_j < \sqrt{3}$, 保持它们的和不变. 若 $x_i + x_j > \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$, 则将 (x_i, x_j) 调整为 $(x_i + x_j - \sqrt{3}, \sqrt{3})$; 否则将 (x_i, x_j) 调整为 $(x_i + x_j + \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$. 这样调整后 $F = x_1^{12} + x_2^{12} + \dots + x_{1997}^{12}$ 的值增大, 经过有限次这样的调整后, 最多有一个 x_i 不等于 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $\sqrt{3}$, 此时达到最大值.

设此时有 k 个 $\sqrt{3}$, $1996 - k$ 个 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 另一个为 $m \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$.

$$\text{则 } k\sqrt{3} + (1996 - k)(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + m = -318\sqrt{3}, m = \frac{1}{\sqrt{3}}(1042 - 4k).$$

$$\therefore -1 \leq 1042 - 4k \leq 3, \frac{1039}{4} \leq k \leq \frac{1043}{4}$$

又因为 $k \in \mathbb{Z}$, $\therefore k = 260, m = \frac{2}{3}\sqrt{3}$.

$$\therefore F \leq 260(\sqrt{3})^{12} + 1736(-\frac{1}{\sqrt{3}})^{12} + (\frac{2}{3}\sqrt{3})^{12} = 189548$$

当有 260 个 x_i 为 $\sqrt{3}$, 1 个 x_i 为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, 其他均为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 时取等号.

2. 点 P 是凸四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点, 且 P 到各顶点的连线与四边形过该点的两条边的夹角均为锐角. 递推定义 A_k, B_k, C_k 和 D_k 分别为 P 关于直线 $A_{k-1}B_{k-1}, B_{k-1}C_{k-1}, C_{k-1}D_{k-1}$ 和 $D_{k-1}A_{k-1}$ 的对称点 ($k = 2, 3, \dots$). 考察四边形序列 $A_jB_jC_jD_j (j = 1, 2, \dots)$.

试问: (1) 前 12 个四边形中, 哪些必定与第 1997 个相似, 哪些未必;

(2) 假设第 1997 个是圆内接四边形, 那么在前 12 个四边形中, 哪些必定是圆内接四边形, 哪些未必.

解: 设 $\angle D_j A_j P, \angle A_j B_j P, \angle B_j C_j P, \angle C_j D_j P$ 分别为 $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j$;

$\angle P A_j B_j, \angle P B_j C_j, \angle P C_j D_j, \angle P D_j A_j$ 分别为 $\alpha'_j, \beta'_j, \gamma'_j, \delta'_j$.

不难知道 A_j 为 $\triangle D_{j+1} A_{j+1} P$ 的外心, 所以 $\alpha_{j+1} = \frac{1}{2} \angle D_{j+1} A_j P = \alpha_j$.

类似地, 我们可以知道

$$(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}, \gamma_{j+1}, \delta_{j+1}) = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$$

$$(\alpha'_{j+1}, \beta'_{j+1}, \gamma'_{j+1}, \delta'_{j+1}) = (\beta'_j, \gamma'_j, \delta'_j, \alpha'_j)$$

$$\therefore (\alpha_{j+4}, \beta_{j+4}, \gamma_{j+4}, \delta_{j+4}) = (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)$$

$$(\alpha'_{j+4}, \beta'_{j+4}, \gamma'_{j+4}, \delta'_{j+4}) = (\alpha'_j, \beta'_j, \gamma'_j, \delta'_j)$$

$$\therefore A_{j+4} B_{j+4} C_{j+4} D_{j+4} \sim A_j B_j C_j D_j$$

又因为 $(\alpha_{j+2} + \alpha'_{j+2}) + (\gamma_{j+2} + \gamma'_{j+2}) = \alpha_j + \gamma'_j + \gamma_j + \alpha'_j = (\alpha_j + \alpha'_j) + (\gamma_j + \gamma'_j)$

所以 $A_{j+2}B_{j+2}C_{j+2}D_{j+2}$ 与 $A_jB_jC_jD_j$ 相应的对角和相等.

于是有(1)前12个四边形中,第1,5,9个必定与第1997个相似;

(2)假设第1997个是圆内接四边形,那么在前12个四边形中,第1,3,5,7,9,11个必定是圆内接四边形.

下面说明对于前12个四边形中其他的四边形未必成立.

考虑筝形 $A_1B_1C_1D_1$, P 为其对角线交点, $A_1B_1 = A_1D_1$, $C_1B_1 = C_1D_1$, $\angle B_1 = \angle D_1 < 90^\circ$.它不是圆内接四边形.

设 $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, 则 $(\alpha'_1, \beta'_1, \gamma'_1, \delta'_1) = (\alpha, \delta, \gamma, \beta)$.

所以 $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2) = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$; $(\alpha'_2, \beta'_2, \gamma'_2, \delta'_2) = (\delta, \gamma, \beta, \alpha)$, $(\beta + \delta < 90^\circ)$

$\therefore \angle A_2 = \angle D_2 = \alpha + \delta$, $\angle B_2 + \angle C_2 = \beta + \gamma$, $A_2B_2C_2D_2$ 为等腰梯形,是圆内接四边形.

类似的可知 $A_3B_3C_3D_3$ 为筝形,不是圆内接四边形.且 $\angle A_3 = \angle C_3 = \alpha + \gamma > 90^\circ$.

$A_4B_4C_4D_4$ 为等腰梯形,是圆内接四边形.

这四个四边形互不相似,而四边形的形状显然是以4为周期变化. 所以在这个四边形序列中,前12个四边形中,只有第1,5,9个与第1997个相似.

在上述序列中,以 $A_2B_2C_2D_2$ 为第一个四边形,不难知道所有的第 $2k + 1$ 个四边形均为圆内接四边形,而其他四边形均不是圆内接四边形,所以第1997个是圆内接四边形,在前12个四边形中,只有第1,3,5,7,9,11个是圆内接四边形.

综上所述(1)前12个四边形中,第1,5,9个必定与第1997个相似,其他未必;

(2)假设第1997个是圆内接四边形,在前12个四边形中,第1,3,5,7,9,11个必定是圆内接四边形,其他未必.

3.求证存在无穷多个正整数 n ,使得可将 $1, 2, \dots, 3n$ 列成数表

$$\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{array}$$

满足如下两个条件:

(1) $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = \dots = a_n + b_n + c_n$ 且为6的倍数;

(2) $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ 且为6的倍数.

证明:显然 $6n \mid \frac{1}{2}(3n)(3n + 1)$, $18 \mid \frac{1}{2}(3n)(3n + 1)$.

必有 $n \equiv 1 \pmod{4}$, $n \equiv 0 \pmod{3}$, 所以 $n \equiv 9 \pmod{12}$.

下面 A_i 中第1,2,3行分别记为 $\alpha(i), \beta(i), \gamma(i)$,且 $\alpha(i) + k$ 表示将 $\alpha(i)$ 中每个数都加上 k ,其他类似.

先构造 A_9 满足条件:设

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 6 \\ 5 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

显然各行各列之和均为15,令

$$A_9 = \begin{pmatrix} \alpha(3) & \beta(3) + 18 & \gamma(3) + 9 \\ \beta(3) + 9 & \gamma(3) & \alpha(3) + 18 \\ \gamma(3) + 18 & \alpha(3) + 9 & \beta(3) \end{pmatrix}$$

易知 A_9 中的27个元素为 $1, 2, \dots, 27$,并且各列之和为 $15 + 9 + 18 = 42 \equiv 0 \pmod{6}$;

各行之和为 $3(15 + 9 + 18) = 126 \equiv 0 \pmod{6}$.所以9是满足条件的正整数.

设 m 满足条件,且形成的数表(矩阵)为 A_m ,各行之和为 $6u$,各列之和为 $6v$.

构造 A_{3m} 如下:

$$A_{3m} = \begin{pmatrix} \alpha(m) & \beta(m) + 6m & \gamma(m) + 3m \\ \beta(m) + 3m & \gamma(m) & \alpha(m) + 6m \\ \gamma(m) + 6m & \alpha(m) + 3m & \beta(m) \end{pmatrix}$$

则 A_{3m} 中 $9m$ 个元素为 $1, 2, \dots, 9m$,并且各行之和为 $18u + 9m^2$,各列之和为 $6v + 9m$.

构造 A_{9m} 如下:

$$A_{9m} = \begin{pmatrix} \alpha(3m) & \beta(3m) + 18m & \gamma(3m) + 9m \\ \beta(3m) + 9m & \gamma(3m) & \alpha(3m) + 18m \\ \gamma(3m) + 18m & \alpha(3m) + 9m & \beta(3m) \end{pmatrix}$$

则 A_{9m} 中 $27m$ 个元素为 $1, 2, \dots, 27m$,并且各行之和为 $54u + 108m^2 \equiv 0 \pmod{6}$,

各列之和为 $6v + 36m \equiv 0 \pmod{6}$.

$\therefore 9m$ 也是满足条件的正整数,由归纳法不难证明对 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 9^k 是满足条件的正整数,显然有无穷多个.

4. 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$,其边 AB 与 DC 的延长线交于点 P , AD 与 BC 的延长线交于点 Q ,过 Q 作该圆的两条切线 QE 和 QF ,切点分别为 E, F .求证: P, E, F 三点共线.

证明:连接 PQ ,并且在 PQ 上取一点 M ,使得 B, C, M, P 四点共圆,则 $QE^2 = QM \cdot QP = QC \cdot QB$,

并且 $\angle PMC = \angle CBA = \angle PDQ$.所以 C, D, Q, M 四点共圆. 所以 $PM \cdot PQ = PC \cdot PD$.

$PQ^2 = PM \cdot PQ + QM \cdot PQ = QC \cdot QB + PC \cdot PD$.

连接 PF ,设 PF 与圆的另一交点为 E' ,作 $QG \perp PF$,垂足为 G .

则 $PD \cdot PC = PE' \cdot PF$, $QF^2 = QC \cdot QB$.

所以 $PE' \cdot PF + QF^2 = PQ^2$,即 $PE' \cdot PF = PQ^2 - QF^2$.

又因为 $PQ^2 - QF^2 = PG^2 - GF^2 = (PG - GF)(PG + GF) = PF(PG - GF)$,

从而 $PG - GF = PE' = PG - GE'$.即 $GF = GE'$.

故 E' 与 E 重合, P, E, F 三点共线.

另证:设过 A, D 的切线相交于 R ,过 B, C 的切线相交于 S, AC, BD 相交于 T .

则 R 为 AD 的极点, S 为 BC 的极点.由于 AD 过点 Q, BC 过点 Q ,所以 Q 的极线 EF 过点 R, S .

在退化六边形 $AACDDB$ 中,由Pascal定理, P, R, T 三点共线;类似的在 $ACCDBB$ 中, P, S, T 三点共线.

所以 P, R, S, T 四点共线,即 P 在直线 EF 上.证毕.

5. 设 $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$, 对于映射 $f: A \rightarrow A$, 记

$$f^{[1]}(x) = f(x), f^{[k+1]} = f(f^{[k]}(x)) (k \in \mathbb{N}).$$

设从 A 到 A 的一一映射 f 满足条件: 存在自然数 M , 使得:

(1) 当 $m < M, 1 \leq i \leq 16$ 时, 有

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \not\equiv \pm 1 \pmod{17},$$

$$f^{[m]}(1) - f^{[m]}(17) \not\equiv \pm 1 \pmod{17}$$

(2) 当 $1 \leq i \leq 16$ 时, 有

$$f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17},$$

$$f^{[m]}(1) - f^{[m]}(17) \equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}$$

试对满足上述条件的一切 f , 求所对应的 M 的最大可能值, 并证明你的结论.

证明: 所求 $M_{\max} = 8$.

令 1 与 18 相同. 将所有的 $f^{[m]}(i+1), f^{[m]}(i) (i = 1, 2, \dots, 17; m = 1, 2, \dots, M-1)$ 配成一对, 则所有的这样的数对均不相同.

否则设存在 $(f^{[m_1]}(i+1), f^{[m_1]}(i)) = (f^{[m_2]}(j+1), f^{[m_2]}(j))$.

因为 f 为双射, 必然存在反函数 f^{-1} .

若 $m_1 = m_2$, 必有 $(i+1, i) = (j+1, j)$.

否则设 $m_1 < m_2$,

$$f^{-1[m_1]}(f^{[m_1]}(i+1)) = i+1, f^{-1[m_1]}(f^{[m_1]}(i)) = i;$$

$$f^{-1[m_1]}(f^{[m_2]}(j+1)) = f^{[m_2-m_1]}(j+1), f^{-1[m_1]}(f^{[m_2]}(j)) = f^{[m_2-m_1]}(j).$$

$$\therefore (f^{[m_2-m_1]}(j+1), f^{[m_2-m_1]}(j)) = (i+1, i).$$

$$\therefore f^{[m_2-m_1]}(j+1) - f^{[m_2-m_1]}(j) \equiv 1 \text{ 或 } -1 \pmod{17}, \text{ 矛盾.}$$

所有这样的对共有 $17(M-1)$ 对, 但是由于没有任一对中两数之差的绝对值为 1, 所以最多有 $\binom{17}{2} - 17$ 对.

$$\therefore 17(M-1) \leq \binom{17}{2} - 17, M \leq 8.$$

令 $f(i) \equiv 3i + 2 \pmod{17}$, 由归纳法不难证明 $f^{[m]}(i) \equiv 3^m i + 3^m - 1 \pmod{17}$.

而且 $3^m \not\equiv \pm 1 \pmod{17} (m = 1, 2, \dots, 7), 3^8 \equiv -1 \pmod{17}$.

所以 $f^{[m]}(i+1) - f^{[m]}(i) \equiv 3^m \not\equiv \pm 1 \pmod{17} (i = 1, 2, \dots, 17)$

$$f^{[8]}(i+1) - f^{[8]}(i) \equiv 3^8 \equiv -1 \pmod{17} (i = 1, 2, \dots, 17)$$

即 f 满足条件并且 $M = 8$, 所以 $M_{\max} = 8$.

6. 设非负数列 a_1, a_2, \dots 满足条件 $a_{m+n} \leq a_m + a_n, m, n \in \mathbb{N}$

求证: 对任意 $n \geq m$ 均有 $a_n \leq ma_1 + (\frac{n}{m} - 1)a_m$.

证明: 若 $n = m$, 结论显然成立.

否则设 $n = km + r (1 \leq r \leq m, k \in \mathbb{N}^*)$, 则 $a_n \leq ka_m + a_r$.

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{n} - \frac{a_m}{m} &\leq \frac{ka_m + a_r}{n} - \frac{a_m}{m} = \frac{(mk - n)a_m + ma_r}{mn} \\ &= \frac{ma_r - ra_m}{mn} = \frac{r}{n} \left(\frac{a_r}{r} - \frac{a_m}{m} \right)\end{aligned}$$

而 $a_r \leq ra_1, r \leq m$.

$$\therefore \frac{a_n}{n} - \frac{a_m}{m} \leq \frac{m}{n} \left(a_1 - \frac{a_m}{m} \right)$$

化简后即得到 $a_n \leq ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m$.

第十三届中国数学奥林匹克(1998年)

广州 广州师范学院

1. 在一个非钝角 $\triangle ABC$ 中, $AB > AC$, $\angle B = 45^\circ$, O 和 I 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和内心, 且 $\sqrt{2}OI = AB - AC$, 求 $\sin A$.

解: 由Euler公式 $OI = \sqrt{R^2 - 2Rr}$.

$$\therefore 2(R^2 - 2Rr) = (b - c)^2.$$

$$\text{又 } r = \frac{1}{2}(a + c - b) \tan \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(a + c - b).$$

$$\text{并且 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$\text{所以 } 1 - 2(\sqrt{2} - 1)(\sin A + \sin C - \sin B) = 2(\sin B - \sin C)^2.$$

$$\therefore \angle B = 45^\circ, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin C = \sin(135^\circ - A) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin A + \cos A).$$

$$\therefore 2 \sin A \cos A - (2 - \sqrt{2}) \sin A - \sqrt{2} \cos A + \sqrt{2} - 1 = 0.$$

$$\text{即 } (\sqrt{2} \sin A - 1)(\sqrt{2} \cos A - \sqrt{2} + 1) = 0.$$

$$\text{所以 } \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或者 } \cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 即 } \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}.$$

综上所述, $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或者 $\sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

2. 给定大于1的正整数 n , 是否存在 $2n$ 个两两不同的正整数, 同时满足以下两个条件:

$$(1) a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n;$$

$$(2) n - 1 - \frac{1}{1998} < \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} < n - 1.$$

请说明理由.

解: 存在.

令 $a_i = M + i$, $b_i = i$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$), $a_n = k$, $b_n = k + (n - 1)M$, 其中 k, M 待定.

$$\begin{aligned} \therefore S &= \sum_{i=1}^n \frac{a_i - b_i}{a_i + b_i} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{M}{M + 2i} - \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} \\ &= n - 1 - \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M + 2i} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} \right) \end{aligned}$$

显然 $S < n - 1$, 而且 $S > n - 1 - \frac{1}{1998}$ 等价于

$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M + 2i} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} < \frac{1}{1998}$$

令 $M = 3996n(n - 1)$, $k = 1998(n - 1)M$. 则

$$T < \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{M} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} = \frac{n(n-1)}{M} + \frac{(n-1)M}{(n-1)M + 2k} = \frac{1}{3996} + \frac{1}{3997} < \frac{1}{1998}$$

所以当 $a_i = 3996n(n-1) + i, b_i = i (i = 1, 2, \dots, n-1)$,

$a_n = 2 \times 1998^2 n(n-1)^2 + 3996n(n-1)^2, b_n = 2 \times 1998^2 n(n-1)^2$ 时, 满足题设条件, 证毕.

3. 设 $S = \{1, 2, \dots, 98\}$, 求最小自然数 n , 使得 S 的任一 n 元子集中都可以选出10个数, 无论怎样将这10个数均分成两组, 总有一组中存在一个数与另外4个数都互质, 而另一组中存在一个数与另外4个数都不互质.

解: $n = 50$.

设 $A = \{x | x \text{ 为偶数}, x \in S\}$, 则 $|A| = 49$. 并且 A 中任一两数均不互质, 所以 A 的任一10元子集均不满足要求, 无论怎样分组都不存在一个数与其余4个数都互质.

$\therefore n \geq 50$, 下面证明 S 的任一50元子集 T 中都存在这样10个数, 其中一个与其他九个数均互质, 而其他九个数有一个公因子, 显然这十个数满足题意. 用反证法, 假设不存在这样的十个数.

$B_1 = \{1, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}, |B_1| = 11$, 为1和大于49的质数组成的集合.

(1) 如果 $B_1 \cap T \neq \emptyset$, 设 $a \in B_1, a \in T$, 显然 a 与 T 中其他数均互质, 所以 T 中不存在九个数有公因子, 至多有8个偶数, 8个3的倍数.

因为 $C = \{x | x \text{ 为奇数}, 3|x, x \in S\}, |C| = 16$,

所以 $|T| \leq 8 + 8 + (98 - 49 - 16) = 49$, 矛盾.

$B_2 = \{13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}, |B_2| = 10$, 为大于12小于49的质数组成的集合.

(2) $T \cap B_1 = \emptyset, T \cap B_2 \neq \emptyset$, 则 T 中至多有38个奇数, 至少有12个偶数, $|T \cap A| \geq 12$.

设 B_2 中的 $b \in T$, 类似(1), $T \cap A$ 中至多有8个与 b 互质;

因为 $[\frac{49}{b}] \leq 3$, 所以 $T \cap A$ 中不与 b 互质的至多有3个, $|T \cap A| \leq 11$, 矛盾.

$B_3 = \{5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19, 7 \times 7, 7 \times 11, 7 \times 13\}, |B_3| = 7$.

(3) $T \cap B_1 = T \cap B_2 = \emptyset, T \cap B_3 \neq \emptyset$, 则 T 中至多有28个奇数, $|T \cap A| \geq 22$.

设 B_3 中 $c \in T$, 类似(1), $T \cap A$ 中至多有8个与 c 互质;

因为 $[\frac{49}{c}] + [\frac{49}{11}] - [\frac{49}{5 \times 11}] = 13, [\frac{49}{7}] = 7$,

所以 $T \cap A$ 中不与 c 互质的至多有13个, $|T \cap A| \leq 21$, 矛盾.

$B_4 = \{5 \times 7, 5 \times 5, 3 \times 31, 3 \times 29, 3 \times 23, 3 \times 19, 3 \times 17, 3 \times 13, 3 \times 11\}, |B_4| = 9$.

(4) $T \cap B_1 = T \cap B_2 = T \cap B_3 = \emptyset, T \cap B_4 \neq \emptyset$, 则 T 中至多有21个奇数, $|T \cap A| \geq 29$.

设 B_4 中 $d \in T$, 类似(1), $T \cap A$ 中至多有8个与 d 互质;

因为 $[\frac{49}{d}] + [\frac{49}{7}] - [\frac{49}{5 \times 7}] = 15, [\frac{49}{3}] + [\frac{49}{11}] - [\frac{49}{3 \times 11}] = 19$,

所以 $T \cap A$ 中不与 d 互质的至多有19个, $|T \cap A| \leq 27$, 矛盾.

$B_5 = S - A - B_1 - B_2 - B_3 - B_4, |B_5| = 12, B_5$ 中的数最多有2个不同质因子, $(3 \times 5 \times 7 = 105 > 98)$.

(5) $T \cap B_1 = T \cap B_2 = T \cap B_3 = T \cap B_4 = \emptyset, T \cap B_5 \neq \emptyset$, 则 T 中至多有12个奇数, $|T \cap A| \geq 38$.

设 B_5 中 $s \in T$, 类似(1), $T \cap A$ 中至多有8个与 s 互质;

因为 $[\frac{49}{s}] + [\frac{49}{5}] - [\frac{49}{3 \times 5}] = 22$, 所以 $T \cap A$ 中不与 s 互质的至多有22个, $|T \cap A| \leq 30$, 矛盾.

(6) $T \cap B_i = \emptyset (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, T 中没有奇数, 所以 $|T| \leq |A| = 49$, 矛盾.

综上所述, S 的任一50元子集 T 中都存在这样10个数. 所以 $n = 50$.

4. 求所有大于3的自然数 n , 使得 $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3}$ 整除 2^{2000} .

解: $1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} = \frac{1}{6}(n^3 + 5n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6) = 2^k (k \leq 2000)$.

$\therefore (n+1)(n^2 - n + 6) = 3 \times 2^{k+1}; \therefore n > 3, n+1 > 4, n^2 - n + 6 > 12$.

(1) $n+1 = 2^m, n^2 - n + 6 = (2^m - 1)^2 - (2^m - 1) + 6 = 2^{2m} - 3 \times 2^m + 8 = 3 \times 2^t$.

$\therefore m \geq 3$, 如果 $m = 3, n^2 - n + 6 = 48, n = 7$, 满足条件.

否则 $m > 3, n^2 - n + 6 = 2^{2m} - 3 \times 2^m + 8 \equiv 8 \pmod{16}$,

$\therefore 3 \times 2^t \equiv 8 \pmod{16}, t = 3, n^2 - n = 18, n$ 不是整数.

(2) $n+1 = 3 \times 2^m, n^2 - n + 6 = (3 \times 2^m - 1)^2 - (3 \times 2^m) + 6 = 9 \times 2^{2m} - 9 \times 2^m + 8 = 2^t$.

$\therefore m \geq 1$, 如果 $m \geq 4, n^2 - n + 6 \equiv 8 \pmod{16}$,

$\therefore 2^t \equiv 8 \pmod{16}, t = 3. \therefore n^2 - n + 6 = 8, n^2 - n = 2, n = 2, m = 0$, 矛盾.

否则 $1 \leq m \leq 3$,

$m = 1, n = 5, n^2 - n + 6 = 26$, 不可能.

$m = 2, n = 11, n^2 - n + 6 = 116$, 不可能.

$m = 3, n = 23, n^2 - n + 6 = 512 = 2^9, t = 9$.

综上所述, $n = 7, 23$. 经检验均符合条件.

5. 设 D 为锐角三角形 ABC 内部一点, 且满足条件:

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA.$$

试确定 D 点的几何位置, 并证明你的结论.

解: 建立复平面, 设 A, B, C 所对应的复数分别为 z_1, z_2, z_3 , D 对应的复数为 z .

考虑多项式 $f(z) \equiv 1$, 由Lagrange插值公式:

$$f(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} f(z_3) + \frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)} f(z_2) + \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} f(z_1) = 1$$

所以对于任意的 $z \in \mathbb{C}$,

$$\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} + \frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)} + \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = 1$$

$$\left| \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z_3-z_1)(z_3-z_2)} \right| + \left| \frac{(z-z_1)(z-z_3)}{(z_2-z_1)(z_2-z_3)} \right| + \left| \frac{(z-z_2)(z-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} \right| \geq 1$$

即对于平面上任意一点 D ,

$$\frac{DA \cdot DB}{CA \cdot CB} + \frac{DA \cdot DC}{BA \cdot BC} + \frac{DB \cdot DC}{AB \cdot AC} \geq 1$$

$$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$$

等号成立当且仅当 $-\omega_1\omega_2, -\omega_2\omega_3, -\omega_3\omega_1 \in \mathbb{R}^+$,

其中 $\omega_1 = \frac{z-z_1}{z_2-z_3}, \omega_2 = \frac{z-z_2}{z_3-z_1}, \omega_3 = \frac{z-z_3}{z_1-z_2}$.

所以 $-\omega_j^2 \in \mathbb{R}^+, \omega_j = k_j i, k_j \in \mathbb{R}^+ (j = 1, 2, 3)$.

$\therefore \frac{z-z_1}{z_2-z_3} = \omega_1 = k_1 i$, 所以 $DA \perp BC$, 类似的有 $DB \perp AC, DC \perp AB$. 即 D 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

6. 设 $n \geq 2, x_1, x_2, \dots, x_n$ 为实数, 且

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} = 1.$$

对于每一个固定的自然数 $k (1 \leq k \leq n)$, 求 $|x_k|$ 的最大值.

解: 由于 x_i 与 x_{n+1-i} 在式中的对称性, 可以设

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1} \\ = & (\sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_2}x_2)^2 + (\sqrt{a_2}x_2 + \sqrt{1-a_3}x_3)^2 + \cdots + (\sqrt{a_{k-1}}x_{k-1} + \sqrt{1-a_k}x_k)^2 \\ & + (\sqrt{1-a_{n+1-k}}x_k + \sqrt{a_{n-k}}x_{k+1})^2 + \cdots + (\sqrt{1-a_2}x_{n-1} + \sqrt{a_1}x_n)^2 \\ & + [1 - (1-a_k) - (1-a_{n+1-k})]x_k^2 = 1 \end{aligned}$$

其中数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 1, 2\sqrt{a_i}\sqrt{1-a_{i+1}} = 1$.

即 $a_{i+1} = 1 - \frac{1}{4a_i}$,

由数学归纳法不难证明: $a_i = \frac{i+1}{2i}, 1-a_i = \frac{i-1}{2i} (i = 1, 2, \dots)$. 并且有 $0 \leq a_i \leq 1$.

$\therefore [1 - (1-a_k) - (1-a_{n+1-k})]x_k^2 \leq 1 (k = 1, 2, \dots, n)$.

即 $|x_k| \leq \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$, 等号成立当且仅当

$$\sqrt{a_1}x_1 + \sqrt{1-a_2}x_2 = \sqrt{a_2}x_2 + \sqrt{1-a_3}x_3 = \cdots = \sqrt{a_{k-1}}x_{k-1} + \sqrt{1-a_k}x_k = 0,$$

并且 $\sqrt{1-a_{n+1-k}}x_k + \sqrt{a_{n-k}}x_{k+1} = \cdots = \sqrt{1-a_2}x_{n-1} + \sqrt{a_1}x_n = 0$.

由 $x_k = \sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$, 可以求得 x_1, x_2, \dots, x_n 的值, 所以等号可以取到.

所以 $|x_k|$ 的最大值为 $\sqrt{\frac{2k(n+1-k)}{n+1}}$.

第十四届中国数学奥林匹克(1999年)
北京 北京大学

1. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\angle C > \angle B$, 点 D 是边 BC 上的一点, 使得 $\angle ADB$ 是钝角, H 是 $\triangle ABD$ 的垂心, 点 F 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆上.

求证: 点 F 是 $\triangle ABC$ 垂心的充分必要条件是: HD 平行于 CF 且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明: 不难证明如下的结论: 点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充分必要条件为 $CF \perp AB$ 并且 $\angle AFB = 180^\circ - \angle C$.

$\because H$ 是 $\triangle ABD$ 的垂心, $\therefore HD \perp AB, \angle AHB = 180^\circ - \angle ADB$.

又因为 A, B, D, F 四点共圆, 所以 $\angle ADB = \angle AFB$.

所以点 F 是 $\triangle ABC$ 垂心的充分必要条件是: HD 平行于 CF 且 $\angle AHB = \angle C$.

而 $\angle AHB = \angle C \Leftrightarrow H$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上(因为 $\angle ADB$ 为钝角, H 不可能在劣弧 \widehat{AB} 上, 必然与 C 在 AB 同侧). 所以原命题成立, 证毕.

2. 给定实数 a , 设实系数多项式序列 $\{f_n(x)\}$ 满足:

$$f_0(x) = 1, f_{n+1}(x) = xf_n(x) + f_n(ax),$$

其中 $n = 0, 1, \dots$

(1) 求证: $f_n(x) = x^n f_n(\frac{1}{x})$, 其中 $n = 0, 1, \dots$

(2) 求 $f_n(x)$ 的明显表达式.

解: 当 $a = 1$ 时, $f_{n+1}(x) = (x+1)f_n(x)$, 由数学归纳法有 $f_n(x) = (x+1)^n$. 则

$$f_n(x) = (x+1)^n = x^n (\frac{1}{x} + 1)^n = x^n f_n(\frac{1}{x}).$$

当 $a \neq 1$ 时, 定义 $T_n = (a^n - 1)(a^{n-1} - 1) \cdots (a - 1)$, ($n \in \mathbb{N}^*$), $T_0 = 1$.

$$S_n^k = \frac{T_n}{T_k T_{n-k}} \quad (k \leq n). \text{ 我们用归纳法证明: } f_n(x) = S_n^n x^n + S_n^{n-1} x^{n-1} + \cdots + S_n^0.$$

对于 $n = 0$, 显然是成立的, 假设对于 $n = k$ 成立,

对于 $n = k+1$, 由归纳假设, $f_{k+1}(x)$ 的 m 次项系数为 $S_k^{m-1} + a^m S_k^m$, 只需证明

$$S_k^{m-1} + a^m S_k^m = S_{k+1}^m$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_k}{T_{m-1} T_{k+1-m}} + a^m \frac{T_k}{T_m T_{k-m}} = \frac{T_{k+1}}{T_m T_{k+1-m}}$$

$$\Leftrightarrow (a^m - 1) + a^m (a^{k+1-m} - 1) = a^{k+1} - 1, \text{ 这显然是成立的.}$$

$$\text{所以 } f_{k+1}(x) = S_{k+1}^{k+1} x^{k+1} + S_{k+1}^k x^k + \cdots + S_{k+1}^0.$$

所以 $f_n(x) = S_n^n x^n + S_n^{n-1} x^{n-1} + \cdots + S_n^0$ 对于任意的 $n \in \mathbb{N}$ 均成立.

由于 $S_n^k = S_n^{n-k}$, 所以

$$\begin{aligned} x^n f_n(\frac{1}{x}) &= x^n (S_n^n \frac{1}{x^n} + S_n^{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + \cdots + S_n^0) \\ &= S_n^n + S_n^{n-1} x + \cdots + S_n^0 x^n = S_n^n x^n + \cdots + S_n^0 = f_n(x) \end{aligned}$$

综上所述结论(1)成立, 并且

$$f_n(x) = \begin{cases} (x+1)^n & a = 1 \\ S_n^n x^n + S_n^{n-1} x^{n-1} + \cdots + S_n^0 & a \neq 1 \text{ (其中 } S_n^k \text{ 定义如前)} \end{cases}$$

3. MO太空城由99个空间站组成,任何两空间站之间都有一条管形通道相连. 规定其中99条通道为双向通行的主干道.其余通道严格单向通行, 如果某四个空间站可以通过它们之间的通道从其中任一站到达另外任一站, 则称这四个站的集合为一个互通四站组.试为MO太空城设计一个方案, 使得互通四站组的数目最大(请具体算出该最大数,并证明你的结论).

解:如果从某个空间站到另三个空间站的通道均是由该站单向发出, 那么这四个空间站不是互通四站组,将所有这样的四站组记为A类非互通四站组. 其余非互通四站组记为B类.

将空间站编号为 $1, 2, \dots, 99$, 设从第 i 各空间站出发的单向通道有 k_i 条,

则 $|A| = \sum_{i=1}^{99} \binom{k_i}{3}$, 并且 $\sum_{i=1}^{99} k_i = \binom{99}{2} - 99 = 99 \times 48$.

\therefore 当 $k > l$ 时, $k \geq l + 1$, 而 $\binom{k}{3} - \binom{k-1}{3} = \binom{k-1}{2}$.

$\therefore \binom{k-1}{2} \geq \binom{l}{2} \Leftrightarrow \binom{k}{3} - \binom{k-1}{3} \geq \binom{l+1}{3} - \binom{l}{3} \Leftrightarrow \binom{k}{3} + \binom{l}{3} \geq \binom{k-1}{3} + \binom{l+1}{3}$.

所以经有限次调整知 $|A| \geq 99 \times \binom{48}{3}$, 而 $|B| \geq 0$.

所以互通四站组最多有 $\binom{99}{4} - 99 \binom{48}{3} = 2052072$ 个.

构造一种方案使得互通四站组的个数达到最大值, 将所有空间站编号为 $1, 2, \dots, 99$, 并且按照该顺序排列在一个圆上.

$(1, 2), (2, 3), \dots, (98, 99), (99, 1)$ 为双向主干道.

其余的通道 (i, j) , 若从 i 到 j 顺时针经过偶数个空间站, 则 (i, j) 为由 i 到 j 的单向通道.

因为 i 到 j 顺时针经过偶数个空间站等价于从 j 到 i 顺时针经过奇数个空间站, 所以可以这样安排.

非互通四站组若不含双向主干道, 要么有一站到另三个空间站的通道均是由该站单向发出, 即为A类非互通四站组; 要么有一站到另三个空间站的通道均是向该站发出, 设 $B \rightarrow A, C \rightarrow A, D \rightarrow A$, 且顺时针方向依次为 A, B, C, D . 不难知道 $B \rightarrow C, B \rightarrow D$, 所以 B 到另三个空间站的通道均是由该站单向发出, 为A类非互通四站组.

若四站组含有双向主干道, 则易知其他任意空间站到这两站均为一进一出, 必为互通四站组.

所以没有B类非互通四站组, 且从每个空间站均发出48条单向通道. 即此时互通四站组的个数达到最大值2052072.

4. 设 m 是给定的整数. 求证: 存在整数 a, b 和 k , 其中 a, b 均不能被2整除, $k \geq 0$, 使得

$$2m = a^{19} + b^{99} + k \times 2^{1999}.$$

解: 若 $x \not\equiv y \pmod{2^{1999}}$, x, y 为奇数, 则由 $x^{19} - y^{19} = (x - y)(x^{18} + x^{17}y + \dots + y^{18})$.

因为后一个括号中为奇数, 所以与 2^{1999} 互质, 所以 $x^{19} \not\equiv y^{19} \pmod{2^{1999}}$.

所以当 a 取遍 2^{1999} 的既约剩余系时, a^{19} 也取遍 2^{1999} 的既约剩余系.

令 $b = 1$, 存在 $a, a^{19} \equiv 2m - 1 \pmod{2^{1999}}$, 并且有无穷多个这样的 a . 当 a 足够小时, 不难知道 k 为正整数, 证毕.

5. 求最大的实数 λ , 使得当实系数多项式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 的所有根都是非负实数时, 只要 $x \geq 0$, 就有 $f(x) \geq \lambda(x - a)^3$. 并问上式中等号何时成立?

解: $\lambda = -\frac{1}{27}$. 设 $f(x)$ 的三个根为 α, β, γ , $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$.

不妨设 $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$, 则 $-a = \alpha + \beta + \gamma, x - a = x + \alpha + \beta + \gamma \geq 0$.

(1) $0 \leq x \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma$;

$$f(x) = -(\alpha - x)(\beta - x)(\gamma - x) \geq -\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma - 3x}{3}\right)^3 \geq -\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + x}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}(x - a)^3.$$

(2) $0 \leq \alpha \leq \beta < x \leq \gamma$;

$$f(x) = -(x - \alpha)(x - \beta)(\gamma - x) \geq -\left(\frac{-\alpha - \beta + x + \gamma}{3}\right)^3 \geq -\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma + x}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}(x - a)^3.$$

(3) $\alpha < x \leq \beta$ 或者 $x > \gamma$;

$$f(x) \geq 0 \geq -\frac{1}{27}(x - a)^3.$$

综上所述 $f(x) \geq -\frac{1}{27}(x - a)^3$. 并且 $x = 0, \alpha = \beta = \gamma$ 或者 $\alpha = \beta = 0, \gamma = 2x$ 时等号成立.

$6.4 \times 4 \times 4$ 的大正方体由 64 个单位正方体组成. 选取其中的 16 个单位正方体涂成红色, 使得大正方体中每个由 4 个单位正方体组成的 $1 \times 1 \times 4$ 的小长方体中, 都恰有 1 个红色单位正方体. 问 16 个红色单位正方体共有多少种不同取法? 说明理由.

解: 在底面 16 个正方形中每个写上 1, 2, 3, 4 之一, 表示该竖直 $1 \times 1 \times 4$ 小长方体中从下往上第几个为红色. 形成一个 4×4 的数表, 其中每行每列均为 1, 2, 3, 4 的一个排列, 称为 4 阶拉丁方, 并将第一行第一列按顺序均为 1, 2, 3, 4 的拉丁方称为 4 阶标准拉丁方, 显然 16 个红色单位正方体不同取法数目为 4 阶拉丁方的数目.

显然将 4 阶拉丁方任两行(列)调换仍为 4 阶拉丁方, 对于任意一个 4 阶拉丁方, 先通过调换列使之第一行为 1, 2, 3, 4; 再通过调换 2, 3, 4 行使第一列为 1, 2, 3, 4, 形成唯一一个 4 阶标准拉丁方. 而每个 4 阶标准拉丁方, 对应 $4! \times 3!$ 个 4 阶拉丁方, (第一行有 $4!$ 中排列, 第一列后三个格有 $3!$ 中排列). 只需求 4 阶标准拉丁方的个数.

考虑第二行第二列那个各种所填的数, 显然不为 2.

(1) 填 1, 第二行第二列已经确定, 剩下 4 个方格填入 2 个 1, 2 个 2, 显然有两种填法.

(2) 填 3, 第二行第二列已经确定, 易知剩下 4 个方格也已经确定. 填 4 类似.

所以共有 4 个 4 阶标准拉丁方. 所以 4 阶拉丁方有 $4 \times 4! \times 3! = 576$ 个.

所以 16 个红色单位正方体不同取法数目为 576.

第十五届中国数学奥林匹克(2000年)
合肥 中国科技大学

1. 设 a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三条边, $a \leq b \leq c$, R 和 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径. 令 $f = a + b - 2R - 2r$, 试用角 C 的大小来判定 f 的正负.

解: 用 A, B, C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角. 由公式

$$a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

$$\begin{aligned} f &= a + b - 2R - 2r \\ &= 2R(\sin A + \sin B - 1 - 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}) \\ &= 2R(2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 1 - 2 \sin \frac{C}{2} (\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2})) \\ &= 2R(2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 1 - 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin^2 \frac{C}{2}) \\ &= 2R(2 \cos \frac{A-B}{2} (\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2}) - (\cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2})) \\ &= 2R(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2})(2 \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2}) \end{aligned}$$

$\because a \leq b \leq c, \therefore \angle A \leq \angle B \leq C$.

$$\therefore 0 \leq \frac{B-A}{2} < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}, 0 \leq \frac{B-A}{2} < \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \cos \frac{A-B}{2} > \cos \frac{C}{2}, \frac{A-B}{2} > \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}.$$

$$\therefore 2 \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} > 0.$$

$$\therefore f > 0 \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} > 0 \Leftrightarrow \angle C < \frac{\pi}{2};$$

$$f = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} = 0 \Leftrightarrow \angle C = \frac{\pi}{2};$$

$$f < 0 \Leftrightarrow \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} < 0 \Leftrightarrow \angle C > \frac{\pi}{2}.$$

2. 数列 $\{a_n\}$ 定义如下:

$$a_1 = 0, a_2 = 1, a_n = \frac{1}{2} n a_{n-1} + \frac{1}{2} n(n-1) a_{n-2} + (-1)^n (1 - \frac{n}{2}) (n \geq 3).$$

试求

$$f_n = a_n + 2 \binom{n}{1} a_{n-1} + 3 \binom{n}{2} a_{n-2} + \cdots + (n-1) \binom{n}{n-2} a_2 + n \binom{n}{n-1} a_1$$

的最简表达式.

解: 令 $b_n = \frac{a_n}{(-1)^n n!}$, 则 $b_1 = 0, b_2 = \frac{1}{2}, b_n = -\frac{1}{2} b_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-2} + \frac{2-n}{2n!} (n \geq 3)$.

设 $c_n = b_n + b_{n-1}, 2c_{n-1} = c_{n-2} + \frac{2-n}{n!} (n \geq 3)$.

$$\therefore 2c_{n+1} = c_n - \frac{n}{(n+2)!} (n \geq 1).$$

$$2(c_{n+1} - \frac{1}{(n+2)!}) = c_n - \frac{n}{(n+2)!} - \frac{2}{(n+2)!} = c_n - \frac{1}{(n+1)!}.$$

并且 $c_1 = b_1 + b_2 = \frac{1}{2}, \therefore c_1 - \frac{1}{2!} = 0$.

$$\therefore c_n - \frac{1}{(n+1)!} = 0, c_n = \frac{1}{(n+1)!},$$

即 $b_n + b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$.

令

$$g_n = \frac{f_n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (n-k+1) \binom{n}{n-k} a_k = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n-k+1}{(n-k)!} b_k$$

$$\begin{aligned} \therefore g_{n+1} - g_n &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{n-k+2}{(n+1-k)!} b_k - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n-k+1}{(n-k)!} b_k \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \frac{n-k+2}{(n+1-k)!} b_k - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{n-k+2}{(n+1-k)!} b_{k-1} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \frac{n-k+2}{(n+1-k)!} (b_k + b_{k-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \frac{n-k+2}{(n+1-k)!} \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^k}{(n+1-k)! k!} + \sum_{k=2}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)! k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} + \frac{1}{n!} \sum_{k=2}^n (-1)^k \binom{n}{k} \end{aligned}$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = (1-1)^{n+1} = 0, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$$

$$\therefore g_{n+1} - g_n = \frac{0+n+1-1}{(n+1)!} + \frac{0+n-1}{n!} = \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$\therefore g_3 = 2b_2 + b_3 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore f_n = n!g_n = n! \left(\sum_{k=4}^n \frac{1}{(k-2)!} - \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} + g_3 \right) = n! \left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!} \right) = 2n! - n - 1 (n \geq 3)$$

不难验证对于 $n=1, 2$ 也成立, 所以 $f_n = 2n! - n - 1$.

3. 某乒乓俱乐部组织交流活动, 安排符合以下规则的双打赛程表, 规则为:

- (1) 每个参赛者至多属于两个对子;
- (2) 任意两个不同对子之间至多进行一次双打;
- (3) 凡表中同属一对的两人就不在任何双打中作为对手相遇.

统计各人参加的双打次数, 约定将所有不同的次数组成的集合称为“赛次集”.

给定由不同的正数组成的集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, 其中每个数都能被6整除. 试问至少必须有多少人参加活动, 才可以安排符合上述规则的赛程表, 使得相应的赛次集恰为 A , 请证明你的结论.

解: 设 $a_1 < a_2 < \dots < a_k$, 必存在某个参赛者参加了 a_k 场比赛.

若该参赛者只属于一个对子, 则有 a_k 个对子与该对进行比赛, 至少有 $a_k + 2$ 人;

若该参赛者属于两个对子, 至少有 $\frac{1}{2}a_k$ 对与这两对进行比赛, 至少有 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人.

所以至少有 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人参加比赛.

下面用归纳法构造 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人参赛的赛程表.

$k = 1$, 将 $\frac{a_1}{2} + 3$ 人分成 3 人小组, 每组三人两两结成对子, 每人恰参加两个对子.
 让每个对子都与其他小组的对子进行比赛, 显然每个人都进行了 a_1 场比赛, 满足条件.

$k = 2$, 将 $\frac{a_2}{2} + 3$ 人分成两大组 $S, T, |S| = \frac{a_1}{2}, |T| = \frac{a_2 - a_1}{2} + 3$.

同样将每大组分为 3 人小组, 每组三人两两结成对子, 每人恰参加两个对子.

S 大组中任一对都与其他小组的对子进行比赛, 每个人都比赛了 a_2 场;

T 大组中任一对都只与 S 大组中的所有对子比赛, 每个人都比赛了 a_1 场. 满足条件.

设 $k - 1, k$ 时命题成立, 存在这样的赛次集. 当 $k + 1$ 时 ($k > 1$),

将 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人分成三大组 $S, T, U, |S| = \frac{a_1}{2}, |T| = \frac{a_k - a_1}{2} + 3, |U| = \frac{a_{k+1} - a_k}{2}$.

同样将每大组分 3 人小组, 每组三人两两结成对子, 每人恰参加两个对子.

S 大组中任一对都与其他小组的对子进行比赛, 每个人都比赛了 a_{k+1} 场;

U 大组中任一对都只与 S 大组中的所有对子比赛, 每个人都比赛了 a_1 场.

由归纳假设, 可在 T 大组中安排赛程, 使得赛次集为 $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \dots, a_k - a_1\}$.

又因为 T 大组中任一对都只与 S 大组中的所有对子比赛, 每个人又都比赛了 a_1 场.

所以 T 大组中的人比赛场次所组成的集合为 $\{a_2, a_3, \dots, a_k\}$,

所以所有选手的赛次集为 A , 满足条件.

由归纳法存在 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人参赛的赛程表, 使得赛次集为 A .

综上所述, 最少有 $\frac{a_k}{2} + 3$ 人参加.

4. 设 $n \geq 2$. 对 n 元有序实数组

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n),$$

令

$$b_k = \max_{1 \leq i \leq k} a_i, (k = 1, 2, \dots, n).$$

称 $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ 为 A 的“创新数组”;

称 B 中的不同元素个数为 A 的“创新阶数”.

考察 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列 (将每种排列都视为一个有序数组), 对其中创新阶数为 2 的所有排列, 求它们的第一项的算术平均值.

解: 设第一项为 k 的创新阶数为 2 的排列有 x_k 个, 显然 $x_n = 0$.

而 $k = 1, 2, \dots, n - 1$ 时, 排列中所有大于 k 小于 n 的数必排在 n 之后.

其他的数的位置可以任意取.

即所有大于 k 的 $n - k$ 个数中 n 排在最前, 恰占全部排列的 $\frac{1}{n - k}$.

$$\therefore x_k = \frac{(n-1)!}{n-k}.$$

所以所求平均值为

$$\frac{\sum_{k=1}^{n-1} kx_k}{\sum_{k=1}^{n-1} x_k} = \frac{(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}}{(n-1)! \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k}} = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n}{k} - 1\right)}{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}} = n - \frac{n-1}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}}$$

5.若对正整数 n ,存在 k ,使得

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1,$$

其中 n_1, n_2, \dots, n_k 都是大于3的整数,则称 n 具有性质 P . 求具有性质 P 的所有数 n .

解:显然 n 为奇数,并且存在 $m \in \mathbb{N}^*$, $n = 2^m - 1$.

当 $m = 1, 2, \dots, 9$ 时,不难验证只有 $m = 3, n = 7$ 满足要求.

当 $m \geq 10$ 时,由归纳法不难证明: $2^m - 1 > m^3$.

$$2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1 > \prod_{i=1}^k \left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3$$

而由 $n_i > 3, n_i \geq 5$,所以

$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3 \geq 4 \left(\frac{n_i - 1}{2}\right) > n_i$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)\cdots(n_k-1)} - 1 > n_1 n_2 \cdots n_k$$

所以具有性质 P 的 n 只有7.

6.某次考试有5道选择题,每题都有4个不同答案供选择,每人每题恰选1个答案,在2000份答卷中发现存在一个 n ,使得任何 n 份答卷中都存在4份,其中每两份的答案都至多3道题相同.求 n 的最小可能值.

解:将每个题的答案记为1,2,3,4.每份答案记为 (a, b, c, d, e) ,其中 $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4\}$.

将 $(1, b, c, d, e)(2, b, c, d, e)(3, b, c, d, e)(4, b, c, d, e)$ 记作一组.共 $4^4 = 256$ 组,由抽屉原则,至少有一组有 $\lceil \frac{2000}{256} \rceil + 1 = 8$ 份答卷;去掉该组后仍然还有一组有8份答卷,再去掉这组后仍然还有一组有8份答卷.这24份答卷中任4份至少有两个在同一组,它们有4题答案相同.所以 $n \geq 25$.

$n = 25$ 时,构造如下2000份答卷满足题意,每份答卷都使得 $a + b + c + d + e \equiv 0 \pmod{4}$,所以前面每一组中至多有一份答卷,共256种不同的答卷,任两份不同的答卷都至多有3题答案相同.任取其中250种,每种恰有8份答卷,任取25份答卷,必有4份不同的答卷,它们之间任两份至多有3题答案相同.所以 $n = 25$.

第十六届中国数学奥林匹克(2001年)
香港 数学奥林匹克委员会

1. 给定 $a, \sqrt{2} < a < 2$. 内接于单位圆 Γ 的凸四边形 $ABCD$ 适合以下条件:

- (1) 圆心在这凸四边形内部;
(2) 最大边长是 a , 最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$.

过点 A, B, C, D 依次作圆 Γ 的四条切线 L_A, L_B, L_C, L_D . 已知 L_A 与 L_B, L_B 与 L_C, L_C 与 L_D, L_D 与 L_A 分别相交于 A', B', C', D' 四点. 求面积之比 $\frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}}$ 的最大值与最小值.

解: 设圆 Γ 的圆心为 O , 并记 $\angle AOB = 2\theta_1, \angle BOC = 2\theta_2, \angle COD = 2\theta_3, \angle DOA = 2\theta_4$. 于是 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 都是锐角, 且 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = \pi$. 不难求得

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sin 2\theta_i, S_{A'B'C'D'} = \sum_{i=1}^4 \tan \theta_i$$

由于上式关于 $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ 对称, 不妨设 $AB = a, AD = \sqrt{4-a^2}, \theta_1 \geq \theta_2 \geq \theta_3 \geq \theta_4$.

则 $\sin \theta_1 = \frac{a}{2}, \sin \theta_4 = \frac{1}{2}\sqrt{4-a^2}$, 易知 $\theta_1 + \theta_4 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 + \theta_3 = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \tan \theta_1 + \tan \theta_4 = \frac{\sin(\theta_1 + \theta_4)}{\cos \theta_1 \cos \theta_4} = \frac{1}{\cos \theta_1 \sin \theta_1} = \frac{2}{\sin 2\theta_1}$$

$$\tan \theta_2 + \tan \theta_3 = \frac{2}{\sin 2\theta_2}$$

$$T = \frac{S_{A'B'C'D'}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2}{\sin 2\theta_1} + \frac{2}{\sin 2\theta_2}}{\sin 2\theta_1 + \sin 2\theta_2}$$

而 $\sin 2\theta_1 = \frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}, \frac{\pi}{4} \leq \theta_2 \leq \theta_1$,

$\therefore \frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2} \leq \sin 2\theta_2 \leq 1$.

由于 T 是关于 $\sin 2\theta_2$ 的严格减函数,

$$T_{\max} = \frac{2}{(\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2})^2} = \frac{8}{a^2(4-a^2)}, T_{\min} = \frac{\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}} + 2}{\frac{1}{2}a\sqrt{4-a^2} + 1} = \frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}$$

2. 设 $X = \{1, 2, 3, \dots, 2001\}$, 求最小的正整数 m , 满足要求: 对 X 的任何一个 m 元子集 W , 都存在 u, v (u 和 v 允许相同), 使得 $u + v$ 是 2 的方幂.

解: 令 $Y = \{2001, 2000, \dots, 1025\} \cup \{46, 45, \dots, 33\} \cup \{17\} \cup \{14, 13, \dots, 9\}$, 则 $|Y| = 998$, 并且可以证明对于任何 $u, v \in Y, u + v$ 都不是 2 的方幂.

事实上, 当 $u, v \in Y$ 时, 不妨设 $u \geq v$ 并且有 $2^r < u \leq 2^r + a < 2^{r+1}$, 其中当 r 分别取值 10, 5, 4, 3 时, 相应的 a 值依次为 977, 14, 1, 6.

(1) 若 $2^r < v \leq u$, 则 $2^{r+1} < u + v < 2^{r+2}$;

(2) 若 $1 \leq v < 2^r$, 则当 $2^r < u \leq 2^r + a, 1 \leq a < 2^r$ 时, $1 \leq v < 2^r - a$. 于是 $2^r < u + v < 2^{r+1}$.

这表明 $u + v$ 不是 2 的方幂. 证毕.

故知所求的最小正整数 $m \geq 999$.

将 X 划分成下列999个互不相交的子集:

$$A_i = \{1024 - i, 1024 + i\}, i = 1, 2, \dots, 977;$$

$$B_j = \{32 - j, 32 + j\}, j = 1, 2, \dots, 14;$$

$$C = \{15, 17\};$$

$$D_k = \{8 - k, 8 + k\}, k = 1, 2, 3, 4, 5, 6;$$

$$E = \{1, 8, 16, 32, 1024\}.$$

对于 X 的任何一个999元子集 W ,若 $W \cap E \neq \emptyset$,则从中任取一个元素的2倍都是2的方幂;若 $W \cap E = \emptyset$,则 W 中的999各元素分属于前面的998个2元子集,由抽屉原理知 W 中必有不同的 u 和 v 属于其中同一个子集,显然 $u + v$ 是2的方幂.

综上所述,所求的最小正整数 $m = 999$.

3.在正 n 边形的每个顶点上各停有一只喜鹊.突然受到惊吓,众喜鹊都飞去.一段时间后,它们又都回到这些顶点上,仍是每个顶点上一只,但未必都回到原来的顶点.求所有正整数 n ,使得一定存在3只喜鹊,以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形,或同为直角三角形,或同为钝角三角形.

解:对于 $n = 3$,结论显然成立.

若 $n \geq 4$, n 为偶数,设 A, B 原来的位置为直径的两端点,若回来后仍为直径的两端点,则任取另一只 C ,可知前后 $\triangle ABC$ 均为直角三角形;否则设回来后 A 的对径点为 C ,则前后 $\triangle ABC$ 均为直角三角形,结论成立.

若 $n \geq 7$, n 为奇数,不妨设 A 回到原顶点,否则可通过旋转使得 A 回到原顶点.作以 A 为一个端点的直径,在直径两侧各有 $\frac{n-1}{2} \geq 3$ 个点.考虑原来在同一侧的三个点,由抽屉原则,回来后必有两个仍在同一侧,不妨设为 B, C ,则 $\triangle ABC$ 前后均为钝角三角形,结论成立.

$n = 5$ 时,设原先按顺时针排列为 A, B, C, D, E ,返回后按顺时针排列为 A, C, E, B, D ,则此时不难验证所有的钝角三角形变为锐角三角形,所有的锐角三角形变为钝角三角形,结论不成立.

综上所述,所求的 n 为所有不小于3且不等于5的整数.

4.设 $a, b, c, a+b-c, a+c-b, b+c-a, a+b+c$ 是7个两两不同的质数,且 a, b, c 中有两数之和是800.设 d 是这7个质数中最大数与最小数之差.求 d 的最大可能值.

解:不妨设 $a < b < c$,显然 $a+b-c$ 最小, $a+b+c$ 最大,所以 $d = 2c$.只需求 c 的最大值.

$$\because a+b-c > 0, c < a+b, c < a+c, c < b+c, \therefore c < 800.$$

小于800的质数从大到小依次为797,787,...

$$\text{若 } c = 797, a+b = 800, a+b-c = 3, a+b+c = 1597,$$

$$\text{令 } a = 13, b = 787, a+c-b = 23, b+c-a = 1571. \text{ 不难验证均为质数,所以 } d_{\max} = 2 \times 797 = 1594.$$

5.将周长为24的圆周等分成24段.从24个分点中选取8个点,使得其中任何两点间所夹的弧长都不等于3和8.问满足要求的8点组的不同取法共有多少种?说明理由.

解:将这些点按顺时针方向依次标为1,2,...,24,并排成如下3×8的表格:

1	4	7	10	13	16	19	22
9	12	15	18	21	24	3	6
17	20	23	2	5	8	11	14

在表中,同一列相邻两数所代表的点之间所夹弧长为8,同一行相邻两数所代表的点之间所夹弧长为3,(第一列与第八列也是相邻的,第一行与第三行也是相邻的).所以在表中每相邻两数所代表的点均不能同时取.即每一列只能取一个数,并且恰好取一个数.

记从3×n数表中每列恰取一个数且任何相邻两列(包括第n列与第一列)所取得数均不同行的取法为 x_n 种.

从第一列取一个数有3种取法,第一列取定后,第2列所取得数不能与第一列同行,只有两种不同取法,以后每一列均有两种取法,共 3×2^n 种取法,但是第一列与最后一列所取的数同行的所有取法都不满足要求,这时将这两列看作一列,即为 $n-1$ 列时的所有取法,所以 $x_n + x_{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.

$$\begin{aligned} \therefore x_8 &= 3 \times 2^7 - x_7 = 3 \times 2^7 - (3 \times 2^6 - x_6) \\ &= 3 \times (2^7 - 2^6) + x_6 = \cdots \\ &= 3 \times (2^7 - 2^6 + 2^5 - 2^4 + 2^3 - 2^2 + 2) = 258 \end{aligned}$$

既满足题中要求的不同取法总数为258.

6. 记 $a = 2001$. 设A是适合下列条件的正整数对 (m, n) 所组成的集合:

- (1) $m < 2a$;
- (2) $2n \mid (2am - m^2 + n^2)$;
- (3) $n^2 - m^2 + 2mn \leq 2a(n - m)$.

令

$$f = \frac{2am - m^2 - mn}{n},$$

求 $\min_{(m,n) \in A} f$ 和 $\max_{(m,n) \in A} f$.

解:(1)先求 f 的最小值,令

$$p = \frac{2am - m^2 + n^2}{2n} \tag{*}$$

由条件(1)和(2)可知, p 为正整数且有 $(2a - m)m = (2p - n)n$ (**)

$\therefore 2a - m > 0$,所以 $2p - n > 0$.由条件(3)可得

$$2am - m^2 + n^2 = 2am - 2mn + 2mn - m^2 + n^2 \leq 2am - 2mn + 2a(n - m) = 2n(a - m)$$

从而由(*), $p \leq a - m$.所以 $2p - n < 2p \leq 2(a - m) < 2a - m$.

由(**)知, m, n 同奇偶,且 $n > m$.

设 $(m, n) \in A$,令 $n' = 2p - n = \frac{2am - m^2}{n}$,显然 n' 也是正整数而且容易验证 $(m, n) \in A \Leftrightarrow (m, n') \in A$.事实上,不难验证下面两式成立

$$p' = \frac{2am - m^2 + n'^2}{2n'} = \frac{2am - m^2 + n^2}{2n} = p$$

$$n'^2 - m^2 + 2mn' - 2a(n' - m) = \frac{2am - m^2}{n^2} [n^2 - m^2 + 2mn - 2a(n - m)]$$

由 $2a > m$, 便知关于 (m, n') 的条件(2)(3)成立的充要条件是关于 (m, n) 的条件(2)(3)成立. 即 $(m, n) \in A \Leftrightarrow (m, n') \in A$.

这样一来, 易知 $(m, n) \in A$ 时, $f(m, n) = n' - m, f(m, n') = n - m$.

$\therefore f(m, n) = n' - m \geq 2$.

取 $m = 2$, 条件化为 $2n|4a - 4 + n^2$. 即 $\frac{4000}{n} + \frac{n}{2}$ 为正整数, $n^2 - 3998n + 8000 \leq 0$. 又 n 为正整数, $3 \leq n \leq 3995$, 又 n 为 4000 的偶因子, 取 $n = 2000, f(2, 2000) = 2$.

综上所述 $\min_{(m,n) \in A} f = 2$.

(2) 再求 f 的最大值. 因为 $(m, n) \in A$ 时, m, n 奇偶性相同且 $n > m$, 令 $n = m + 2u, u$ 为正整数, 于是有

$$\begin{aligned} f(m, n) &= \frac{2am - m^2 - mn}{n} \\ &= \frac{2(a - u)m - 2m^2}{m + 2u} \\ &= \frac{2(a - u)(m + 2u) - 2(a - u)2u}{m + 2u} - \frac{2(m + 2u)^2 + 8(m + 2u)u - 8u^2}{m + 2u} \\ &= (2a + 6u) - 2 \left[m + 2u + \frac{2u(a + u)}{m + 2u} \right] \end{aligned}$$

由(3), 知 $(m + 2u)^2 - m^2 + 2m(m + 2u) \leq 4ua$,

即 $m^2 + 4um - 2au + 2u^2 \leq 0, m \leq -2u + \sqrt{2u(a + u)}, m + 2u \leq \sqrt{2u(a + u)}$. 所以当 u 固定时, $f(m, m + 2u)$ 关于 m 严格递增.

$\therefore f(m, m + 2u)$ 为偶数, 所以 $m + 2u$ 必为 $2u(a + u)$ 的因子,

$u = 1$ 时, $2(a + 1) = 4004 = 4 \times 7 \times 11 \times 13$. 而若要 $m + 2u + \frac{2u(a + u)}{m + 2u}$ 尽量大, $m + 2u$ 应尽量接近 $\sqrt{2u(a + u)} = \sqrt{4004}$,

$m + 2|4004, n = m + 2 = 52, m = 50, (m, n) \in A, f(50, 52) = 4002 + 6 - 2(52 + \frac{4004}{52}) = 3750$.

所以有 $f(m, m + 2) \leq 3750$.

以下证明: 对于任意的 $(m, n) \in A$, 都有 $f(m, n) \leq 3750$.

上面已证 $n = m + 2$ 时, 结论成立, 由于 m, n 奇偶性相同且 $n > m$, 故可以设 $n \geq m + 4$, 于是

$$f(m, n) = \frac{(2a - m)m}{n} - m \leq \frac{(2a - m)m}{m + 4} - m$$

只需证明: 对于任意的 $1 \leq m < 2a = 4002$, 都有

$$\frac{(2a - m)m}{m + 4} - m \leq 3750$$

整理后得 $m^2 - 124m + 2 \times 3750 \geq 0$.

由于 $\Delta = 124^2 - 8 \times 3750 = 4(62^2 - 7500) < 0$, 所以结论是成立的.

综上所述, $\max_{(m,n) \in A} f = 3750$.

第十七届中国数学奥林匹克(2002年)

上海 上海中学

1. 三角形 ABC 的三边长分别为 $a, b, c, b < c$, AD 是角 A 的内角平分线, 点 D 在边 BC 上.

(1) 求在线段 AB, AC 内分别存在点 E, F (不是顶点)满足 $BE = CF$ 和 $\angle BDE = \angle CDF$ 的充分必要条件(用角 A, B, C 表示);

(2) 在点 E 和 F 存在的情况下, 用 a, b, c 表示 BE 的长.

解:(1) 因为 AD 平分 $\angle BAC$, 所以 D 到 AB, AC 距离相等, 又由于 $BE = CF$, 所以 $S_{\triangle DBE} = S_{\triangle DFC}$.

$\therefore \angle BDE = \angle CDF, \therefore BD \cdot DE = CD \cdot DF$.

又 $BE = CF, BD^2 + DE^2 - 2BD \cdot DE \cos \angle BDE = CD^2 + DF^2 - 2CD \cdot DF \cos \angle CDF$.

$\therefore BD^2 + DE^2 = CD^2 + DF^2$. 所以 $BD = CD, DE = DF$ 或者 $BD = DF, CD = DE$.

因为 $b < c$, 所以 $BD > DC$, 所以 $BD = DF, CD = DE$.

可以得到 $\triangle BDE \cong \triangle FDC, \angle B = \angle DFC, \angle C = \angle BED$, 并且 $\angle BDE = \angle CDF = \angle A$.

而 $\angle C > \angle B = \angle DFC > \angle DAC = \frac{1}{2}\angle A, \therefore 2\angle B > \angle A$.

反之, 如果 $2\angle B > \angle A$, 作 $\angle CDF = \angle BDE = \angle A$, 则 F, E 分别在 AC, AB 上,

$\triangle FDC \sim \triangle BAC \sim \triangle BDE$.

又 D 到 FC, BE 距离相等, 所以 $\triangle BDE \cong \triangle FDC, BE = CF$.

所以充要条件为 $2\angle B > \angle A$.

(2) 因为 $\triangle BAC \sim \triangle BDE$, 所以 $\frac{BD}{BA} = \frac{BE}{BC}, BE = \frac{BC \cdot BD}{BA}$.

再由角平分线定理, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \therefore BD = \frac{ac}{b+c}$, 所以 $BE = \frac{a^2}{b+c}$.

2. 设多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 满足: $P_1(x) = x^2 - 1, P_2(x) = 2x(x^2 - 1)$, 且

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) = (P_n(x))^2 - (x^2 - 1)^2, n = 2, 3, \dots$$

设 s_n 为 $P_n(x)$ 各项系数的绝对值之和.

对于任意正整数 n , 求非负整数 k_n , 使得 $2^{-k_n}s_n$ 为奇数.

解: 设 $P_i(x) = Q_i(x)(x^2 - 1)$, 则 $Q_1(x) = 1, Q_2(x) = 2x, Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) = (Q_n(x))^2 - 1$.

设 t_n 为 $Q_n(x)$ 各项系数的绝对值之和,

因为 $Q_{n+1}Q_{n-1} = Q_n^2 - 1, Q_{n+2}Q_n = Q_{n+1}^2 - 1$, 所以 $Q_{n+1}Q_{n-1} + Q_{n+1}^2 = Q_{n+2}Q_n + Q_n^2$.

所以 $\frac{Q_{n+2} + Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{Q_{n+1} + Q_{n-1}}{Q_n}, \therefore$ 对于 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{Q_{n+2} + Q_n}{Q_{n+1}} = \frac{Q_3 + Q_1}{Q_2} = 2x$.

$\therefore Q_{n+2}(x) = 2xQ_{n+1}(x) - Q_n(x)$.

由归纳法不难证明如下结论:

(1) $Q_n(x)$ 为首项系数为正的 $n - 1$ 次整系数多项式;

(2) $Q_{2k}(x)$ 只有奇数项, $Q_{2k+1}(x)$ 只有偶数项, ($k \in \mathbb{N}$);

(3) $Q_n(x)$ 所有系数不为0的项的系数从大到小为正负交替.

所以 $t_{n+2} = 2t_{n+1} + 2t_n, s_n = 2t_n$. 补充定义 $t_0 = s_0 = 0$.

由 $t_1 = 1, t_2 = 2$ 知对于 $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n], s_n = \frac{1}{\sqrt{2}}[(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n]$$

设 $r_n = (1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n$, 则 $r_n + \sqrt{2}s_n = 2(1 + \sqrt{2})^n$, 并且 r_n, s_n 均为正整数.

所以 $r_n = 2 \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m} 2^m = 2(1 + \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2m})$, 显然 $\frac{1}{2}r_n$ 为奇数.

对于 $\forall m, n \in \mathbb{N}, r_{n+m} + \sqrt{2}s_{n+m} = 2(1 + \sqrt{2})^{n+m} = \frac{1}{2}(r_n + \sqrt{2}s_n)(r_m + \sqrt{2}s_m)$.

$$\therefore r_{n+m} = s_m s_n + \frac{1}{2} r_m r_n, s_{m+n} = \frac{1}{2} (r_n s_m + r_m s_n).$$

$\therefore s_{2m} = r_m s_m, k_{2m} = k_m + 1$, 又因为 $k_1 = 1$, 所以 $k_{2^m} = m + 1$.

当 $k_m \neq k_n$ 时, $s_{m+n} = (\frac{1}{2} r_n) s_m + (\frac{1}{2} r_m) s_n, k_{m+n} = \min\{k_m, k_n\}$.

设 $n = 2^{m_0} + 2^{m_1} + \dots + 2^{m_i}, 0 \geq m_0 < m_1 < \dots < m_i$ 为正整数.

则 $k_n = m_0 + 1$, 即 $2^{m_0} \parallel n$ 时, $k_n = m_0 + 1$.

3.18支足球队进行单循环赛, 即每轮将18支球队分成9组, 每组的两队赛一场, 下一轮重新分组进行比赛, 共赛17轮, 使得每队都与另外17支队各赛一场. 按任意可行的程序比赛了 n 轮之后, 总存在4支球队, 它们之间总共只赛了1场. 求 n 的最大可能值.

解: 考察如下的比赛程序:

1. (1,2)(3,4)(5,6)(7,8)(9,18)(10,11)(12,13)(14,15)(16,17)
2. (1,3)(2,4)(5,7)(6,9)(8,17)(10,12)(11,13)(14,16)(15,18)
3. (1,4)(2,5)(3,6)(8,9)(7,16)(10,13)(11,14)(12,15)(17,18)
4. (1,5)(2,7)(3,8)(4,9)(6,15)(10,14)(11,16)(12,17)(13,18)
5. (1,6)(2,8)(3,9)(4,7)(5,14)(10,15)(11,17)(12,18)(13,16)
6. (1,7)(2,9)(3,5)(6,8)(4,13)(10,16)(11,18)(12,14)(15,17)
7. (1,8)(2,6)(4,5)(7,9)(3,12)(10,17)(11,15)(13,14)(16,18)
8. (1,9)(3,7)(4,6)(5,8)(2,11)(10,18)(12,16)(13,15)(14,17)
9. (2,3)(4,8)(5,9)(6,7)(1,10)(11,12)(13,17)(14,18)(15,16)
10. (1,11)(2,12)(3,13)(4,14)(5,15)(6,16)(7,17)(8,18)(9,10)
11. (1,12)(2,13)(3,14)(4,15)(5,16)(6,17)(7,18)(8,10)(9,11)
12. (1,13)(2,14)(3,15)(4,16)(5,17)(6,18)(7,10)(8,11)(9,12)
13. (1,14)(2,15)(3,16)(4,17)(5,18)(6,10)(7,11)(8,12)(9,13)
14. (1,15)(2,16)(3,17)(4,18)(5,10)(6,11)(7,12)(8,13)(9,14)
15. (1,16)(2,17)(3,18)(4,10)(5,11)(6,12)(7,13)(8,14)(9,15)
16. (1,17)(2,18)(3,10)(4,11)(5,12)(6,13)(7,14)(8,15)(9,16)
17. (1,18)(2,10)(3,11)(4,12)(5,13)(6,14)(7,15)(8,16)(9,17)

将前9支球队称为A组, 后9支球队称为B组, 显然9轮之后, 同组两支球队均已经比赛过, 所以任意四支球队之间至少已经赛过两场比赛, 当然不满足题中要求.

如果把上述程序颠倒过来,然后按照新的程序比赛,则8轮比赛过后,同组任何两队均未比赛过. 而不全同组的四支球队之间至少赛过两场,也不满足题中要求.

综上所述, n 的最大可能值不大于7.

设已进行了7轮比赛且任何4队都不满足题中要求.

选取已经比赛过的两队 A_1, A_2 ,于是每支球队都与另外6支球队比赛过,两个队至多与另外12支球队比赛过. 从而至少有4支球队 B_1, B_2, B_3, B_4 与 A_1, A_2 均未比赛过,由反证假设可知, B_1, B_2, B_3, B_4 之间的比赛都已经进行了.

所以最多有10支球队与 B_1, B_2 其中至少一队比赛过,又导致至少存在 C_1, C_2, \dots, C_6 与 B_1, B_2 均未比赛. 由反证假设可知, C_1, C_2, \dots, C_6 之间的比赛都已经进行了.

类似的,最多有8支球队与 C_1, C_2 其中至少一队比赛过,又导致至少存在 D_1, D_2, \dots, D_8 与 C_1, C_2 均未比赛. 由反证假设可知, D_1, D_2, \dots, D_8 之间的比赛都已经进行了. 所以 D_1, D_2 与其他10支球队均未比赛,但是由于只进行了7轮比赛,其中必存在两支球队 E_1, E_2 之间没有比赛, D_1, D_2, E_1, E_2 之间只进行了一场比赛,与假设矛盾.

综上所述, n 的最大可能值为7.

4. 对于平面上任意四个不同点 P_1, P_2, P_3, P_4 ,求

$$\frac{\sum_{1 \leq i < j \leq 4} P_i P_j}{\min_{1 \leq i < j \leq 4} P_i P_j} \text{ 的最小值.}$$

解:先证明如下的引理:

引理:在 $\triangle ABC$ 中,若 $AB \geq m, AC \geq m, \angle BAC = \alpha$,则 $BC \geq 2m \sin \frac{\alpha}{2}$.

引理的证明:作 $\angle A$ 的角平分线 AD ,由正弦定理,有

$$BC = BD + DC = AB \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle ADB} + AC \frac{\sin \angle CAD}{\sin \angle ADC} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \angle ADB} (AB + AC) \geq 2m \sin \frac{\alpha}{2}$$

所以引理成立.

回到原题,记 $m = \min_{1 \leq i < j \leq 4} P_i P_j, k = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} P_i P_j$. 我们证明: $k \geq (5 + \sqrt{3})m$.

(1) 若 P_1, P_2, P_3, P_4 中有3点共线,不妨设为 P_1, P_2, P_3 ,则 $P_1 P_2 + P_2 P_3 + P_3 P_4 \geq 4m$,

从而 $k \geq 7m > (5 + \sqrt{3})m$.

(2) 若四个点的凸包为三角形,不妨设 P_4 在 $\triangle P_1 P_2 P_3$ 内部,且 $\angle P_1 P_4 P_2 \geq 120^\circ$,

由引理 $P_1 P_2 \geq 2m \sin \frac{1}{2} \angle P_1 P_4 P_2 \geq 2m \sin 60^\circ = \sqrt{3}m$. 所以 $k \geq (5 + \sqrt{3})m$.

(3) 凸包为四边形 $P_1 P_2 P_3 P_4$. 若该四边形有一个内角不小于 120° ,不妨设为 $\angle P_2 P_1 P_4$,

由引理类似(2), $P_2 P_4 \geq \sqrt{3}m$. 所以 $k \geq (5 + \sqrt{3})m$.

否则四个内角均小于 120° ,必有两个相邻内角之和不小于 180° ,

不妨设 $\alpha + \beta = \angle P_4 P_1 P_2 + \angle P_1 P_2 P_3 \geq 180^\circ$,且 $\alpha \geq \beta$.

由于 $\alpha < 120^\circ$,所以 $\beta > 60^\circ$,所以 $\frac{\alpha + \beta}{4} \geq 45^\circ, 0 \leq \frac{\alpha - \beta}{4} < 15^\circ$.

由引理,有 $P_2 P_4 \geq 2m \sin \frac{\alpha}{2}, P_1 P_3 \geq 2m \sin \frac{\beta}{2}$,

$$\begin{aligned} \text{则} \quad P_1P_3 + P_2P_4 &\geq 2m\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right) = 4m\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4} \\ &\geq 4m\sin 45^\circ\cos 15^\circ = 2m(\sin 60^\circ + \sin 30^\circ) = (\sqrt{3}+1)m \end{aligned}$$

所以 $k \geq (5 + \sqrt{3})m$.

又 $P_1P_2P_3P_4$ 为有一个内角为 60° 的菱形时, $k = (5 + \sqrt{3})m$.

所以所求式子的最小值为 $5 + \sqrt{3}$.

5. 平面上横纵坐标都为有理数的点称为有理点. 证明平面上的全体有理点可以分为三个两两不相交的集合, 满足条件:

(1) 在以每个有理点为圆心的任一圆内一定包含这三个集合中每个集合的点.

(2) 在任意一条直线上不可能有三个点分别属于这三个集合.

证明: 显然任意有理点均可唯一的表示成 $(\frac{u}{w}, \frac{v}{w})$ 的形式, 其中 u, v, w 都是整数, $w > 0$ 并且 $\gcd(u, v, w) = 1$.

令 $A = \{(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}) | 2 \nmid u\}$, $B = \{(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}) | 2|u, 2 \nmid v\}$, $C = \{(\frac{u}{w}, \frac{v}{w}) | 2|u, 2|v\}$.

下面证明 A, B, C 满足题中的条件.

(1) 先证明 A, B, C 满足条件(1);

设 D 是以有理点 $(\frac{u_0}{w_0}, \frac{v_0}{w_0})$ 为中心, r 为半径的圆, 取正整数 k , 使得 $2^k > \max\{w_0, \frac{1}{r}(|u_0| + |v_0| + 1)\}$.

不难验证如下三个有理点

$$\left(\frac{u_0 2^k + 1}{w_0 2^k}, \frac{v_0 2^k}{w_0 2^k}\right) \in A, \left(\frac{u_0 2^k}{w_0 2^k}, \frac{v_0 2^k + 1}{w_0 2^k}\right) \in B, \left(\frac{u_0 2^k}{w_0 2^k + 1}, \frac{v_0 2^k}{w_0 2^k + 1}\right) \in C$$

都在 $\odot D$ 内部. 这表明条件(1)成立.

(2) 再证明 A, B, C 满足条件(2).

设平面上直线方程为 $ax + by + c = 0$, 如果其上有两个不同的有理点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 则 $ax_i + by_i + c = 0 (i = 1, 2)$, 如果 $c = 0$, 当然可以取 a, b 均为有理数; 否则不妨设 $c = 1$, 从联立方程中即可解出 a, b , 显然均是有理数. 再通分即可使 a, b, c 都是整数, 且 $\gcd(a, b, c) = 1$.

设有有理点 $(\frac{u}{w}, \frac{v}{w})$ 在直线 $ax + by + c = 0$ 上, 则 $L: au + bv + cw = 0$.

(a) $2 \nmid c$, 若 $2|u, 2|v$, 必有 $2|cw, 2|w$, 与 $\gcd(u, v, w) = 1$ 矛盾. 所以 L 上不能有 C 中的点.

(b) $2|c, 2 \nmid b$, 若 $2 \nmid v$, 则 $2 \nmid au$, 从而 $2 \nmid u$, 因此 L 上不能有 B 中的点.

(c) $2|c, 2|b$, 则 $2|au$, 由 $\gcd(a, b, c) = 1, 2 \nmid a, 2|u$, L 上不能有 A 中的点.

综上所述, A, B, C 满足条件(2).

所以 A, B, C 满足题中的条件.

6. 给定实数 $c, \frac{1}{2} < c < 1$, 求最小的常数 M , 使得对任意整数 $n \geq 2$, 及实数 $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, 只要满足

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n ka_k = c \sum_{k=1}^n a_k,$$

总有

$$\sum_{k=1}^n a_k \leq M \sum_{k=1}^m a_k,$$

其中 m 为不超过 cn 的最大整数.

解: 设 $r = cn, s_k = \sum_{i=1}^k a_i, s_0 = 0$.

$$\therefore \sum_{k=1}^n ka_k = ns_n - (s_1 + s_2 + \cdots + s_{n-1}) = rs_n$$

$$\therefore (n+1-r)s_n = \sum_{i=1}^n s_i$$

(*)

先证明这两个事实:

(1) 对于 $\forall j, k, 1 \leq j < k \leq n$, 总有 $js_k \leq ks_j$.

这是由于 $js_k \leq ks_j \Leftrightarrow j(a_k + \cdots + a_{j+1}) \geq (k-j)(a_j + \cdots + a_1)$.

而 $j(a_k + \cdots + a_{j+1}) \geq j(k-j)a_{j+1} \geq j(k-j)a_j \geq (k-j)(a_j + \cdots + a_1)$.

所以 $js_k \leq ks_j, \therefore \sum_{i=1}^{m-1} s_i \leq \sum_{i=1}^{m-1} \frac{i}{m} s_m = \frac{m-1}{2} s_m$.

(2) 对于 $k = 0, 1, \dots, n-m, s_{m+k} \leq \frac{1}{n-m}[(n-m-k)s_m + ks_n]$.

这是由于 $s_{m+k} - s_m \leq ka_{m+k}, (n-m-k)a_{m+k} \leq s_n - s_{m+k}$.

$\therefore (n-m-k)(s_{m+k} - s_m) \leq k(n-m-k)a_{m+k} \leq k(s_n - s_{m+k})$.

化简后即得 $s_{m+k} \leq \frac{1}{n-m}[(n-m-k)s_m + ks_n]$.

$$\therefore \sum_{k=m}^n s_k = \sum_{k=0}^{n-m} s_{m+k} \leq \frac{1}{n-m} [s_m \sum_{k=0}^{n-m} (n-m-k) + s_n \sum_{k=0}^{n-m} k] = \frac{n+1-m}{2} (s_m + s_n).$$

代入(*), $(n+1-r)s_n \leq \frac{m-1}{2} s_m + \frac{n+1-m}{2} (s_m + s_n) = \frac{n}{2} s_m + \frac{n+1-m}{s} \frac{s_n}{n}$.

$$\therefore s_n \leq \frac{n}{n+1+m-2r} s_m,$$

而 $r < m+1$, 所以 $s_n < \frac{n}{n-r} s_m = \frac{1}{1-c} s_m, \therefore M \leq \frac{1}{1-c}$.

令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1, a_{m+1} = a_{m+2} = \cdots = a_n = t \geq 1$.

可知 $\sum_{k=1}^n ka_k = \frac{m(m+1)}{2} + \frac{(m+1+n)(n-m)}{2} t = cn(m + (n-m)t) = cn \sum_{k=1}^n a_k$.

解得 $t = \frac{2cnm - m(m+1)}{(n+m+1)(n-m) - 2cn(n-m)}$.

所以 $t \geq 1 \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{2c-1}$. 满足以上的条件: $\therefore cn - 1 < m \leq cn$.

$$\begin{aligned} \therefore M &\geq \frac{s_n}{s_m} = \frac{m + (n-m)t}{m} = 1 + \frac{2cn - m - 1}{n + m + 1 - 2cn} \\ &= \frac{n}{n + m + 1 - 2cn} = \frac{1}{1 - 2c + \frac{m+1}{n}} \geq \frac{1}{1 - c + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow +\infty, M \geq \frac{1}{1-c}$.

所以 $M = \frac{1}{1-c}$.

第十八届中国数学奥林匹克(2003年)

湖南 长沙市第一中学

1. 设点 I, H 分别为锐角三角形的内心和垂心, 点 B_1, C_1 分别为边 AC, AB 的中点. 已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2 (B_2 \neq B)$, 射线 C_1I 交 AC 的延长线于 C_2, B_2C_2 与 BC 相交于 K, A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心.

试证: A, I, A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2, \triangle CKC_2$ 的面积相等.

证明: 首先证明 A, I, A_1 三点共线 $\Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$.

设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 连 BO, CO , 则 $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC, \angle BA_1C = 2(180^\circ - \angle BHC) = 2\angle BAC$.

因此, $\angle BAC = 60^\circ \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BA_1C = 180^\circ \Leftrightarrow A_1$ 在 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 上.

$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合 (因为 A_1 在 BC 的中垂线上) $\Leftrightarrow A, I, A_1$ 三点共线.

其次, 再证 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$.

作 $IP \perp AB$ 于点 $P, IQ \perp AC$ 于点 Q , 则 $S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}IP \cdot AB_2 + \frac{1}{2}IQ \cdot AB_1$.

注意到 $S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot AB_2 \sin A$. 所以 $IP \cdot AB_2 + IQ \cdot AB_1 = AB_1 \cdot AB_2 \sin A$.

设 $IP = r (r$ 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径), 则 $IQ = r$. 令 $BC = a, AC = b, AB = c$, 则 $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

再由 $AB_1 = \frac{b}{2}, 2AB_1 \sin A = h_c = \frac{2S_{\triangle ABC}}{c}$, 有 $AB_2 \cdot \left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{c} - 2 \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c} \right) = b \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

则 $AB_2 = \frac{bc}{a+b-c}$, 类似的 $AC_2 = \frac{bc}{a+c-b}$.

因此 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2}$

$\Leftrightarrow bc = \frac{bc}{a+b-c} \cdot \frac{bc}{a+c-b} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow \angle BAC = 60^\circ$ (由余弦定理).

所以命题成立.

2. 求出同时满足如下条件的集合 S 的元素个数的最大值:

(1) S 中的每个元素都是不超过 100 的正整数;

(2) 对于 S 中任意两个不同的元素 a, b , 都存在 S 中的元素 c , 使得 a 与 c 的最大公约数等于 1, 并且 b 与 c 的最大公约数也等于 1;

(3) 对于 S 中任意两个不同的元素 a, b , 都存在 S 中异于 a, b 的元素 d , 使得 a 与 d 的最大公约数大于 1, 并且 b 与 d 的最大公约数也大于 1.

解: 最大个数为 72.

将不超过 100 的每个正整数 n 表示成 $n = 2^{\alpha_1} 3^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} 7^{\alpha_4} 11^{\alpha_5} q$.

其中 q 是不能被 2, 3, 5, 7, 11 整除的正整数, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 为非负整数.

我们选取满足条件 “ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 中恰有 1 个或 2 个非零” 的那些正整数组成集合 S , 即 S 中包括 50 个偶数 $2, 4, \dots, 100$, 但除去 $2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5, 2 \times 3 \times 7, 2^2 \times 3 \times 7, 2 \times 5 \times 7, 2 \times 3 \times 11$ 这 7 个数; 3 的奇数倍 $3 \times 1, 3 \times 3, \dots, 3 \times 33$ 共 17 个数; 最小素因子为 5 的数 $5 \times 1, 5 \times 5, 5 \times 7, 5 \times 11, 5 \times 13, 5 \times 17, 5 \times 19$ 共 7 个数; 最小素因子为 7 的数 $7 \times 1, 7 \times 7, 7 \times 11, 7 \times 13$ 共 4 个数; 以及素数 11.

从而, S 中总共有 $50 - 7 + 17 + 7 + 4 + 1 = 72$ 个数.

下面证明如此构造的 S 满足题述条件.

条件(1)显然满足.

对于条件(2),注意到在 $\text{lcm}(a, b)$ 的素因子中至多出现2,3,5,7,11中的4个数,记某个未出现的数为 p ,显然 $p \in S$,并且 $\gcd(p, a) \leq \gcd(p, \text{lcm}(a, b)) = 1, \gcd(p, b) \leq \gcd(p, \text{lcm}(a, b)) = 1$.于是,取 $c = p$ 即可.

对于条件(3),当 $\gcd(a, b) = 1$ 时,取 a 的最小素因子 p 和 b 的最小素因子 q 易见 $p \neq q$,并且 $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.于是, $pq \in S$,并且 $\gcd(pq, a) \geq p > 1, \gcd(pq, b) \geq q > 1$. a, b 互质保证了 pq 异于 a, b .从而,取 $d = pq$ 即可.

当 $\gcd(a, b) = e > 1$ 时,取 p 为 e 的最小素因子, q 为满足 $q \nmid [a, b]$ 的最小素数,易见 $p \neq q$,并且 $p, q \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$.

于是, $pq \in S$,并且 $\gcd(pq, a) \geq \gcd(p, a) = p > 1, \gcd(pq, b) \geq \gcd(p, b) = p > 1$. $q \nmid [a, b]$ 保证了 pq 异于 a, b .从而,取 $d = pq$ 即可.

下面证明任意满足题述条件的集合 S 的元素数目不会超过72.

显然, $1 \in S$ 对于任意的两个大于10的质数 p, q ,因为与 p, q 均不互质的数最小是 pq 已大于100, 故据条件(3)知,10与100之间的21个质数中最多有一个出现在 S 中.记除1和这21个质数外的其余78个不超过100的自然数构成集合 T .我们断言 T 中至少有7个数不在 S 中,从而 S 中最多有 $78 - 7 + 1 = 72$ 个元素.

(I)当有某个大于10的质数 p 属于 S 时, S 中所有各数最小素因子只可能是2,3,5,7和 p .运用条件(2)可得出以下结论:

(i)若 $7p \in S$,因为 $2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5$ 与 $7p$ 包括了所有的最小素因子,故由条件(2)知, $2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 3 \times 5, 2 \times 3^2 \times 5 \notin S$;若 $7p \notin S$,注意 $2 \times 7p > 100$,而 $p \in S$,故由条件(3)知 $7 \times 1, 7 \times 7, 7 \times 11, 7 \times 13 \notin S$.

(ii)若 $5p \in S$,则 $2 \times 3 \times 7, 2^2 \times 3 \times 7 \notin S$;若 $5p \notin S$,则 $5 \times 1, 5 \times 5 \notin S$.

(iii) $2 \times 5 \times 7, 3p$ 不同属于 S .

(iv) $2 \times 3p, 5 \times 7$ 不同属于 S .

(v)若 $5p, 7p \notin S$,则 $5 \times 7 \notin S$.

当 $p = 11$ 或 13 时,由(i)(ii)(iii)(iv)可分别得出至少有3,2,1,1个 T 中的数不属于 S ,合计7个;

当 $p = 17$ 或 19 时,由(i)(ii)(iii)可分别得出至少有4,2,1个 T 中的数不属于 S ,合计7个;

当 $p > 20$ 时,由(i)(ii)(v)可分别得出至少有4,2,1个 T 中的数不属于 S ,合计7个.

(II)如果没有大于10的质数属于 S ,则 S 中的最小素因子只可能是2,3,5,7.于是,下面7对数中的每对都不能同时在 S 中出现:

$(3, 2 \times 5 \times 7), (5, 2 \times 3 \times 7), (7, 2 \times 3 \times 5), (2 \times 3, 5 \times 7), (2 \times 5, 3 \times 7), (2 \times 7, 3 \times 5), (2^2 \times 7, 3^2 \times 5)$.

从而, T 中至少有7个数不在 S 中.

综上所述,本题的答案为72.

3. 给定正整数 n ,求最小的正数 λ ,使得对于任何 $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2}), (i = 1, 2, \dots, n)$ 只要

$$\tan \theta_1 \tan \theta_2 \cdots \tan \theta_n = 2^{\frac{n}{2}}$$

就有 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cdots + \cos \theta_n$ 不大于 λ .

解:当 $n = 1$ 时, $\cos \theta_1 = (1 + \tan^2 \theta_1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,有 $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $n = 2$ 时,可以证明 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$,并且当 $\theta_1 = \theta_2 = \arctan \sqrt{2}$ 时等号成立.事实上,

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \leq \frac{4}{3},$$

即

$$\frac{1}{1 + \tan^2 \theta_1} + \frac{1}{1 + \tan^2 \theta_2} + 2\sqrt{\frac{1}{(1 + \tan^2 \theta_1)(1 + \tan^2 \theta_2)}} \leq \frac{4}{3}$$

由 $\tan \theta_1 \tan \theta_2 = 2$, 并且设 $x = \tan^2 \theta_1 + \tan^2 \theta_2$, 则只需证明

$$\frac{2+x}{5+x} + 2\sqrt{\frac{1}{5+x}} \leq \frac{4}{3}$$

即

$$2\sqrt{\frac{1}{5+x}} \leq \frac{14+x}{3(5+x)} \Leftrightarrow 36(5+x) \leq 196 + 28x + x^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 16 = (x-4)^2 \geq 0$$

显然成立, 于是 $\lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

当 $n \geq 3$ 时, 不妨设 $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n$, 则 $\tan \theta_1 \tan \theta_2 \tan \theta_3 \geq 2\sqrt{2}$.

由于 $\cos \theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} < 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_i$, 则

$$\cos \theta_2 + \cos \theta_3 < 2 - \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_3) < 2 - \sin \theta_2 \sin \theta_3.$$

由 $\tan^2 \theta_1 \geq \frac{8}{\tan^2 \theta_2 \tan^2 \theta_3}$, 有

$$\frac{1}{\cos^2 \theta_1} \geq \frac{8 + \tan^2 \theta_2 \tan^2 \theta_3}{\tan^2 \theta_2 \tan^2 \theta_3}$$

即

$$\cos \theta_1 \leq \frac{\tan \theta_2 \tan \theta_3}{\sqrt{8 + \tan^2 \theta_2 \tan^2 \theta_3}} = \frac{\sin \theta_2 \sin \theta_3}{\sqrt{8 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3}}$$

于是

$$\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 < 2 - \sin \theta_2 \sin \theta_3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{8 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3}} \right)$$

注意到 $8 \cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3 + \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3 \geq 1$

$$\Leftrightarrow 8 + \tan^2 \theta_2 \tan^2 \theta_3 \geq \frac{1}{\cos^2 \theta_2 \cos^2 \theta_3} = (1 + \tan^2 \theta_2)(1 + \tan^2 \theta_3) \Leftrightarrow \tan^2 \theta_2 + \tan^2 \theta_3 \leq 7.$$

所以当 $\tan^2 \theta_2 + \tan^2 \theta_3 \leq 7$ 时, $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 < 2$.

若 $\tan^2 \theta_2 + \tan^2 \theta_3 > 7$ 时, 因此 $\tan^2 \theta_1 \geq \tan^2 \theta_2 > \frac{7}{2}$,

$$\text{所以 } \cos \theta_1 \leq \cos \theta_2 < \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{7}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

于是, $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3 < \frac{2\sqrt{2}}{3} + 1 < 2$,

所以 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n < n - 1$.

另一方面, 取 $\theta_2 = \theta_3 = \dots = \theta_n = \alpha > 0, \alpha \rightarrow 0$,

$$\text{则 } \theta_1 = \arctan \frac{2^{\frac{n}{2}}}{\tan^{n-1} \alpha}, \theta_1 \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

从而 $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \dots + \cos \theta_n \rightarrow n - 1$.

综上可得 $\lambda = n - 1$.

4. 求所有满足 $a \geq 2, m \geq 2$ 的三元正整数组 (a, m, n) , 使得 $a^n + 203$ 是 $a^m + 1$ 的倍数.

解: 对于分三种情况考虑.

(1) $n < m$ 时, 由 $a^n + 203 \geq a^m + 1$, 有 $202 \geq a^m - a^n \geq a^n(a - 1) \geq a(a - 1)$.

所以 $2 \leq a \leq 14$.

当 $a = 2$ 时, n 可取 $1, 2, \dots, 7$;当 $a = 3$ 时, n 可取 $1, 2, 3, 4$;当 $a = 4$ 时, n 可取 $1, 2, 3$;当 $a = 5, 6$ 时, n 可取 $1, 2$;
当 $a = 7, 8, \dots, 14$ 时, $n = 1$.

由 $a^m + 1 | a^n + 203$ 可知,解为 $(2, 2, 1), (2, 3, 2)$ 和 $(5, 2, 1)$.

(2) $n = m$ 时, $a^m + 1 | 202$.由于 202 仅有 $1, 2, 101, 202$ 四个约数,而 $a \geq 2, m \geq 2$,只有 $a^m = 100$,解为 $(10, 2, 2)$.

(3) $n > m$ 时,由 $a^m + 1 | 203(a^m + 1)$,有 $a^m + 1 | a^n + 203 - 203(a^m + 1)$,即 $a^m + 1 | a^m(a^{n-m} - 203)$.

又因为 $\gcd(a^m + 1, a^m) = 1$,所以 $a^m + 1 | a^{n-m} - 203$.

(i)若 $a^{n-m} < 203$,则令 $n - m = s \geq 1$,有 $a^m + 1 | 203 - a^s$.所以 $203 - a^s \geq a^m + 1$,

有 $202 \geq a^s + a^m \geq a^m + a = a(a^{m-1} + 1) \geq a(a + 1)$,所以 $2 \leq a \leq 13$.

类似(1)的讨论,可知 (a, m, s) 的解为: $(2, 2, 3), (2, 6, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 5), (2, 2, 7), (3, 2, 1), (4, 2, 2), (5, 2, 3), (8, 2, 1)$.

所以 (a, m, n) 为: $(2, 2, 5), (2, 6, 9), (2, 4, 8), (2, 3, 8), (2, 2, 9), (3, 2, 3), (4, 2, 4), (5, 2, 5), (8, 2, 3)$.

(ii) $a^{n-m} = 203$ 时,则 $a = 203, n - m = 1$,即解为 $(203, m, m + 1), m \geq 2$.

(iii) $a^{n-m} > 203$ 时,令 $n - m = s \geq 1$,则 $a^m + 1 | a^s - 203$.

又 $a^s - 203 \geq a^m + 1$,则 $s > m$,由 $a^m + 1 | a^s - 203 + 203(a^m + 1) = a^m(a^{s-m} + 203) = a^m(a^{n-2m} + 203)$,

又因为 $\gcd(a^m + 1, a^m) = 1$,所以 $a^m + 1 | a^{n-2m} + 203$.

又因为 $s > m \Leftrightarrow n - m > m \Leftrightarrow n > 2m \Leftrightarrow n - 2m > 0$.此时的解只能由前面的解派生出来,即由 $(a, m, n) \rightarrow (a, m, n+2m) \rightarrow \dots \rightarrow (a, m, n+2km)$,并且每一个派生出来的解都满足 $a^m + 1 | a^n + 203$.

综上所述,所有解 (a, m, n) 为:

$(2, 2, 4k + 1), (2, 3, 6k + 2), (2, 4, 8k + 8), (2, 6, 12k + 9), (3, 2, 4k + 3),$

$(4, 2, 4k + 4), (5, 2, 4k + 1), (8, 2, 4k + 3), (10, 2, 4k + 2), (203, m, (2k + 1)m + 1),$

其中 k 为任意非负整数,且 $m \geq 2$ 为整数.

5.某公司需要录用一名秘书,共有10人报名,公司经理决定按照求职报名的顺序逐个面试,前三个人面试后一定不录用.自第4个人开始将他与前面面试过的人比较,如果他的能力超过了前面所有已面试过的人,就录用他;否则就不录用,继续面试下一个.如果前9个人都不录用,那么就录用最后一个面试的人.

假定这10个人的能力各不相同,可以按能力由强到弱排为第1,第2, ..., 第10.显然该公司到底录用到哪一个人,与这10个人报名的顺序有关.大家知道,这样的排列共有 $10!$ 种.我们以 A_k 表示能力第 k 的人能够被录用的不同报名顺序的数目,以表示他被录用的可能性.

证明:在该公司经理的方针下,有

(1) $A_1 > A_2 > \dots > A_8 = A_9 = A_{10}$;

(2)该公司有超过70%的可能性录用到能力最强的3个人之一,而只有不超过10%的可能性录用到能力最弱的3个人之一.

证明:将前3个面试者中能力最强的排名名次记为 a .显然 $a \leq 8$.将此时能力排名第 k 的人被选上的排列集合记作 $A_k(a)$,相应的排列数目记作 $|A_k(a)|$.在以下过程中,“:=”表示“记为”.

(1)显然, $a = 1$ 时,必然录取最后一个面试的人,此时除能力第1的人之外,各人机会均等,不难知道

$|A_k(1)| = 3 \times 8! := r_1, k = 2, 3, \dots, 10$.

当 $2 \leq a \leq 8$ 时,对于 $a \leq k \leq 10$,能力排名的 k 的人无录用机会.对于 $1 \leq k < a$,此时机会均等.

事实上,此时能力排名第 a 的人排在前三个,有3种选择位置.而能力排名1到 $a-1$ 的人都排在后7个位置上,并且谁位于他们之首谁就被录用,有排法 $\binom{7}{a-1}(a-2)!$ 种,其余 $10-a$ 人可以在剩下的位置上任意排列,有 $(10-a)!$ 种排法.故有

$$|A_k(a)| = \begin{cases} 3\binom{7}{a-1}(a-2)!(10-a)! := r_a, & k = 1, \dots, a-1 \\ 0, & k = a, \dots, 10. \end{cases}$$

上述结果表明:

$$A_8 = A_9 = A_{10} = r_1 = 3 \times 8! > 0;$$

$$A_k = r_1 + r_{k+1} + \dots + r_8, k = 2, \dots, 7;$$

$$A_1 = r_2 + r_3 + \dots + r_8.$$

$$\text{显然 } A_2 > A_3 > \dots > A_8 = A_9 = A_{10} > 0. \text{ 而 } A_1 - A_2 = r_2 - r_1 = 3 \times 7 \times 8! - 3 \times 8! > 0.$$

综上所述,问题(1)获证.

(2)由(1)可知

$$\frac{A_8 + A_9 + A_{10}}{10!} = \frac{3r_1}{10!} = \frac{3 \times 3 \times 8!}{10!} = 10\%$$

所以,录用到能力最弱的三人之一的可能性等于10%.

并且

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{a=2}^8 r_a = \sum_{a=2}^8 3\binom{7}{a-1}(a-2)!(10-a)! \\ &= 3 \times 7! \sum_{a=2}^8 \frac{(9-a)(10-a)}{a-1} \\ &= 3 \times 7! \times \left(56 + 21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7} \right) \\ &= 3 \times 7! \times 95\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 95\frac{2}{3} = 287 \times 7! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= r_1 + \sum_{a=3}^8 r_a \\ &= 3 \times 8! + 3 \times 7! \times \left(21 + 10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7} \right) \\ &= 3 \times 7! \times 47\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 47\frac{2}{3} = 143 \times 7! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 &= r_1 + \sum_{a=4}^8 r_a \\ &= 3 \times 8! + 3 \times 7! \times \left(10 + 5 + \frac{12}{5} + 1 + \frac{2}{7} \right) \\ &= 3 \times 7! \times 26\frac{24}{35} > 3 \times 7! \times 26\frac{2}{3} = 80 \times 7! \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \frac{A_1 + A_2 + A_3}{10!} > \frac{287 + 143 + 80}{720} = \frac{17}{24} > 70\%.$$

即录用到能力最强的三人之一的可能性大于70%.

6. 设 a, b, c, d 为正实数, 满足 $ab + cd = 1$; 点 $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, 4)$ 是以原点为圆心的单位圆上的四个点.

求证:

$$(ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 + (ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \leq 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right).$$

证明:

$$\because (ab + cd)\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{abc}{d} + \frac{abd}{c} + \frac{acd}{b} + \frac{bcd}{a}$$

是关于 a, b, c, d 对称的式子,

$$\therefore (ab + cd)\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right) = (ad + bc)\left(\frac{a^2 + d^2}{ad} + \frac{b^2 + c^2}{bc}\right)$$

由Cauchy不等式

$$(ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 \leq (ad + bc)\left(\frac{(ay_1 + dy_4)^2}{ad} + \frac{(by_2 + cy_3)^2}{bc}\right)$$

$$(ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \leq (ad + bc)\left(\frac{(ax_4 + dx_1)^2}{ad} + \frac{(bx_3 + cx_2)^2}{bc}\right)$$

$$(ay_1 + dy_4)^2 \leq (a^2 + d^2)(y_1^2 + y_4^2), (ax_4 + dx_1)^2 \leq (a^2 + d^2)(x_4^2 + x_1^2)$$

$$(by_2 + cy_3)^2 \leq (b^2 + c^2)(y_2^2 + y_3^2), (bx_3 + cx_2)^2 \leq (b^2 + c^2)(x_3^2 + x_2^2)$$

而 $x_i^2 + y_i^2 = 1 (i = 1, 2, 3, 4)$, $ab + cd = 1$. 所以

$$\begin{aligned} & (ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4)^2 + (ax_4 + bx_3 + cx_2 + dx_1)^2 \\ & \leq (ad + bc)\left(\frac{2(a^2 + d^2)}{ad} + \frac{2(b^2 + c^2)}{bc}\right) \\ & = 2(ad + bc)\left(\frac{a^2 + d^2}{ad} + \frac{b^2 + c^2}{bc}\right) \\ & = 2(ab + cd)\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right) \\ & = 2\left(\frac{a^2 + b^2}{ab} + \frac{c^2 + d^2}{cd}\right) \end{aligned}$$

第十九届中国数学奥林匹克(2004年)

澳门 教育暨青年局

1. 凸四边形 $EFGH$ 的顶点 E, F, G, H 分别在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 上, 满足 $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} = 1$, 而点 A, B, C, D 分别在凸四边形 $E_1F_1G_1H_1$ 的边 $E_1F_1, F_1G_1, G_1H_1, H_1E_1$ 上, 满足 $E_1F_1 \parallel EF, F_1G_1 \parallel FG, G_1H_1 \parallel GH, H_1E_1 \parallel HE$.

已知 $\frac{E_1A}{AH_1} = \lambda$, 求 $\frac{F_1C}{CG_1}$ 的值.

解:(1)若 $EF \parallel AC$, 则 $\frac{BE}{EA} = \frac{BF}{FC}$.

代入已知条件, 可以得到 $\frac{DH}{HA} = \frac{DG}{GC}$, 所以 $HG \parallel AC$, 从而 $E_1F_1 \parallel AC \parallel H_1G_1$, 故 $\frac{F_1C}{CG_1} = \frac{E_1A}{AH_1} = \lambda$.

(2)若 EF 与 AC 不平行, 设 FE 的延长线与 CA 的延长线相交于点 T , 则由Menelaus定理得

$$\frac{CF}{FB} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1$$

结合题设有

$$\frac{CG}{GD} \cdot \frac{DH}{HA} \cdot \frac{AT}{TC} = 1$$

由Menelaus定理逆定理可以知道, T, H, G 三点共线, 设 TF, TG 与 E_1H_1 分别交于点 M, N .

由 $E_1B \parallel EF$, 得 $E_1A = \frac{BA}{EA} \cdot AM$, 同理 $H_1A = \frac{AD}{AH} \cdot AN$, 所以

$$\frac{E_1A}{H_1A} = \frac{AM}{AN} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AH}{AD}$$

又因为

$$\frac{EQ}{QH} = \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle AHC}} = \frac{S_{\triangle ABC} \cdot AE \cdot AD}{S_{\triangle ADC} \cdot AB \cdot AH}$$

所以

$$\frac{E_1A}{AH_1} = \frac{EQ}{QH} \cdot \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AH}{AD} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$

同理

$$\frac{F_1C}{CG_1} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ADC}}$$

所以 $\frac{F_1C}{CG_1} = \frac{E_1A}{AH_1} = \lambda$.

2. 已知正整数 c , 设数列 x_1, x_2, \dots 满足:

$$x_1 = c, x_n = x_{n-1} + \left[\frac{2x_{n-1} - (n+2)}{n} \right] + 1 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

其中 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解: 显然当 $n \geq 2$ 时

$$x_n = x_{n-1} + \left[\frac{2(x_{n-1} - 1)}{n} \right]$$

令 $a_n = x_n - 1$, 则 $a_1 = c - 1$,

$$a_n = a_{n-1} + \left[\frac{2a_{n-1}}{n} \right] = \left[\frac{n+2}{n} a_{n-1} \right] \quad n = 2, 3, \dots \quad (1)$$

设 $u_n = A \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $n = 1, 2, \dots$, 其中 A 为非负整数. 由于当 $n \leq 2$ 时, 有

$$\left[\frac{n+2}{n} u_{n-1} \right] = \left[A \frac{n+2}{2n} n(n+1) \right] = A \frac{(n+1)(n+2)}{2} = u_n$$

所以数列 $\{u_n\}$ 满足(1).

设 $y_n = n, n = 1, 2, \dots$ 当 $n \leq 2$ 时,有

$$\left[\frac{n+2}{n} y_{n-1} \right] = \left[\frac{(n+2)(n-1)}{n} \right] = \left[n + 1 - \frac{2}{n} \right] = n = y_n$$

所以数列 $\{y_n\}$ 满足(1).

设 $z_n = \left[\frac{(n+2)^2}{4} \right], n = 1, 2, \dots$ 当 $n = 2m(m \geq 1)$ 时,有

$$\left[\frac{n+2}{n} z_{n-1} \right] = \left[\frac{m+1}{m} \left[\frac{(2m+1)^2}{4} \right] \right] = \left[\frac{m+1}{m} m(m+1) \right] = (m+1)^2 = z_n$$

当 $n = 2m+1(m \geq 1)$ 时,有

$$\left[\frac{n+2}{n} z_{n-1} \right] = \left[\frac{2m+3}{2m+1} \left[\frac{(2m+2)^2}{4} \right] \right] = \left[\frac{2m+3}{2m+1} (m+1)^2 \right] = (m+1)(m+2) = z_n$$

所以数列 $\{z_n\}$ 满足(1).

对于任意非负整数 A ,令 $v_n = u_n + y_n = A \frac{(n+1)(n+2)}{2} + n, w_n = u_n + z_n = A \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \left[\frac{(n+2)^2}{4} \right], n = 1, 2, \dots$,显然 $\{v_n\}, \{w_n\}$ 都满足(1).

由于 $u_1 = 3A, y_1 = 1, z_1 = 2$,所以当 $3|a_1$ 时, $a_n = \frac{a_1}{6}(n+1)(n+2)$;当 $a_1 \equiv 1 \pmod{3}$ 时, $a_n = \frac{a_1-1}{6}(n+1)(n+2) + n$;当 $a_1 \equiv 2 \pmod{3}$ 时, $a_n = \frac{a_1-2}{6}(n+1)(n+2) + \left[\frac{(n+2)^2}{4} \right]$. 综上可得

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{c-1}{6}(n+1)(n+2) + 1, & \text{当 } c \equiv 1 \pmod{3}, \\ x_n &= \frac{c-2}{6}(n+1)(n+2) + n + 1, & \text{当 } c \equiv 2 \pmod{3}, \\ x_n &= \frac{c-3}{6}(n+1)(n+2) + \left[\frac{(n+2)^2}{4} \right] + 1, & \text{当 } c \equiv 0 \pmod{3}. \end{aligned}$$

3. 设 M 是平面上 n 个点组成的集合,满足:

(1) M 中存在7个点,是一个凸七边形的7个顶点;

(2) M 中任意5个点,若这5个点是一个凸五边形的5个顶点,则此凸五边形内部至少含有 M 中的一个点.

求 n 的最小值.

解:先证 $n \geq 11$.

设顶点在 M 中的一个凸七边形为 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$,连 A_1A_5 ,由条件(2)知,在凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 中至少有 M 中的一个点,记为 P_1 ;连 P_1A_1, P_1A_5 ,则在凸五边形 $A_1P_1A_5A_6A_7$ 内部至少有 M 中的一个点,记为 P_2 ,且 P_2 异于 P_1 ;连直线 $P_1P_2, A_1, A_2, \dots, A_7$ 至少有5个点不在直线 P_1P_2 上,有抽屉原则知,在直线 P_1P_2 的某一侧必有其中3个顶点,这3个顶点与点 P_1, P_2 构成的凸五边形内至少含有 M 中的一个点 P_3 ,并且 P_3 异于 P_1, P_2 .

再作直线 P_1P_3, P_2P_3 ,令直线 P_1P_2 对应区域为 π_3 :它是以直线 P_1P_2 为边界且在三角形 $P_1P_2P_3$ 异侧的一个半平面(不含直线 P_1P_2),类似定义区域 π_1, π_2 .这样3个区域 π_1, π_2, π_3 覆盖了平面上除三角形 $P_1P_2P_3$ 之外的所有点.由抽屉原则, A_1, A_2, \dots, A_7 中必有3个在同一区域内,不妨设为 π_3 .这三个点与 P_1, P_2 构成的凸五边形内至少含有 M 中的一个点 P_4 ,并且 P_4 异于 P_1, P_2, P_3 .所以 $n \geq 11$.

构造一个例子,在 Oxy 平面上,取整点 $A_1(0, 1), A_2(1, 3), A_3(2, 3), A_4(3, 2), A_5(3, 1), A_6(2, 0), A_7(1, 0)$ 构

成一个凸七边形,再加上其内部的所有四个整点(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)构成点集M,显然满足条件(1).

下面证明M也满足条件(2),若不然,假设存在一个整点凸五边形,其内部不含整点,显然所有整点多边形的面积均是 $\frac{1}{2}$ 的整数倍.必存在一个面积最小的内部不含整点的整点凸五边形ABCDE. 考虑顶点坐标的奇偶性,只有四种情况:(奇,偶)(偶,奇)(偶,偶)(奇,奇).从而这五个顶点中必有两个顶点的坐标奇偶性完全相同,于是它们连线中点P也是整点,又因为它不在五边形内部,必然在某条边上,不妨设在AB上,则P为AB中点,连PE,则PBCDE是面积更小的内部不含整点的整点凸五边形,矛盾.

综上所述,n的最小值为11.

4.给定实数a和正整数n,求证:

(1)存在唯一的实数数列 x_0, x_1, \dots, x_{n+1} 满足:

$$x_0 = x_{n+1} = 0,$$

$$\frac{1}{2}(x_{i+1} + x_{i-1}) = x_i + x_i^3 - a^3 (i = 1, 2, \dots, n)$$

(2)(1)中的数列 x_0, x_1, \dots, x_{n+1} 满足 $|x_i| \leq |a|$.

解:(1)存在性:由 $x_{i+1} = 2x_i + 2x_i^3 - 2a^3 - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$,及 $x_0 = 0$, 我们知道 x_i 是 x_1 的 3^{i-1} 次实系数多项式,从而 x_{n+1} 为 x_1 的 3^n 次实系数多项式,由 3^n 为奇数,故存在 x_1 ,使得 $x_{n+1} = 0$,由此 x_1 及 $x_0 = 0$ 即可求出 x_i , 如此得到的数列 x_0, x_1, \dots, x_{n+1} 满足题设条件.

唯一性:设 w_0, w_1, \dots, w_{n+1} 以及 v_0, v_1, \dots, v_{n+1} 为满足条件的两个数列,则

$$\frac{1}{2}(w_{i+1} + w_{i-1}) = w_i + w_i^3 - a^3, \frac{1}{2}(v_{i+1} + v_{i-1}) = v_i + v_i^3 - a^3.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2}(w_{i+1} - v_{i+1} + w_{i-1} - v_{i-1}) = (w_i - v_i)(1 + w_i^2 + w_i v_i + v_i^2).$$

设 $|w_{i_0} - v_{i_0}|$ 最大,则

$$|w_{i_0} - v_{i_0}| \leq |w_{i_0} - v_{i_0}|(1 + w_{i_0}^2 + w_{i_0} v_{i_0} + v_{i_0}^2) \leq \frac{1}{2}|w_{i_0+1} - v_{i_0+1}| + \frac{1}{2}|w_{i_0-1} - v_{i_0-1}| \leq |w_{i_0} - v_{i_0}|$$

从而 $|w_{i_0} - v_{i_0}| = 0$ 或者 $1 + w_{i_0}^2 + w_{i_0} v_{i_0} + v_{i_0}^2 = 1$,

由后一种情况可以推出 $w_{i_0}^2 + v_{i_0}^2 + (w_{i_0} + v_{i_0})^2 = 0, w_{i_0} = v_{i_0} = 0$.

所以总有 $|w_{i_0} - v_{i_0}| = 0$,再由 $|w_{i_0} - v_{i_0}|$ 最大,

所以所有 $|w_i - v_i| = 0$,即 $w_i = v_i, i = 1, 2, \dots, n$.唯一性得证.

(2)设 $|x_{i_0}|$ 最大,则

$$|x_{i_0}| + |x_{i_0}|^3 = |x_{i_0}|(1 + x_{i_0}^2) = \left| \frac{1}{2}(x_{i_0+1} + x_{i_0-1}) + a^3 \right| \leq \frac{1}{2}|x_{i_0+1}| + \frac{1}{2}|x_{i_0-1}| + |a|^3 \leq |x_{i_0}| + |a|^3$$

因此 $|x_{i_0}| \leq |a|$,所以 $|x_i| \leq |a|, i = 0, 1, 2, \dots, n+1$.

5. 给定正整数 $n \geq 2$,设正整数 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 满足 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ 以及 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$.求证:对任意实数x,有

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2} \right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}$$

解:当 $x^2 \geq a_1(a_1 - 1)$ 时,由 $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \leq 1$,可得

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{2a_i|x|}\right)^2 = \frac{1}{4x^2} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right)^2 \leq \frac{1}{4x^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2}$$

当 $x^2 < a_1(a_1 - 1)$ 时,由Cauchy不等式,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2 + x^2}\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(a_i^2 + x^2)^2}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(a_i^2 + x^2)^2}$$

对于正整数 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$,有 $a_{i+1} \geq a_i + 1, i = 1, 2, \dots, n - 1$,并且

$$\begin{aligned} \frac{2a_i}{(a_i^2 + x^2)^2} &\leq \frac{2a_i}{(a_i^2 + x^2 + \frac{1}{4})^2 - a_i^2} \\ &= \frac{2a_i}{\left((a_i - \frac{1}{2})^2 + x^2\right) \left((a_i + \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} \\ &= \frac{1}{\left((a_i - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} - \frac{1}{\left((a_i + \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} \\ &\leq \frac{1}{\left((a_i - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} - \frac{1}{\left((a_{i+1} - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)}, i = 1, 2, \dots, n - 1 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{(a_i^2 + x^2)^2} &\leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\left((a_i - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} - \frac{1}{\left((a_{i+1} - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\left((a_1 - \frac{1}{2})^2 + x^2\right)} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_1(a_1 - 1) + x^2} \end{aligned}$$

6.证明:除了有限个正整数外,其他的正整数 n 均可表示为2004个正整数之和 $n = a_1 + a_2 + \dots + a_{2004}$,且满足: $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{2004}, a_i | a_{i+1} (i = 1, 2, \dots, 2003)$

解:将证明如下更一般的结论:

对任给的正整数 $r \geq 2$,总存在 $N(r)$,当 $n \geq N(r)$ 时,存在正整数 a_1, a_2, \dots, a_r ,使得 $n = a_1 + a_2 + \dots + a_r$,
 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r, a_i | a_{i+1}, i = 1, 2, \dots, r - 1$.

当 $r = 2$ 时,有 $n = 1 + n - 1$,取 $N(2) = 3$ 即可.

假设当 $r = k$ 时,结论成立,当 $r = k + 1$ 时,取 $N(k + 1) = 4N(k)^3$.

设 $n = 2^\alpha(2l + 1)$,如果 $n \geq N(k + 1) = 4N(k)^3$,则 $2^\alpha \geq 2N(k)^2$ 或者 $2l + 1 > 2N(k)$.

若 $2^\alpha \geq 2N(k)^2$,则存在正偶数 $2t \leq \alpha$,使 $2^{2t} \geq N(k)^2$.

此时 $2^t + 1 \geq N(k)$,由归纳假设存在正整数 b_1, b_2, \dots, b_k ,使得 $2^t + 1 = b_1 + b_2 + \dots + b_k$,

其中 $1 \leq b_1 < \dots < b_k, b_i | b_{i+1}, i = 1, \dots, k - 1$.

这样

$$\begin{aligned}
2^\alpha &= 2^{\alpha-2t} \cdot 2^{2t} = 2^{\alpha-2t} [1 + (2^t - 1)(2^t + 1)] \\
&= 2^{\alpha-2t} + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_1 + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_2 + \cdots + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_k \\
n &= 2^{\alpha-2t}(2l + 1) + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_1(2l + 1) + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_2(2l + 1) + \cdots \\
&\quad + 2^{\alpha-2t}(2^t - 1)b_k(2l + 1)
\end{aligned}$$

若 $2l + 1 > 2N(k)$, 则 $l \geq N(k)$, 由归纳假设存在实数 c_1, c_2, \dots, c_k , 使得 $l = c_1 + c_2 + \cdots + c_k$, 其中 $1 \leq c_1 < \cdots < c_k, c_i | c_{i+1}, i = 1, \dots, k - 1$.

因此 $n = 2^\alpha + 2^{\alpha+1}c_1 + 2^{\alpha+1}c_2 + \cdots + 2^{\alpha+1}c_n$. 满足要求.

由归纳法知上述一般结论对所有的 $r \geq 2$ 成立. 令 $r = 2004$, 显然有原命题成立.

第二届中国数学奥林匹克(2005年)
郑州 郑州外国语学校

1. 设 $\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, 3, 4$. 证明: 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得如下两个不等式

$$\cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 - (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - x)^2 \geq 0$$

$$\cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_4 - (\sin \theta_3 \sin \theta_4 - x)^2 \geq 0$$

同时成立的充要条件是:

$$\sum_{i=1}^4 \sin^2 \theta_i \leq 2(1 + \prod_{i=1}^4 \sin \theta_i + \prod_{i=1}^4 \cos \theta_i). \quad (1)$$

证明: 显然所给的两个不等式分别等价于

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 \leq x \leq \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \quad (2)$$

$$\sin \theta_3 \sin \theta_4 - \cos \theta_3 \cos \theta_4 \leq x \leq \sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 \quad (3)$$

不难知道, 存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得(2)(3)同时成立的充分必要条件为

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 \geq 0 \quad (4)$$

$$\sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 \geq 0 \quad (5)$$

另一方面, 利用 $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, 可将(1)化为

$$\begin{aligned} & \cos^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 + 2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 \cos \theta_4 + \cos^2 \theta_3 \cos^2 \theta_4 \\ & - \sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 + 2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 - \sin^2 \theta_3 \sin^2 \theta_4 \geq 0 \end{aligned}$$

即

$$(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_3 \cos \theta_4)^2 - (\sin \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_3 \sin \theta_4)^2 \geq 0$$

亦即

$$\begin{aligned} & (\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4) \\ & \cdot (\sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2) \geq 0 \end{aligned} \quad (6)$$

当存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得(2)(3)同时成立时, 由(4)(5)即可推出(6), 从而(1)成立.

反之, 若(1)成立, 即(6)成立, 如果(4)(5)不成立, 必有

$$\sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 < 0$$

$$\sin \theta_3 \sin \theta_4 + \cos \theta_3 \cos \theta_4 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 < 0$$

两式相加, 得到 $2(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_3 \cos \theta_4) < 0$.

这与 $\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), i = 1, 2, 3, 4$ 矛盾, 所以必有(4)(5)成立, 因此存在 $x \in \mathbb{R}$, 使得(2)(3)同时成立, 证毕.

2.一圆与 $\triangle ABC$ 的三边 BC, CA, AB 的交点依次为 $D_1, D_2; E_1, E_2; F_1, F_2$. 线段 D_1E_1 与 D_2F_2 交于点 L , 线段 E_1F_1 与 E_2D_2 交于点 M , 线段 F_1D_1 与 F_2E_2 交于点 N , 证明: AL, BM, CN 三线共点.

证明:自点 L 作 AB 和 AC 的垂线,垂足分别为 L', L'' .记 $\angle LAB = \alpha_1, \angle LAC = \alpha_2, \angle LF_2A = \alpha_3, \angle LE_1A = \alpha_4$.则有

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{LL'}{LL''} = \frac{LF_2 \sin \alpha_3}{LE_1 \sin \alpha_4}$$

连接 D_1F_2, D_2E_1 ,由 $\triangle LD_1F_2 \sim \triangle LD_2E_1$,得 $\frac{LF_2}{LE_1} = \frac{D_1F_2}{D_2E_1}$.

连接 D_2F_1, D_1E_2 ,由正弦定理得 $\frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_4} = \frac{D_2F_1}{D_1E_2}$.

所以

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{D_1F_2}{D_2E_1} \cdot \frac{D_2F_1}{D_1E_2}$$

同理,记 $\angle MBC = \beta_1, \angle MBA = \beta_2, \angle NCA = \gamma_1, \angle NCB = \gamma_2$,可得

$$\frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} = \frac{E_1D_2}{E_2F_1} \cdot \frac{E_2D_1}{E_1F_2}$$

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = \frac{F_1E_2}{F_2D_1} \cdot \frac{F_2E_1}{F_1D_2}$$

三式相乘,得

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{\sin \beta_1}{\sin \beta_2} \cdot \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} = 1$$

由Ceva定理逆定理的角元形式, AL, BM, CN 三线共点.

3.如图所示,圆形的水池被分割为 $2n(n \geq 5)$ “格子”.我们把有公共隔墙(公共边或公共弧)的格子称为相邻的,从而每个格子都有三个邻格.

水池中一共跳入了 $4n + 1$ 只青蛙,青蛙难于安静共处,只要某个格子中有不少于3只青蛙,那么迟早一定会有其中3只分别同时跳往三个不同邻格.

证明:只要经过一段时间之后,青蛙便会在水池中大致分布均匀.

注:所谓大致分布均匀,就是任取其中一个格子,或者它里面有青蛙,或者它的三个邻格里都有青蛙.

证明:我们把一个格子中出现一次3只青蛙同时分别跳向三个邻格的事件称为该格子发生一次爆发.而把一个格子或者是它里面有青蛙,或者是它的三个相邻的格子里面都有青蛙,称为该格子处于平衡状态.容易看出,一个格子只要一旦有青蛙跳入,那么它就一直处于平衡状态.事实上,只要不爆发,那么该格子中的青蛙不会动,它当然处于平衡状态;而如果发生爆发,那么它的三个邻格中就都有青蛙,并且只要三个邻格都不爆发,它就一直处于平衡状态;而不论哪个邻格发生爆发,都会有青蛙跳到它里面,它也一直处于平衡状态.

这样一来,为了证明题中断言,我们就只要证明:任何一个格子都迟早会有青蛙跳入.

任取一个格子,把它称为格A,把它所在的扇形称为1号扇形,把该扇形中另一个格子称为格B,我们要证明格A中迟早会有青蛙跳入.

按顺时针方向依次将其余扇形接着编为2至 n 号.首先证明1号扇形中迟早会有青蛙跳入.假设1号扇形中永无青蛙到来,那么就不会有青蛙越过1号扇形与 n 号扇形之间的隔墙.我们来考察青蛙所在的扇形

的编号的平方和,由于没有青蛙进入1号扇形 所以只能是有3只青蛙由某个 $k(3 \leq k \leq n)$ 号扇形分别跳入 $k-1, k$ 和 $k+1$ 号扇形各一只.因此平方和的变化量为 $(k-1)^2 + k^2 + (k+1)^2 - 3k^2 = 2$. 即增加2.一方面,由于青蛙的跳动不会停止(因为总有一个格子里有不少于3只青蛙),所以平方和的增加趋势不会停止;但是另一方面,青蛙所在扇形的标号的平方和不可能永无止境的增加下去(不会大于 $(4n+1)n^2$),由此产生矛盾,所以迟早会有青蛙越过1号扇形与 n 号扇形之间的隔墙,进入1号扇形.

我们再来证明1号扇形迟早会有3只青蛙跳入,如果1号扇形中至多有两只青蛙跳入,那么它们都不会跳走,并且自始至终上述平方和至多有两次变少(只能在两只青蛙越过1号扇形与 n 号扇形之间的隔墙时变小),以后便一直持续不断的上升,从而又重蹈刚才的矛盾,所以1号扇形中迟早会有三只青蛙跳入.

如果这3只青蛙中有位于格A的,那么格A中已经有青蛙跳入;如果这3只青蛙全都位于格B,那么格B会发生爆发,从而有青蛙跳入格A.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1 = \frac{21}{16}$,及

$$2a_n - 3a_{n-1} = \frac{3}{2^{n+1}}, n \geq 2.$$

设 m 为正整数, $m \geq 2$.证明:当 $n \leq m$ 时,有

$$\left(a_n + \frac{3}{2^{n+3}}\right)^{\frac{1}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}.$$

证明:令 $b_n = a_n + \frac{3}{2^{n+3}}$.则

$$2\left(b_n - \frac{3}{2^{n+3}}\right) - 3\left(b_{n-1} - \frac{3}{2^{n+2}}\right) = \frac{3}{2^{n+1}}$$

所以 $b_n = \frac{3}{2}b_{n-1}$.而 $b_1 = \frac{3}{2}$,所以 $b_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

所以只需证明:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < \frac{m^2 - 1}{m - n + 1}.$$

即只需证明

$$\left(1 - \frac{n}{m+1}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m - 1$$

由Bernoulli不等式:

$$1 - \frac{n}{m+1} < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^n$$

所以

$$\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m < \left(1 - \frac{1}{m+1}\right)^{mn} = \left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn} = \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}\right]^n$$

由于 $m \geq 2$,根据二项式定理可得

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \geq 1 + \binom{m}{1} \frac{1}{m} + \binom{m}{2} \frac{1}{m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m} \geq \frac{9}{4}$$

所以

$$\left(1 - \frac{n}{m+1}\right)^m < \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$1 - \frac{n}{m+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$$

所以只需证明

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m - 1$$

即

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}} \left(m - \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right) < m - 1$$

记 $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}$, 则 $0 < t < 1$, 只需证明 $t(m - t^{m-1}) < m - 1$.

即 $(t-1)[m - (t^{m-1} + t^{m-2} + \dots + 1)] < 0$, 此不等式显然成立, 从而原不等式成立.

5. 在面积为1的矩形 $ABCD$ 中(包括边界)有5个点, 其中任意三点不共线. 求以这5个点为顶点的所有三角形中, 面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形的个数的最小值.

解: 本题证明需要用到如下的常用结论, 我们将其作为一个引理: 矩形内任意一个三角形的面积不大于矩形面积的一半.

在矩形 $ABCD$ 中, 如果某三点构成的三角形的面积不大于 $\frac{1}{4}$, 就称它们为一个好的三点组, 简称为好组.

记 AB, CD, BC, AD 的中点分别为 E, F, H, G , 线段 EF 与 GH 的交点记为 O . 线段 EF 和 GH 将矩形 $ABCD$ 分成四个小矩形, 从而一定存在一个小矩形, 不妨设为 $AEOG$, 其中(包括边界, 下同)至少有所给5个点中的两个点, 设点 M, N 在矩形 $AEOG$ 中.

(1) 如果矩形 $OHCF$ 中有不多于1个已知点, 考察不在矩形 $OHCF$ 中的任意一个不同于 M 和 N 的已知点 X , 显然, 三点组 (M, N, X) 或者在矩形 $ABGH$ 中, 或者在矩形 $AEFD$ 中. 由引理可知 (M, N, X) 是好组, 由于这样的点至少有两个, 所以至少存在两个好组.

(2) 如果矩形 $OHCF$ 中有至少2个已知点, 不妨设点 P, Q 都在矩形 $OHCF$ 中, 考察剩下的最后一个已知点 R . 如果 R 在矩形 $OFDG$ 中, 则三点组 (M, N, R) 在矩形 $AEFD$ 中, 三点组 (P, Q, R) 在矩形 $GHCD$ 中, 从而它们都是好组, 于是至少有两个好组. 同理, 如果点 R 在矩形 $EBHO$ 中, 同样至少有两个好组.

如果点 R 在矩形 $EBHO$ 或者 $AEOG$ 中, 不妨设在矩形 $EBHO$ 中, 考察5个点 M, N, P, Q, R 的凸包, 它一定在凸六边形 $AEHCFG$ 中.

$$\text{而 } S_{AEHCFG} = S_{ABCD} - S_{DFG} - S_{BEH} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

再分三种情况讨论:

(i) M, N, P, Q, R 的凸包为五边形, 不妨设为 $MNPQR$, 此时 $S_{MQR} + S_{MNQ} + S_{NPQ} \leq \frac{3}{4}$,

从而 $(M, Q, R), (M, N, Q), (N, P, Q)$ 中至少有一个为好组, 又由于 (P, Q, R) 在矩形 $OHCF$ 中, 当然是好组, 所以至少有两个好组.

(ii) M, N, P, Q, R 的凸包为四边形, 不妨设为 $A_1A_2A_3A_4$, 另一点为 A_5 .

$$\text{则 } S_{A_1A_2A_5} + S_{A_2A_3A_5} + S_{A_3A_4A_5} + S_{A_4A_1A_5} = S_{A_1A_2A_3A_4} \leq \frac{3}{4},$$

从而 $(A_1, A_2, A_5), (A_2, A_3, A_5), (A_3, A_4, A_5), (A_4, A_1, A_5)$ 中至少有两个好组.

(iii) M, N, P, Q, R 的凸包为三角形, 不妨设为 $A_1A_2A_3$, 另两个点为 A_4, A_5 .

$$\text{则 } S_{A_1A_2A_4} + S_{A_2A_3A_4} + S_{A_3A_1A_4} = S_{A_1A_2A_3} \leq \frac{3}{4}.$$

从而 $(A_1, A_2, A_4), (A_2, A_3, A_4), (A_3, A_1, A_4)$ 中至少有一个好组,

同理, $(A_1, A_2, A_5), (A_2, A_3, A_5), (A_3, A_1, A_5)$ 中至少有一个好组,此时也至少有两个好组.

综上所述,不论何种情况,在5个已知点中至少有2个好组.

下面给出一个例子说明好组的数目可以只有两个.在矩形 $ABCD$ 中, M, N 分别在边 AD, AB 上,使得 $AN : NB = AM : MD = 2 : 3$,则在 M, N, B, C, D 这5个点中恰好有两个好组.

事实上,我们可以求得 $S_{BCD} = S_{BCM} = S_{CDN} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$,

$$S_{MCD} = S_{MDB} = S_{NCB} = S_{NBD} = \frac{3}{10} > \frac{1}{4}.$$

$$S_{MNC} = S_{ABCD} - S_{NCB} - S_{DMC} - S_{AMN} = 1 - \frac{3}{10} - \frac{3}{10} - \frac{2}{25} = \frac{8}{25} > \frac{1}{4}.$$

所以只有两个好组 $(M, N, B), (M, N, D)$.

故面积不大于 $\frac{1}{4}$ 的三角形的个数的最小值为2.

6.求方程

$$2^x \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$$

的所有非负整数解 (x, y, z, w) .

解:由 $5^z \cdot 7^w + 1$ 为偶数,知 $x \geq 1$.

(1)若 $y = 0$,此时 $2^x - 5^z \cdot 7^w = 1$.

若 $z \neq 0$,则 $2^x \equiv 1 \pmod{5}$,由此可得 $4|x$.因此 $3|2^x - 1$,这与 $2^x - 5^z \cdot 7^w = 1$ 矛盾.

若 $z = 0$,则 $2^x - 7^w = 1$.

当 $x = 1, 2, 3$ 时,直接计算可得两组解 $(x, w) = (1, 0)(3, 1)$.

当 $x \geq 4$ 时,有 $7^w \equiv -1 \pmod{16}$,但是 $7^{2k} \equiv 1 \pmod{16}, 7^{2k+1} \equiv 7 \pmod{16}$,显然不可能.

所以当 $y = 0$ 时,全部非负实数解为 $(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 1)$.

(2)若 $y > 0, x = 1$,则 $2 \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1$.

因此 $-5^z \cdot 7^w \equiv 1 \pmod{3}$,所以 $(-1)^z \equiv -1 \pmod{3}, z$ 为奇数.

所以 $2 \cdot 3^y \equiv 1 \pmod{5}$,由此可得 $y \equiv 1 \pmod{4}$.

当 $w \neq 0$ 时,有 $2 \cdot 3^y \equiv 1 \pmod{7}$,由此可得 $y \equiv 4 \pmod{6}$,与 $y \equiv 1 \pmod{4}$ 矛盾.

所以 $w = 0$,于是 $2 \cdot 3^y - 5^z = 1$.

当 $y = 1$ 时, $z = 1$.当 $y \geq 2$ 时, $5^z \equiv -1 \pmod{9}$,由此可知 $z \equiv 3 \pmod{6}$,因此 $5^3 + 1|5^z + 1$.

所以 $7|5^z + 1$,这与 $5^z + 1 = 2 \cdot 3^y$ 矛盾.

故 $y > 0, x = 1$ 时所有非负整数解为 $(x, y, z, w) = (1, 1, 1, 0)$.

(3)若 $y > 0, x \geq 2$,此时 $5^z \cdot 7^w \equiv -1 \pmod{4}, 5^z \cdot 7^w \equiv -1 \pmod{3}$.

即 $(-1)^w \equiv -1 \pmod{4}, (-1)^z \equiv -1 \pmod{3}$.

因此 z, w 都是奇数,从而 $2^x \cdot 3^y = 5^z \cdot 7^w + 1 \equiv 35 + 1 \equiv 4 \pmod{8}$.

所以 $x = 2$,原方程变为 $4 \cdot 3^y - 5^z \cdot 7^w = 1, z, w$ 都是奇数.

由此可知 $4 \cdot 3^y \equiv 1 \pmod{5}, 4 \cdot 3^y \equiv 1 \pmod{7}$,

从上面两式可以得到 $y \equiv 2 \pmod{12}$.

设 $y = 12m + 2, (m \geq 0)$ 于是 $5^z \cdot 7^w = 4 \cdot 3^y - 1 = (2 \cdot 3^{6m+1} - 1)(2 \cdot 3^{6m+1} + 1)$.

所以 $2 \cdot 3^{6m+1} - 1 = 5^p \cdot 7^q (p, q \text{ 为非负实数})$.

化为(2)的情况,必有 $p = 1, q = 0, 2 \cdot 3^{6m+1} - 1 = 5, m = 0, y = 2$.

此时有 $5^z \cdot 7^w = 5(5 + 2) = 35$,所以 $z = w = 1$.

故 $y > 0, x \geq 2$ 时所有非负整数解为 $(x, y, z, w) = (2, 2, 1, 1)$.

综上所述,所求的非负整数解为 $(x, y, z, w) = (1, 0, 0, 0), (3, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (2, 2, 1, 1)$.

数学符号:

∞ :无穷大

$\binom{n}{k}$:二项式系数

$|$:整除

$a^k \parallel b$: a^k 整除 b ,但是 a^{k+1} 不整除 b

$\gcd(a, b), \text{lcm}(a, b)$: a, b 的最大公约数和最小公倍数

$[x]$:不超过 x 的最大整数

\sphericalangle :角

\odot :圆

S_{Δ} :三角形的面积

\parallel :平行

\perp :垂直

\sim :相似

\cong :全等

\in :属于

\subset :包含于

\rightarrow :映射关系

\cap :交集

\cup :并集

\setminus :差集

\emptyset :空集

\mathbb{R} :实数集

\mathbb{N} :自然数集

\mathbb{Z} :整数集

\mathbb{Q} :有理数集

\mathbb{N}^* :正整数集

\mathbb{Q}^* :正有理数集

\max :最大值

\min :最小值

\because :因为

\therefore :所以

\Leftrightarrow :等价于

\sum :求和

\prod :求积