2005 年安徽省高中数学竞赛初赛

一、选择题(每小题 6 分,共 36 分)

1. 已知 $m>1$, $a=\sqrt{m+1}-\sqrt{m}$, $b=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$. 那么,( ).

(A) $a>b$ (B) $a<b$ (C) $a=b$

(D) a、b 的大小与 m 的取值有关

2. 在 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中,含 x 项的系数是( ).

(A) 160 (B) 240 (C) 360 (D) 800

3. 如图 1,已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 E、F 分别在 AB_1、BC_1 上(不与线段的端点重合),且 $AE=BF$. 那么,下面 4 个结论:

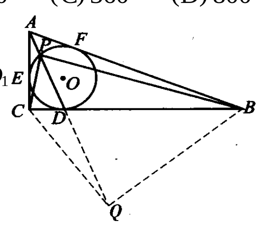

图 1

①$AA_1\perp EF$; ②$A_1C_1 \parallel EF$; ③$EF \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$; ④EF 与 A_1C_1 异面.

正确的是( ).

(A) ②④ (B) ①④ (C) ②③ (D) ①③

4. 已知数列: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \cdots$,依它的前 10 项的规律,这个数列的第 2 005 项 a_{2005} 满足( ).

(A) $1\leq a_{2005}\leq 2$ (B) $\frac{1}{2}\leq a_{2005}<1$

(C) $0<a_{2005}<\frac{1}{2}$ (D) $a_{2005}>2$

5. 若一个至少有两位数字的正整数除了最左边的数字外,其余各个数字都小于其左边的数字时,则称这样的正整数为“好数”. 那么,所有这样的好数的个数为( ).

(A) 1 013 (B) 1 011 (C) 1 010 (D) 1 001

6. 设集合 $A=\{-2,0,1\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$,映射 $f: A\to B$ 使对任意 $x\in A$ 都有 $x+f(x)+xf(x)$ 是奇数. 则这样的映射 f 的个数是( ).

(A) 45 (B) 27 (C) 15 (D) 11

二、填空题(每小题 9 分,共 54 分)

7. 函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=f^{-1}(x)$, $y=f(x-1)$ 的图像过点 $(3,3)$. 则函数 $y=f^{-1}(x+2)$ 的图像一定过点______.

8. 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 的右顶点为 A,上顶点为 B,左焦点为 F,且 $\angle ABF=90°$. 则椭圆的离心率为______.

9. 在正三棱锥 $S-ABC$ 中,M、N 分别是 SB、SC 的中点. 若截面 $AMN\perp$ 侧面 SBC,则此棱锥侧面与底面所成的二面角的大小是______.

10. 已知集合 $M=\left\{x \mid x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-2}{\lambda^n+2^n}\right.$, λ 为常数,且 $\left.\lambda+2\neq 0\right\}$. 则 M 的所有元素的和为______.

11. 设函数

$$f(x)=4\sin x\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)+\cos 2x.$$

若 $|f(x)-m|<2$ 成立的充分条件是 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$,则实数 m 的取值范围是______.

12. 若 $6^m+2^n+2\ (m、n\in\mathbf{N})$ 是一个完全平方数,则所有可能的 $(m,n)=$______.

三、**13.** (20 分)已知函数

$$f(x)=ax^2+bx+c\ (a、b、c\in\mathbf{R}),$$

当 $x\in[-1,1]$ 时,$|f(x)|\leq 1$.

(1) 证明: $|b|\leq 1$;

(2) 若 $f(0)=-1$, $f(1)=1$,求 a 的值.

14. (20 分)已知常数 $a>0$,向量 $\mathbf{p}=(1,$

0), $\boldsymbol{q}=(0,a)$, 经过定点 $M(0,-a)$、方向向量为 $\lambda\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}$ 的直线与经过定点 $N(0,a)$、方向向量为 $\boldsymbol{p}+2\lambda\boldsymbol{q}$ 的直线交于点 R, 其中 $\lambda\in\mathbf{R}$.

(1) 求点 R 的轨迹方程;

(2) 设 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 过 $F(0,1)$ 的直线 l 交点 R 的轨迹于 A、B 两点, 求 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的取值范围.

15. (20 分) 已知在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=t$, $a_2=t^2$, 其中 $t>0$, $x=\sqrt{t}$ 是函数

$$f(x)=a_{n-1}x^3-3[(t+1)a_n-a_{n+1}]x+1\ (n\geqslant 2)$$

的一个极值点.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $\frac{1}{2}<t<2$, $b_n=\frac{2a_n}{1+a_n^2}$ $(n\in\mathbf{N}_+)$, 求证: $\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}<2^n-2^{-\frac{n}{2}}$.

参 考 答 案

一、**1.** B.

因为 $a=\frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}}$, $b=\frac{1}{\sqrt{m}+\sqrt{m-1}}$,

又 $\sqrt{m+1}>\sqrt{m}>\sqrt{m-1}>0$, 则 $a<b$.

2. B.

在 $(x^2+3x+2)^5$ 的展开式中, 要得到含 x 的项, 则有 4 个因式取得 2, 一个因式中取 $3x$ 项, 故 x 的系数为 $C_5^4\times3\times2^4=240$.

3. D.

如图 2, 作 $EP\perp AB$ 于点 P, $FQ\perp BC$ 于点 Q, 联结 PQ. 结合题设易知, $PE\underline{\underline{/\!/}}QF$.

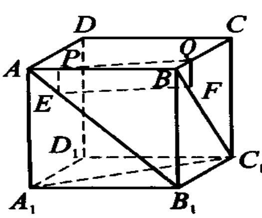

图 2

又 $PE\perp$ 平面 AC, 则 $PE\perp PQ$, 即四边形 $PEFQ$ 是矩形.

从而, $AA_1\perp EF$, $EF/\!/$ 平面 AC, 即 $EF/\!/$ 平面 A_1C_1. 故 ①、③正确.

4. C.

将数列分组

$$\left(\frac{1}{1}\right),\left(\frac{2}{1},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{1},\frac{2}{2},\frac{1}{3}\right),\left(\frac{4}{1},\frac{3}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{4}\right),\cdots.$$

设 $a_{2\,005}$ 位于第 n 组. 由

$\frac{n(n-1)}{2}<2\,005\leqslant\frac{n(n+1)}{2}$, 解得 $n=63$.

所以, $a_{2\,005}$ 位于第 63 组中的第 $2\,005-\frac{63\times62}{2}=52$ 项.

故 $a_{2\,005}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$.

5. A.

先考察 k $(2\leqslant k\leqslant10)$ 位数的好数共有 C_{10}^k 个. 则共有 $\sum\limits_{k=2}^{10}C_{10}^k=\sum\limits_{k=0}^{10}C_{10}^k-C_{10}^1-C_{10}^0=1\,013$ 个.

6. A.

当 $x=-2$ 时, $x+f(x)+xf(x)=-2-f(-2)$ 为奇数, 则 $f(-2)$ 可取 1, 3, 5, 有 3 种取法;

当 $x=0$ 时, $x+f(x)+xf(x)=f(0)$ 为奇数, 则 $f(0)$ 可取 1, 3, 5, 有 3 种取法;

当 $x=1$ 时, $x+f(x)+xf(x)=1+2f(1)$ 为奇数, 则 $f(1)$ 可取 1, 2, 3, 4, 5, 有 5 种取法.

由乘法原理可知, 共有 $3\times3\times5=45$ 个映射.

二、**7.** (1, 2).

由题意有 $f^{-1}(3)=2$, 即 $f^{-1}(1+2)=2$.

故过点 (1, 2).

8. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

由 $BF^2+AB^2=AF^2$, 有

$c^2+b^2+b^2+a^2=(a+c)^2$.

则 $\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}-1=0$.

解得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

9. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

因为面 $AMN\perp$ 面 SBC, 取 MN 中点 G, 联结 AG, 则 $AG\perp MN$. 取 BC 中点 D, 联结 SD、AD, 则 $\angle SDA$ 为所求二面角的平面角. 设底面边长为 a, 则 $SA=AD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 所以, $SD=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $GD=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

故 $\cos\angle SDA=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

10. 3.

当 $|\lambda|>2$ 时, $x=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n-2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n}=0$;

当 $\lambda=2$ 时, $x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$;

当 $|\lambda|<2$ 时, $x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^n+1}=2$.

11. $(1,4)$.

$$f(x)=4\sin x\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{2}+\cos 2x$$

$$=2\sin x(1+\sin x)+1-2\sin^2 x=1+2\sin x.$$

当 $\frac{\pi}{6}\leq x\leq\frac{2\pi}{3}$ 时, $|f(x)-m|<2$ 恒成立,即 $f(x)-2<m<f(x)+2$ 恒成立. 故有

$$(f(x)-2)_{\max}<m<(f(x)+2)_{\min}.$$

易知 $f(x)_{\max}=3$, $f(x)_{\min}=2$.

故 $1<m<4$.

12. $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,3)$.

当 $m\geq 2$, $n\geq 2$ 时,有

$$6^m+2^n+2=2(3\times 6^{m-1}+2^{n-1}+1),$$

显然,不是完全平方数.

下面讨论 $m\leq 1$ 或 $n\leq 1$ 的情况.

当 $m=0$ 时, $6^m+2^n+2=2^n+3$,由于 $n\geq 2$ 时, $2^n+3\equiv 3 \pmod 4$, 2^n+3 不可能为完全平方数,故 $n=0$ 或 1,此时,有解 $(m,n)=(0,0)$;

当 $m=1$ 时, $6^m+2^n+2=2^n+8$,由于 $n\geq 4$ 时, $2^n+8=8(2^{n-3}+1)$ 不可能为完全平方数,故 $n=0$, 1, 2 或 3. 易知 $(m,n)=(1,0)$, $(1,3)$.

当 $n=0$, 1 时,同理可得 $(m,n)=(0,0)$, $(1,0)$.

三、**13.** (1)因 $f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$,则 $b=\frac{1}{2}(f(1)-f(-1))$.

由题意得 $|f(1)|\leq 1$, $|f(-1)|\leq 1$.

故 $|b|=\frac{1}{2}|f(1)-f(-1)|$

$$\leq\frac{1}{2}(|f(1)|+|f(-1)|)\leq 1.$$

(2)由 $f(0)=-1$, $f(1)=1$,得 $c=-1$, $b=2-a$. 则

$$f(x)=ax^2+(2-a)x-1$$

$$=a\left(x-\frac{a-2}{2a}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4a}-1.$$

由 $|f(-1)|\leq 1$,得 $|2a-3|\leq 1$,即 $1\leq a\leq 2$.

所以, $\frac{a-2}{2a}=\frac{1}{2}-\frac{1}{a}\in[-1,1]$.

从而, $\left|f\left(\frac{a-2}{2a}\right)\right|\leq 1$.

故 $\left|\frac{(a-2)^2}{4a}+1\right|\leq 1$.

又 $\frac{(a-2)^2}{4a}\geq 0$, $\frac{(a-2)^2}{4a}+1\geq 1$,

则 $\frac{(a-2)^2}{4a}+1=1$,即 $a=2$.

14. (1)设 $R(x,y)$,则

$\boldsymbol{MR}=(x,y+a)$, $\boldsymbol{NR}=(x,y-a)$.

又 $\lambda\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=(\lambda,a)$, $\boldsymbol{p}+2\lambda\boldsymbol{q}=(1,2\lambda a)$,且

$\boldsymbol{MR}\parallel(\lambda\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{NR}\parallel(\boldsymbol{p}+2\lambda\boldsymbol{q})$,

故 $\begin{cases}\lambda(y+a)=ax,\\ y-a=2\lambda ax.\end{cases}$

消去参数 λ,得点 R 的轨迹方程为

$$(y+a)(y-a)=2a^2x^2,$$

即 $y^2-2a^2x^2=a^2$ (去掉点 $(0,-a)$).

(2)因 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,则点 R 的轨迹方程为

$2y^2-2x^2=1$ (去掉点 $\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

若 l 的斜率不存在,其方程为 $x=0$, l 与双曲线交于一点 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

若 l 的斜率存在,设其方程为 $y=kx+1$. 代入 $2y^2-2x^2=1$,化简得

$$2(k^2-1)x^2+4kx+1=0.$$

由 $\begin{cases}k^2-1\neq 0,\\ \Delta=16k^2-8(k^2-1)>0,\end{cases}$ 解得 $k\neq\pm 1$.

设 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,则 $x_1x_2=\frac{1}{2(k^2-1)}$.

故 $\boldsymbol{FA}\cdot\boldsymbol{FB}=(x_1,y_1-1)\cdot(x_2,y_2-1)$

$$=(x_1,kx_1)\cdot(x_2,kx_2)=x_1x_2+k^2x_1x_2$$

$$=\frac{k^2+1}{2(k^2-1)}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k^2-1}\right).$$

当 $-1<k<1$ 时, $k^2-1<0$,故 $k=0$ 时, $\boldsymbol{FA}\cdot\boldsymbol{FB}$ 有最大值 $-\frac{1}{2}$;

当 $k>1$ 或 $k<-1$ 时, $k^2-1>0$, $\boldsymbol{FA}\cdot\boldsymbol{FB}>\frac{1}{2}$.

综上可得

$$\boldsymbol{FA}\cdot\boldsymbol{FB}\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right).$$

15. (1)由题意得 $f'(\sqrt{t})=0$,即

$$3a_{n-1}t-3[(t+1)a_n-a_{n+1}]=0,$$

故 $a_{n+1}-a_n=t(a_n-a_{n-1})\ (n\geq 2)$.

则当 $t\neq 1$ 时,数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 t^2-t 为首项、t 为公比的等比数列. 所以,

2005 年河南省数学竞赛(高一)

一、选择题(每小题 5 分,共 30 分)

1. 条件 $p: |x+1| > 2$,条件 $q: \frac{1}{3-x} > 1$. 则 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的(　　).

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件

(D) 既不充分也不必要条件

2. 一个正整数数表如表 1(表 1 中下一行中数的个数是上一行中数的个数的 2 倍). 则第八行中的第 5 个数是(　　).

(A) 68　　(B) 132　　(C) 133　　(D) 260

表 1

第一行	1
第二行	2　3
第三行	4　5　6　7
第四行	……

3. 若不等式 $ax^2 + bx + 4 > 0$ 的解集为 $\{x \mid -2 < x < 1\}$,则二次函数 $y = bx^2 + 4x + a$ 在区间 $[0,3]$ 上的最大值、最小值分别为(　　).

(A) 0, -8　　(B) 0, -4

(C) 4, 0　　(D) 8, 0

4. 如图 1, $f(x)$ 是定义在区间 $[-4, 4]$ 上的奇函数,令 $g(x) = af(x) + b$. 则下列关于 $g(x)$ 的叙述中,正确的是(　　).

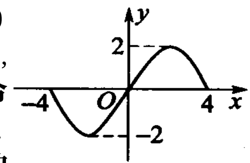

图 1

(A) 若 $a < 0$,则函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称

(B) 若 $a = -1, -2 < b < 0$,则方程 $g(x) = 0$ 有小于 2 的实数根

(C) 若 $a \neq 0, b = 2$,则方程 $g(x) = 0$ 有两个实数根

(D) 若 $a \geq 1, b < 0$,则方程 $g(x) = 0$ 有三个实数根

5. 在 $\triangle ABC$ 中,设

$$x = \cos A + \cos B + \cos C,$$

$$y = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}.$$

则 x、y 的大小关系是(　　).

(A) $x = y$　　(B) $x \geq y$

(C) $x \leq y$　　(D) 不能确定

$$a_{n+1} - a_n = (t^2 - t)t^{n-1},$$

即 $a_{n+1} - t^{n+1} = a_n - t^n$,有 $a_n - t^n = a_1 - t = 0$.

故 $a_n = t^n (n \in \mathbf{N}_+)$,此式对 $t = 1$ 也成立.

(2) $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{2}(t^n + t^{-n})$.

因为 $\frac{1}{2} < t < 2$,所以,$(2t)^n > 1$, $t^n < 2^n$. 则

$$(2^n + 2^{-n}) - (t^n + t^{-n})$$

$$= \frac{1}{(2t)^n}(2^n - t^n)[(2t)^n - 1] > 0.$$

有 $\frac{1}{b_n} < \frac{1}{2}(2^n + 2^{-n})$.

故 $\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$

$$< \frac{1}{2}\left[\left(2 + \frac{1}{2}\right) + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)}{1 - \frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2^n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$< 2^n - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\frac{1}{2^n}} = 2^n - 2^{-\frac{n}{2}}.$$

注:此题也可利用导数研究函数 $y = t^n + t^{-n}$ 在 $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 上的单调性.

(汪宏宝　提供)